УДК 338.57+519.866

В.В. Вітлінський
д-р. екон. наук, професор
Ю.В. Коляда
канд. екон. наук
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана
С.І. Пертен
ст. викладач
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ

АНАЛІТИЧНИЙ НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КІНЕТИЧНОЇ МОДЕЛІ ІНФЛЯЦІЇ

Вступ. Загальновідомо, що наявність інфляції свідчить про певні негаразди в економіці суспільства. Прогнозування рівня інфляції завжди становить інтерес як для урядовців, так і загалу економістів.

Аналіз літературних джерел. Методологічні положення та відповідний економіко-математичний інструментарій щодо аналізу та прогнозування інфляції розглядаються у низці праць ряду вчених та фахівців. Частина з наукових робіт даної проблематики, зокрема [1,3-6,8,9,11], присвячена побудові та аналізу кінетичних моделей інфляції.

У працях [9,10] де пропонуються модифікації кінетичної моделі інфляції, інтегральні криві отримуються з використанням обчислювальних схем типу Розенброка, бо рівняння є жорсткі.

Зауважимо, такий вагомий інструмент аналізу динамічних моделей як фазові та фазово-параметричні портрети [6], не розглядаються. Щось подібне має місце у статті [1], де розраховуються кінетичні коефіцієнти моделі без урахування впливу останніх на поведінку фазових змінних.

У праці [4], де моделювалась поведінка інфляційних процесів української економіки, вхідні параметри динамічної моделі описувались кубічними сплайн-функціями, що унеможливлює побудову аналітичного наближеного розв'язку.

Постановка проблеми. Моделювання розвитку інфляційного процесу може ґрунтуватися на використанні нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь – неперервної (точкової) математичної моделі (ММ) економічної динаміки. Традиційно її розв'язки шукаються методами числового інтегрування. Звісно, аналітичний розв'язок більш інформативний в сенсі всестороннього і глибокого аналізу динамічної моделі, варіюючи її параметри, початкові умову тощо. Також на предмет отримання сценаріїв розвитку подій, горизонту їх прогнозування переваги аналітичного розв'язку незаперечні.

Мета статті – побудувати наближений аналітичний розв'язок динамічної моделі інфляції, порівняти результати комп'ютерного розрахунку з відомими результатами моделювання, та наявними статистичними даними.

Виклад основного матеріалу. Математично динаміка процесу інфляції описується [4,7] нелінійною системою автономних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = k_1\left(\dfrac{1+m(t)}{1+y(t)} - p(t)\right), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = k_2\left(\dfrac{d(t)\cdot m(t)}{p(t)} - y(t)\right). \end{cases} \tag{1}$$

Тлумачення складових ММ (1), її параметрів подається нижче: функція $p(t)$ описує поведінку індексу споживчих цін – перша фазова координата; функція $y(t)$ відповідає обсягу реального ВВП – друга фазова координата; $m(t) = \Delta M(t) / M_0$ – безрозмірна функція грошової емісії, $\Delta M(t)$ – емісійний надлишок грошової маси M_0; $d(t) = \xi(t) M_0 / p(t) \cdot I$ – коефіцієнт монетизації тієї частини реального ВВП, яка отримана в результаті інвестування грошей в обсязі $\xi(t)$; I – валові інвестиції; k_1, k_2 – кінетичні коефіцієнти, що представляють собою швидкості реакції системи на встановлення рівноваги. Для динамічної моделі (1) початкові умови записуються $p(0) = 1,\ y(0) = 0$. Таким чином, система диференціальних рівнянь (1) з вказаними початковими умовами утворює задачу Коші – математичну модель еволюції інфляційних процесів в економіці.

Зауваження 1. Оскільки апарат числових методів розв’язання нелінійної задачі Коші досить розвинений і широко представлений в прикладних пакетах програм, то практично відсутні (авторам невідомі) дослідження, спрямовані на побудову аналітичного наближеного розв’язку, який відповідає рівню інфляції.

Зауваження 2. Права частина динамічної моделі (1) є рівняння економічної рівноваги. Загалом рівняння ММ (1) отримані згідно морфологічної структури

$$\frac{df(t)}{dt} = k\left(F - f(t)\right),$$

де $f(t)$ – функція поведінки деякого економічного показника, F – нове рівноважне значення показника, коефіцієнт k – прискорення (уповільнення) переходу до нового значення F [8, с.26], оскільки, кожний економічний показник має свій темп змінюваності.

Зупинимось на характерних рисах динамічної моделі (1). Їй притаманно моделювати одночасну динаміку індексу споживчих цін (ІСЦ) та реального валового внутрішнього продукту (ВВП). При чому, зміна одного макроекономічного показника впливає на зміну іншого. Тривалість такого впливу визначається за допомогою параметрів k_1 і k_2. Так, перше рівняння системи (1) описує динаміку ІСЦ – змінюваність з швидкістю k_1 функції $p(t)$ до нового рівноважного стану $\dfrac{1+m(t)}{1+y(t)}$, а друге рівняння – відповідно змінюваність реального ВВП ($y(t)$) з швидкістю k_2 до положення рівноваги $\dfrac{d(t)\cdot m(t)}{p(t)}$. Причиною переходу до нового стану системи є збільшення грошової маси та інвестиції у виробництво. Якщо в моделі (1) відкинути параметри k_1 і k_2, це означатиме, що підвищення як рівня ІСЦ внаслідок емісії $m(t)$, так і підвищення обсягів реального ВВП внаслідок інвестованих грошей $\xi(t)$ відбуваються в один і той самий час, а це на практиці навряд чи можливо. Вибір кінетичних коефіцієнтів k_1 і k_2, як раз, дозволяє врахувати таку властивість економічної системи. Надалі будемо розглядати функції $m(t)$ і $d(t)$ сталими величинами. Це означає, що грошова емісія чи інвестиції відбуваються один раз, а не частинами протягом часу.

Інтегральні криві індексу споживчих цін в рамках динамічної моделі (1) наведені нище.

Рис.1 Інтегральні криві $p(t)$ ММ (1) для різних значень параметрів k_1, k_2, m, d.

На рис.1 зображено графічно три числові розв'язки ММ (1) для різних значень параметрів k_1, k_2, m і d, які ілюструють поведінку кривої індексу споживчих цін. Крива 1 є прикладом інфляційної економіки, коли зростання рівня цін відбувається з великою швидкістю, після чого під впливом збільшення обсягів реального ВВП, ціни поступово падають до рівноважного значення. Такий сценарій розвитку подій досягається вибором параметру k_1, який в 5 раз більше k_2. Крім того, параметр d в 3 рази більше параметра m, що може свідчити про економічну політику, направлену на підвищення обсягів інвестицій у виробництво. Крива 2 має дещо схожу поведінку з кривою 1, але при цьому максимальне значення ІСЦ майже в два рази менше, 8,5% проти 15%. Крива 3 ілюструє помірне зростання ІСЦ, оскільки в цьому випадку швидкість k_2 набагато більша ніж k_1 ($k_2 = 10$; $k_1 = 1$), тобто моделює ситуацію, коли збільшення грошової маси не призводить до суттєвих інфляційних наслідків.

На рис.2 зображені криві реального ВВП, які відповідають графікам функції $p(t)$ на рис.1. Очевидно, що вони також мають різну поведінку.

Безперечною перевагою практичного застосування кінетичної моделі інфляції є можливість моделювати різні сценарії подій. Так, на рис. 1 зображені три криві, які, незважаючи на різну історію зміни, набули одного і того самого значення у 8%. Справді, якісний аналіз динамічної системи (1) свідчить про існування особливої точки $P_T = 1 + m - dm$, $Y_T = \dfrac{dm}{1 + m - dm}$, яка для $0 < d < 1$ і $m(t) > 0$ є стійкою. Це означає, які б не були початкові значення системи та значення параметрів, розв'язки за певний час стабілізуються до стану рівноваги P_T і Y_T.

Інтегральні реального ВВП в рамках динамічної моделі (1) наведені на рис.2.

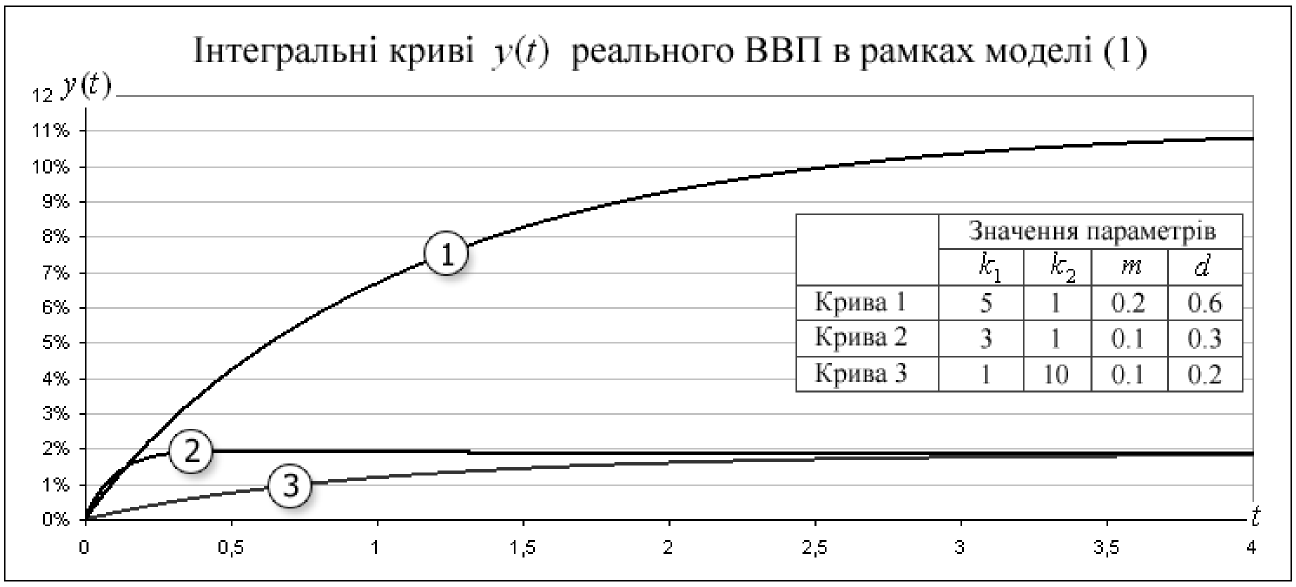

Рис.2 Розв'язки $y(t)$ *ММ (1) для різних значень параметрів* k_1, k_2, m, d.

Пропонується розглядати наступну динамічну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = k_1\left(1+m-d\cdot m-p(t)\right); \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = k_2\left(\dfrac{d\cdot m}{1+m-d\cdot m} - y(t)\right), \end{cases} \tag{2}$$

яка отримується з ММ (1) шляхом заміни доданків $\left(\dfrac{1+m}{1+y(t)}\right)$, $\left(\dfrac{dm}{p(t)}\right)$ відповідно на координати точки рівноваги $(1+m-d\cdot m)$, $\left(\dfrac{dm}{1+m-dm}\right)$. Лінійна система диференціальних рівнянь (2) володіє точним аналітичним розв'язком:

$$\tilde{p}(t) = 1+m-d\cdot m - \frac{m(1-d)}{e^{k_1 t}}; \tag{3}$$

$$\tilde{y}(t) = \left(\frac{d\cdot m}{1+m-d\cdot m}\right)\left(1-\frac{1}{e^{k_2 t}}\right), \tag{4}$$

який є наближеним розв'язком для вихідної моделі (1).

Оскільки аналітичні розв'язки наближені, то треба оцінити величину похибки E для кожної змінної динамічних моделей – відповідно для вхідної нелінійної (1) та лінеаризованої (2) для неї. Дійсно, для лінійної ММ (1) отримуються вирази:

$E_p^{лін} = m(1-d)e^{-k_1 t}\left(k_1 - 1\right)$ стосовно змінної p і $E_y^{лін} = k_2 e^{-k_2 t}\left(\dfrac{m(2d-1)-1}{1+m(1-d)}\right)$ щодо змінної y після очевидних алгебраїчних перетворень рівнянь моделі. Експоненціальні співмножники виразів $E_p^{нлн}$ і $E_y^{нлн}$, маючи від'ємні степені, повністю нівелюють похибки моделювання.

Подібні перетворення на прикладі нелінійної динамічної моделі (1) дають аналогічний результат для похибки $E_y^{нлн}$ ВВП, але для змінної $p(t)$ похибка детермінується доданком $d\cdot m$, що цілком логічно, зважаючи на економічний зміст величин d і m.

Висувається гіпотеза: аналітичний розв'язок лінійної динамічної моделі (2) описує, в головному, поведінку інтегральної кривої нелінійної диференціальної системи рівнянь (1). Тобто на деякому інтервалі допустимих значень параметрів, розв'язки обох систем співпадають з певною похибкою.

За своєю сутністю, висловлена гіпотеза перекликається з фундаментальною теоремою про якісне дослідження стійкості нелінійної динамічної моделі [2, с.34].

Нижче приводяться графічно результати моделювання на підґрунті динамічних моделей (1) і (2).

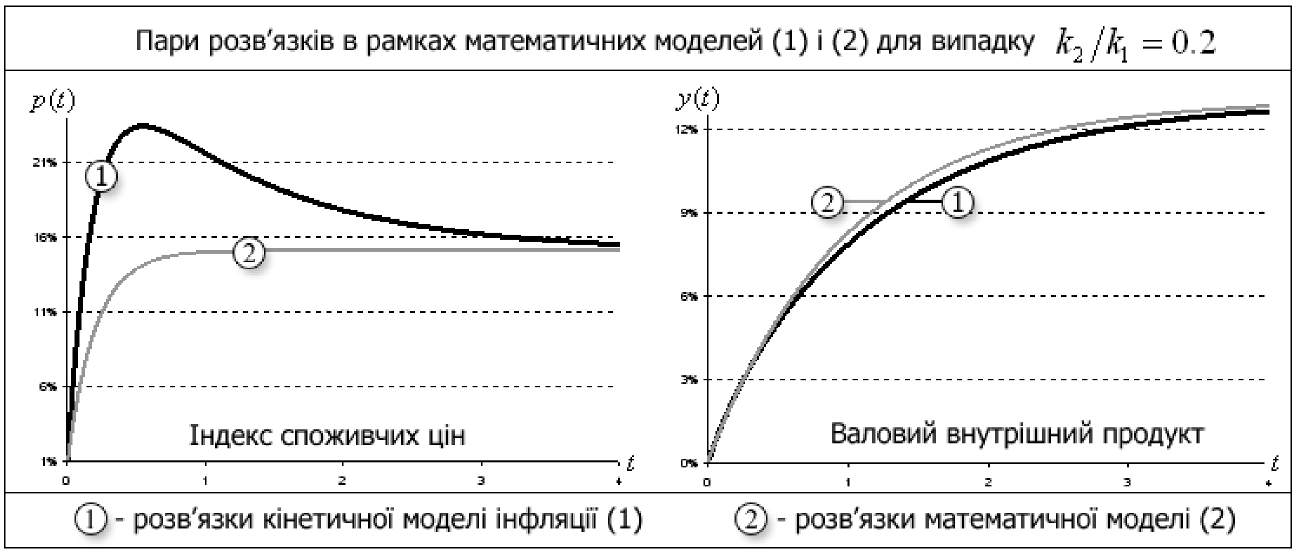

Рис.3. Зміна індексу цін та обсягів реального ВВП в рамках математичних моделей (1) і (2), для наступних значень параметрів $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $m = 0.5$, $d = 0.3$.

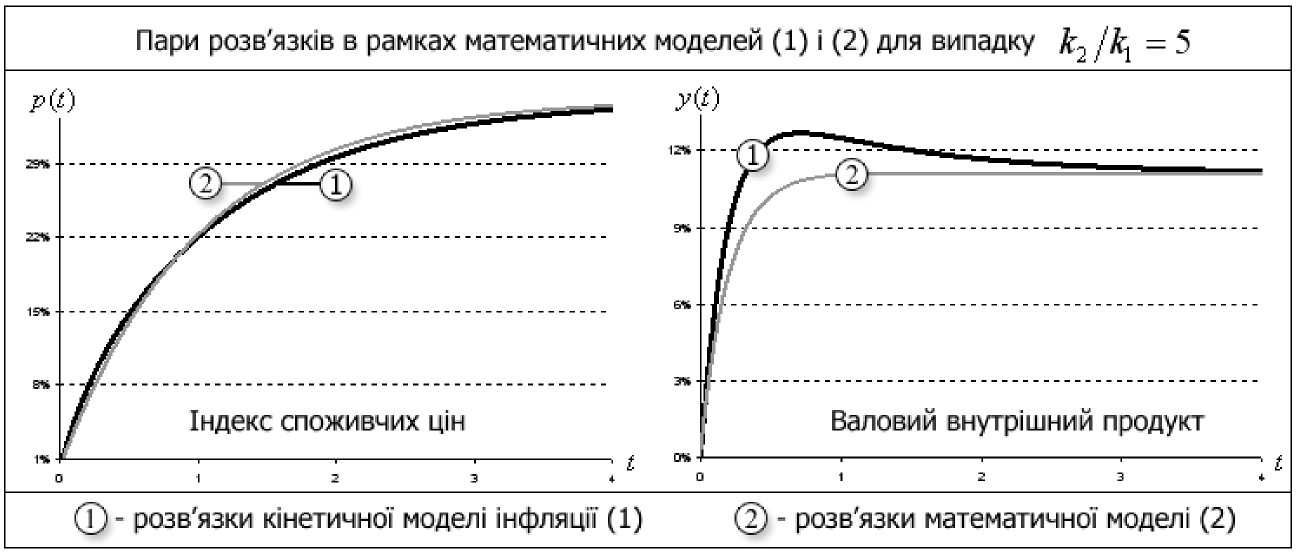

Рис.4. Зміна індексу цін та обсягів реального ВВП в рамках математичних моделей (1), (2), для наступних значень параметрів $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $m = 0.3$, $d = 0.5$.

Слід зауважити, що така ситуація залежить від параметрів k_1 і k_2. Тобто, коли k_2 більше ніж k_1 криві $p(t)$ збігаються, а в протилежному випадку, збігаються криві $y(t)$. Таким чином, від співвідношення k_1/k_2 суттєво залежить характер зміни розв'язку. Цей факт засвідчує необхідність розглядати різні формули аналітичного подання розв'язку залежно від числових значень коефіцієнтів k_1 і k_2. Так, при $k_1/k_2 < 1$, крива зміни ВВП $y(t)$ монотонно зростає до рівноважного значення Y_T. Крива $p(t)$, також зростає до рівноважного значення Y_T, але після того, як досягне свого максимального значення. На рис.3 цей максимум складає 23,3%, а рівноважне значення дорівнює 15%. Аналогічна ситуація у випадку, коли $k_1/k_2 > 1$, тільки вже крива $y(t)$ після максимального значення спадає до рівноважного стану, а $p(t)$ монотонно наближається до рівноваги.

Враховуючи вищезазначене, пропонується розглядати розв'язки кінетичної моделі інфляції в аналітичному вигляді, для формалізації яких використовуються експоненціальні функції:

$$f(t) = a_0 + a_1\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha t}}\right) - a_2\left(1 - \frac{1}{e^{\beta t}}\right) \tag{5}$$

$$g(t) = b_0 + b_1\left(1 - \frac{1}{e^{\gamma t}}\right) \tag{6}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$ – деякі числа, вибір яких дозволив би відтворити розв'язки моделі інфляції, отриманні числовим інтегруванням.

Функція (5) моделює ситуацію з зростанням до максимуму, а (6) монотонне зростання до положення рівноваги. Таким чином, для представлення функцій $f(t)$ і $g(t)$ як розв'язків кінетичної моделі інфляції, необхідно, щоб задовольнялись початкові умови ММ (1), а розв'язки стабілізувались до положення рівноваги. Математично це запишеться так:

$$\begin{cases} p(0) = 1, \ \lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 1 + m - dm, \\ y(0) = 0, \ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{dm}{1 + m - dm}. \end{cases} \tag{7}$$

Задовольнивши умови (7), для випадку $k_1 > k_2$,отримаємо наступні наближені розв'язки кінетичної моделі інфляції:

$$\begin{cases} \tilde{P}(t) = 1 + m\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_1 t}}\right) - dm\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_2 t}}\right), \\ \tilde{Y}(t) = \dfrac{dm}{1 + m - dm}\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_2 t}}\right). \end{cases} \tag{8}$$

У випадку $k_1 < k_2$, відповідно

$$\begin{cases} \tilde{P}(t) = 1 + \left(m - dm\right)\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_1 t}}\right), \\ \tilde{Y}(t) = dm\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_2 t}}\right) - \dfrac{dm\left(m - dm\right)}{1 + m - dm}\left(1 - \dfrac{1}{e^{k_1 t}}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Слід відмітити, що при підстановці функцій $\tilde{P}(t)$ та $\tilde{Y}(t)$ в рівняння системи (1), останні не перетворюються в тотожність. Покажемо, що ці функції можуть розглядатись як аналітичне представлення наближених розв'язків кінетичної моделі інфляції.

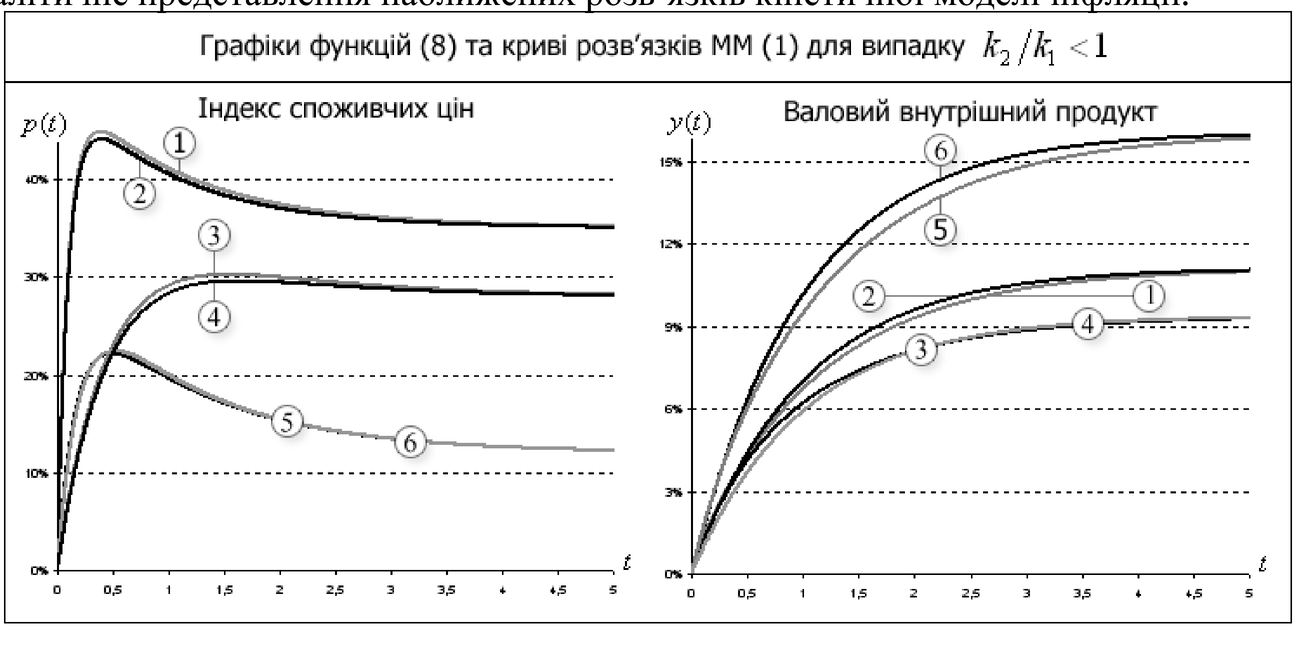

Рис.5. Побудовані криві ІСЦ та ВВП в рамках кінетичної моделі інфляції (2) (криві 1,3,5) в порівнянні з графіками функцій (8) (криві 2,4,6). Для пари кривих 1,2,

використовувались наступні значення параметрів $k_1 = 10$, $k_2 = 1$, $m = 0.5$, $d = 0.3$, *для кривих 3,4 –* $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $m = 0.4$, $d = 0.3$ *і для кривих 5,6 –* $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $m = 0.3$, $d = 0.6$.

На рисунках 5 і 6 для кожного з трьох наборів параметрів k_1, k_2, m і d побудована пара кривих, одна з яких є числовим розв'язком ММ (1), а друга є графіком функцій $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Y}(t)$ вигляду (8) або (9). Вибір цих функцій продиктований відношенням k_2/k_1. Так, на рис.5 побудовані графіки функцій $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Y}(t)$ вигляду (8), оскільки $k_2/k_1 < 1$. І навпаки, на рис.6 зображені функції $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Y}(t)$ вигляду (9), так як, $k_2/k_1 > 1$. Випадок рівності кінетичних коефіцієнтів ($k_1 = k_2$) не розглядається в силу своєї економічної невідповідності.

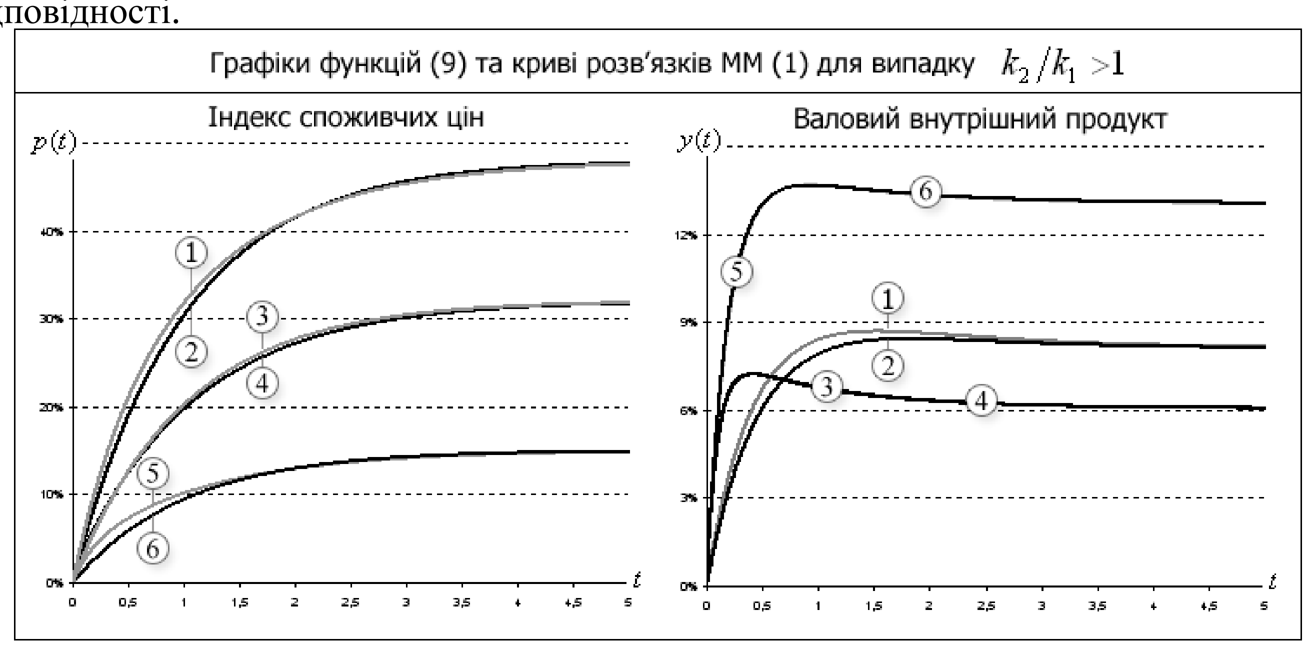

Рис.6. Побудовані розв'язки кінетичної моделі інфляції (1) (криві 1,3,5) в порівнянні з графіками функцій (9) (криві 2,4,6). Для пари кривих 1,2, використовувались наступні значення параметрів $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $m = 0.6$, $d = 0.2$, *для кривих 3,4 –* $k_1 = 1$, $k_2 = 10$, $m = 0.4$, $d = 0.2$ *і для кривих 5,6 –* $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $m = 0.3$, $d = 0.5$.

Візуальний аналіз рисунків 5 і 6 дозволяє стверджувати про майже повну ідентичність числових розв'язків кінетичної моделі інфляції (1) та функцій $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Y}(t)$. Зокрема, на рис.5, у випадку індексу споживчих цін найбільша невідповідність спостерігається для кривих 3,4 (похибка складає 0.3%), це пояснюється, тим, що кінетичні коефіцієнти достатньо близькі один до одного ($k_1 = 2$, $k_1 = 1$). Взагалі кажучи, багаторазовий обчислювальний експеримент підтвердив, що чим більше відношення k_2/k_1 чи k_1/k_2 тим похибка менше.

При цьому спостерігається цілковита ідентичність поведінки кривих, а це є чи не найголовнішим доказом на користь використання формул (8),(9) як аналітичного розв'язку системи (1). Аналогічна ситуація спостерігається на рис.6, коли $k_1 / k_2 < 1$.

Отже, формули (8) і (9) наближеного аналітичного розв'язку, дозволяють поліпшити якісний аналіз кінетичної моделі (1). Вони розширюють коло можливостей моделювання процесів ціноутворення. Використовуючи згадані формули, також можна визначити час, протягом якого ІСЦ досягає свого максимуму, а саме:

$$t_M = \frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2 d}\right) \tag{10}$$

у випадку застосування (8), причому максимальне значення обчислюється наступним чином:

$$\tilde{p}_{\max} = \left(1 + m - dm\right) + \left(m \left(\frac{k_1}{k_2 d} \right)^{\frac{k_1}{k_2 - k_1}} \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \right). \tag{11}$$

Аналогічні міркування застосовні до показника обсягу ВВП.

Висновки. Побудовані наближені аналітичні розв'язки кінетичної моделі інфляції (1) доповнюють інструментарій дослідження інфляційних процесів. Тобто значно збільшується спектр задач, які можуть бути розв'язані, а метою розв'язання є визначення особливостей поведінки процесів ціноутворення. Однією з таких задач є управління інфляційними процесами, яка може дати відповідь на наступне питання: "яким повинен бути обсяг інвестицій ξ у реальне виробництво, щоб емітовані в економіку гроші у розмірі ΔM, мали б найменші інфляційні наслідки?" Задача визначення кінетичних коефіцієнтів, також може бути розв'язана на підґрунті функцій $\tilde{p}(t)$ та $\tilde{y}(t)$.

Література

1. Васильєва А.Т. Про знаходження коефіцієнтів кінетичної моделі інфляції / А.Т. Васильєва, В.С. Гостинець// Економічний вісник НТУУ "КПІ". – К.: НТУУ "КПІ", 2009. – №6 – С. 417-421.
2. Вітлінський В.В. Адаптивні моделі в економіці / В.В. Вітлінський, Ю.В. Коляда, Т.В. Кравченко, В.І. Трохановський// Навчальний посібник [електронний ресурс]. – Київ.: КНЕУ, 2013. – 98с.
3. Гордєєв Г.Г. Дослідження нелінійних моделей економічної динаміки / Г.Г. Гордєєв // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2012. – № 2. – С. 133-139.
4. Коляда Ю.В. Математичне моделювання інфляції в Україні / Ю.В. Коляда, С.І. Пертен // Міжнародний науковий журнал «Економічна кібернетика», №1-3(67-69), 2011. –С.16-25.
5. Коляда Ю.В. Синергетичний ефект інфляційного процесу / Ю.В. Коляда, С.І. Пертен // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР - 2007) // Труды международной школы – симпозиума. Севастополь, 12-16 сентября 2007. – Симферополь: ОО «ДЕН». – с.93-99.
6. Коляда Ю.В. Фазові та параметричні портрети типових математичних моделей нелінійної економічної динаміки / Ю.В. Коляда // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. Праць – М-во освіти і науки України, ДВНЗ "Київський нац. екон. ун-т ім. В.Гетьмана"; Відп. ред. В.К. Галіцин. – К.: КНЕУ, 2010. – Вип. 82 – с.74-90.
7. Накоряков В.Е. Кинетическая модель инфляции / В.Е. Накоряков, В.Г. Гасенко // Экономика и математические методы. – 2004. – 40, №1. – С. 129-134.
8. Новожилова М.В. Моделювання економічної динаміки / М.В. Новожилова, П.Н. Коюда, Чуб І.А. – Х.: ХДТУБА, 2005. – 132 с.
9. Осечкина Т.А. Математическая модель оценки инфляции / Т.А. Осечкина, Е.Э. Постаногова // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2012.– № 1. – С. 148-158.
10. Табачников Я.А. Кинетическая модель инфляции, учитывающая инфляционные ожидания / Я.А. Табачников // Прикладна статистика Актуарна та фінансова математика. – 2008. – №1–2. – С.92-100.
11. Vytlynskyi V.V., Kolyada Yu.V., Perten S.Y. Dynamics of the risk by means of watching economic indexes rates / V.V. Vytlynskyi, Yu.V. Kolyada, S.Y. Perten // Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems: Proceeding of the Ninth International Scientific School MA SR – 2009 (Saint-Petersburg, Russia, July 7 – 11, 2009) / Spb.: SUAI, 2009, 99-104p.

1. Vasylieva, A.T., Hostynets, V.S. (2009), "Pro znakhodzhennia koefitsiientiv kinetychnoi modeli infliatsii" [On the coefficients finding of the inflation kinetic model], Economic bulletin of National technical university of Ukraine «Kyiv polytechnical institute», no.6, pp.417-421.
2. Vitlinskyi, V.V., Koliada, Yu.V., Kravchenko, T.V. and Trokhanovskyi, V.I. (2013), Adaptyvni modeli v ekonomitsi [Adaptive models in economics], pain [electronic resource], Kyiv National Economic University named after Vadym Getman, Ukraine.
3. Hordieiev, H.H. (2012), "Investigation of nonlinear models of economic dynamics", Zovnishnia torhivlia: ekonomika, finansy, pravo [Foreign trade: business, finance, law], no. 2, pp. 133-139.
4. Koliada, Yu.V., Perten, S.I. (2011), "Mathematical modeling of inflation in Ukraine", Economic cybernetics, no.1-3, pp.16-25.
5. Koliada, Yu.V., Perten, S.I. (2007), "The synergetic effect of the inflationary process", Proc. Int. Sch. - Symp. "Analysis, modeling, management, development of economic systems", DEN, Simferopol, pp. 93-99.
6. Koliada, Yu.V. (2010), "Fazovi ta parametrychni portrety typovykh matematychnykh modelei neliniinoi ekonomichnoi dynamiky" [Phase and parametric portraits of the typical nonlinear mathematical models of economic dynamics], Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi: Zb. nauk. Prats [Modelling and information systems in economics], Kyiv National Economic University named after Vadym Getman, vol. 82, pp.74-90.
7. Nakoryakov, V.E., Gasenko, V.G. (2004), "A kinetic model of inflation", Economics and Mathematical Methods, vol.40, no.1, pp.129-134.
8. Novozhylova, M.V., Koiuda, P.N. and Chub, I.A. (2005) Modeliuvannia ekonomichnoi dynamiky [Modeling of economic dynamics], Kharkiv National University of Construction and Architecture, Ukraine.
9. Osechkina, T.A., Postanogova, E.E. (2012) "Mathematical model of an assessment of inflation", Prikladnaja matematika i mehanika [Applied mathematics and mechanics], Perm National Research Politechnic University, pp. 148-158
10. Tabachnikov, Ya.A. (2008) "Kineticheskaja model' infljacii, uchityvajuwaja infljacionnye ozhidanija" [Kinetic model of inflation, taking into account the inflation expectations], Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics, no.1-2, pp. 92–100.
11. Vytlynskyi, V.V., Kolyada, Yu.V., Perten, S.Y. (2009), "Dynamics of the risk by means of watching economic indexes rates", Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems: Proceeding of the Ninth International Scientific School, Saint-Petersburg, SUAI, pp. 99-104p