SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Aytpanova Aray Amangeldiyevna
master 2 courses of the specialty «Mathematics»,
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

RICCI CURVATURE AND THE RICCI OPERATOR

The authors consider the problem of finding the Ricci operator on the Lie algebra for uni modular and bilinear forms.

Keywords: lie algebra, variety, operator Ricci, the curvature, the metric, basis, functional analysis.

КРИВИЗНА РИЧЧИ И ОПЕРАТОР РИЧЧИ

В работе рассматриваются вопросы нахождения оператора Риччи на алгебре Ли для унимодулярных и билинейных форм.

Ключевые слова: алгебра Ли, многообразия, оператор Риччи, кривизна, метрика, базис, функциональный анализ.

Как известно из теории римановых многообразий (см.,например, Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер [1] и Д.Громол, В.Клингенберг, В.Мейер [2]) произвольная левоинвариантная метрика на группе Ли G определяет некоторое скалярное произведение на алгебре Ли группы G. И наоборот, каждое скалярное произведение на алгебре Ли индуцирует левоинвариантную метрику на группе G. В таких случаях появляется возможность отождествлять левоинвариантные векторные поля на заданной группе Ли с элементами алгебры Ли этой группы, которая представляет собой касательное пространство к группе Ли в ее единичном элементе (Дж.Адамс [3], A.Baker [4]).

Такой подход позволяет решать задачу, используя только аппарат метрических алгебр Ли. Таким образом, аппарат теории метрических алгебр Ли оказался очень удобным инструментом при изучении подобных задач римановой геометрии и ее приложений.

Метрической алгеброй Ли называется пара $(L,(\cdot,\cdot))$, где L - некоторая алгебра Ли, $(\cdot,\cdot)$-некоторое скалярное произведение, определенное на L как на векторном пространстве.

Пусть L-алгебра Ли над F с базисом $\{e_1,...,e_n\}$. Тогда разлагая $[e_i,e_j]$ по базисным векторам, имеем

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}e_k\ , \quad \text{где} \quad c_{ij}^{k}\in F\ .$$

c_{ij}^{k} называются структурными константами L относительно к заданному базису. При другом выборе базиса структурные константы будут другими. Согласно (L1) и (L1') достаточно знать структурные константы при $1\le i<j\le n$.

Пусть L_1 и L_2- алгебры Ли с базисами B_1 и B_2 соответственно. Нетрудно, доказать, что L_1 изоморфна L_2 тогда и только тогда, когда структурные константы L_1 относительно базиса B_1 совпадают со структурными константами L_2 относительно B_2.

Пусть L_1 и L_2- абелевы алгебры Ли. Они изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Пусть L-алгебра Ли над F с базисом $\{e_1,...,e_n\}$. Если $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, то для оператора присоединенного действия имеем следующее

$$ad(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i ad(e_i)\ .$$

Теорема 1. В базисе $\{e_1,...,e_n\}$ оператор $ad(x)$ представляется матрицей вида

$$A(x)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_ic_{i1}^{1} & \dots & \sum_{i=1}^{n}x_ic_{in}^{1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \sum_{i=1}^{n}x_ic_{i1}^{n} & \dots & \sum_{i=1}^{n}x_ic_{in}^{n}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$ алгебры L. Тогда

$$ad(x)(y)=[x,y]=[\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_je_j]=\sum_{j=1}^{n}y_j\ \sum_{i=1}^{n}x_i[e_i,e_j]=\sum_{j=1}^{n}y_j\ \sum_{i=1}^{n}x_i\ \sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}e_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\ \sum_{j=1}^{n}y_j\ \sum_{i=1}^{n}x_ic_{ij}^{k})e_k\ .$$

Следовательно, покомпонентно

$$[x,y]_k = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij}^k .$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} [x,y]_1 \\ \dots \\ [x,y]_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i c_{i1}^1 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i c_{in}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i c_{i1}^n & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i c_{in}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема имеет важное следствие. Пусть $x = e_i$. Тогда оператор $ad(e_i)$ имеет матричное представление

$$\begin{pmatrix} c_{i1}^1 & \dots & c_{in}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1}^n & \dots & c_{in}^n \end{pmatrix},$$

другими словами, $(ad(e_i))_{kj} = c_{ij}^k$.

Понятие кривизны является одним из фундаментальных понятий в дифференциальной геометрии и ее приложениях в механике и физике. Как обобщение этого понятия в теории многообразий вводится понятие кривизны Риччи и связанного с ней тензора– оператора Риччи.

Пусть L-алгебра Ли над F с ортонормированнным базисом $\{e_1,\dots,e_n\}$ и некоторым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим отображение $U : L \times L \to L$, заданное условием

$$(U(x,y),z) = \frac{([z,x],y) + (x,[z,y])}{2}.$$

Возьмем произвольные элементы $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ алгебры Ли L.

Тогда

$$U(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j U(e_i,e_j).$$

$U(e_i,e_j)$ нетрудно вычислить через структурные константы алгебры L. В самом деле, если $U(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k$, то

$$a_{ij}^k = (U(e_i,e_j),e_k) = \frac{([e_k,e_i],e_j)+(e_i,[e_k,e_j])}{2} = \frac{c_{ki}^j + c_{kj}^i}{2}.$$

Определим теперь вектор $H = \sum_{i=1}^n U(e_i,e_i)$.

Теорема 2. $(H,x) = trace(ad_x)$ для любого $x \in L$.

Доказательство. Как видно из теоремы 1.

$$trace(ad_x) = \sum_{i=1}^n x_i c_{i1}^1 + \sum_{i=1}^n x_i c_{i2}^2 + \ldots + \sum_{i=1}^n x_i c_{in}^n =$$

$$= x_1 \sum_{i=1}^n c_{1i}^i + x_2 \sum_{i=1}^n c_{2i}^i + .. + x_n \sum_{i=1}^n c_{ni}^i .$$

С другой стороны, поскольку $U(e_i,e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ii}^k e_k = \sum_{k=1}^n c_{ki}^i e_k$, то

$$H = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n c_{ki}^i) e_k .$$

Отсюда $(H,x) = x_1 \sum_{i=1}^n c_{1i}^i + x_2 \sum_{i=1}^n c_{2i}^i + .. + x_n \sum_{i=1}^n c_{ni}^i$.

Теорема доказана.

Следствие. $H = \sum_{i=1}^n (trace(ad_{e_i}))e_i$, $ad_H = \sum_{i=1}^n (trace(ad_{e_i}))ad_{e_i}$.

Формой Киллинга алгебры Ли L называют билинейную форму

$$B : L \times L \to R,$$

задаваемую для всех $x, y \in L$ по правилу

$$B(x,y) = trace(ad_x \circ ad_y).$$

Согласно А.Л.Бессе [5] оператором Риччи алгебры Ли L называют билинейную форму

$$Ric : L \times L \to R,$$

задаваемую для всех $x \in L$ по формуле

$$Ric(x,x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n [x,e_i]^2 - \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n ([e_i,e_j],x)^2 - ([H,x],x).$$

Число $Ric(x,x)$ называется кривизной Риччи алгебры Ли L в точке $x \in L$.

В работе [6] Д.В.Алексеевский предложил более удобную формулу для вычисления оператора Ric:

$$Ric = -\frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{4}\Sigma_2 - \frac{1}{2}B - ad_H^S,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{n}(ad_{x_1})^T ad_{x_i}, \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} ad_{x_1}(ad_{x_i})^T,$$

B - форма Киллинга (матрица с элементами $b_{ij} = trace(ad_{x_i} ad_{x_j})$),

$$ad_H^S = \frac{1}{2}(ad_H + (ad_H)^T),$$

T - операция транспонирования матриц.

Пример 1. Покажем как найти оператор Риччи для алгебры Ли $L_{3,2}$ с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ и ненулевой скобкой Ли $[x_1, x_2] = \gamma x_3$.

Согласно теореме 1

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad_{x_3} = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{3}(ad_{x_1})^T ad_{x_i} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^{3} ad_{x_1}(ad_{x_i})^T = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_H = trace(ad_{x_3})ad_{x_3} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_H^S = \frac{1}{2}(ad_H + (ad_H)^T) = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица B имеет единственный ненулевой элемент

$$b_{33} = trace(ad_{x_3} ad_{x_3}) = 2\gamma^2 .$$

Следовательно,

$$Ric = -\frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{4}\Sigma_2 - \frac{1}{2}B - ad_H^S = \begin{pmatrix} -2\gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & -2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли L называется унимодулярной, если

$$trace(ad_x) = 0$$

для всех $x \in L$.

Отметим, что $H = 0$ в случае унимодулярных алгебр Ли. Действительно, как вытекает из теоремы 2, $(H, x) = trace(ad_x) = 0$ для всех $x \in L$, где L - унимодулярная. Отсюда $H = 0$.

В случае унимодулярных алгебр Ли формула для нахождения оператора Риччи упрощается, а именно принимает вид

$$Ric = -\frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{4}\Sigma_2 - \frac{1}{2}B .$$

В случае нильпотентных алгебр Ли формула для нахождения оператора Риччи максимально упрощается, поскольку нильпотентные алгебры унимодулярны и имеют нулевую форму Киллинга:

$$Ric = -\frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{4}\Sigma_2 .$$

Литература

1. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. -Спб.: Наука, 1994.
2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
3. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. –М.: «Наука», 1979.
4. Baker A. Matrix Groups. An Introduction to Lie Group Theory. Springer-Verlag London Limited, 2002.
5. Бессе А.Л. Многообразия Эйнштейна. -М.: Мир, 1990.
6. Алексеевский Д.В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Матем. сб. 1975. Т.96. С.93-117.