УДК 330.15:316

І. М. Ляшенко
д-р фіз.-мат. наук, професор

Ю. П. Тадеєв
канд. екон. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНА ДИНАМІКА З УРАХУВАННЯМ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО КАПІТАЛУ

Вступ. Макроекономічні виробничі функції можуть бути ефективно використані при дослідженні динамічних процесів виробництва та розподілу продукції. Вони дозволяють, зокрема, дослідити оптимальні пропорції між виробництвом, споживанням та інвестиціями у виробничий капітал [4]. В останній час велика увага приділяється еколого-економічним моделям, які враховують також і ступінь забруднення навколишнього середовища. Так, в роботі [1] побудована еколого-економічна модель у вигляді задачі оптимального управління, яка дозволяє дослідити найбільш раціональні пропорції між споживанням, інвестиціями у виробничий капітал та інвестиціями в охорону навколишнього середовища. В даній статті використаємо описану в [1] методологію для дослідження більш складної задачі, що додатково до зазначеного враховує ще один важливий фактор – інвестування інтелектуального капіталу.

Постановка задачі. Слідуючи роботі [1], введемо до розгляду функцію корисності $u = u(c, p)$, де c — обсяг споживання, p — обсяг забруднення.

Відносно функції u зробимо такі припущення:

$u(c, p)$ має частинні похідні другого порядку, причому

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} < 0, \quad \lim_{c \to 0} \frac{\partial u}{\partial c} = \infty; \tag{1}$$

зафіксуємо деяке число $S_0 > 0$ і нехай $p(c, S_0)$ є розв'язком рівняння $S(c, p) = S_0$, де $S = -\frac{\partial u}{\partial c} \Big/ \frac{\partial u}{\partial p}$ — гранична норма заміщення. Вважається, що $\lim_{c \to 0} p(c, S_0) = \infty, \quad \lim_{c \to \infty} p(c, S_0) = 0$, а також, що функція $p(c, S_0)$ монотонно спадає за аргументом c.

Прикладом описаної функції корисності може бути функція $u(c, p) = Ac^{\alpha} - Bp^{\beta}$, де $A > 0, B > 0, 0 < \alpha < 1, \beta > 1$.

Критерієм оптимальності в нашій моделі, як і в роботі [1], є інтеграл від функції корисності вздовж траєкторії $\{c(t), p(t)\}$ з врахуванням дисконтування:

$$W = \int_0^T u\big(c(t), p(t)\big) e^{-\delta t} dt. \tag{2}$$

Використаємо, як і в роботі [1], неокласичну однопродуктову двофакторну виробничу функцію:

$$Y = F(K, L).$$

Вважаємо, вироблена продукція Y використовується для споживання c, для інвестування виробничого капіталу K, для інвестування інтелектуального капіталу L, а також для охорони навколишнього середовища, що має забруднення p. При цьому інвестування фізичного капіталу йде як на розширення виробництва $\dot{K}$ ($\dot{K}$ — похідна за часом), так і на відновлення зношеного капіталу μK, що описується нормою амортизації $\mu > 0$. Інвестування інтелектуального капіталу йде як на розширення трудових ресурсів $\dot{L}$, так і на відновлення зношення інтелектуально активної частини трудових ресурсів $\nu\left(L - L_0\right) \geq 0$, де $L_0 = const$, а $\nu > 0$ — норма амортизації.

Слідуючи роботі [1], будемо вважати, що обсяг забруднення:

$$p = \varepsilon Y, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{3}$$

вимірюється в одиницях основної продукції. Також вважається, що частина відходів виробництва асимілюється середовищем з темпом $-\varphi\left(\varphi > 0\right)$, а при зменшенні забруднення на одну одиницю витрачається $1/r\ \left(r > 1\right)$ одиниць продукції.

Отже, задача управління полягає в належному виборі частин випуску, які використовуються на споживання $\left(\alpha Y\right)$, на інвестування інтелектуального капіталу $\left(\beta Y\right)$, на боротьбу з забрудненням $\left(\gamma Y\right)$ та на інвестування фізичного капіталу $\left(\left(1-\alpha-\beta-\gamma\right)Y\right)$.

Разом із функціоналом (2) маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\dot{K} = \left(1-\alpha-\beta-\gamma\right)F\left(K,L\right) - \mu K,\\
&\dot{L} = \beta F\left(K,L\right) - \nu\left(L - L_0\right),\\
&\dot{p} = \left(\varepsilon - r\gamma\right)F\left(K,L\right) - \varphi p,\\
&c = \alpha F\left(K,L\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

де $0 \leq \alpha(t) \leq 1, \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1, \quad 0 \leq \gamma(t) \leq 1, \quad 0 \leq \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) \leq 1$.

Таким чином, мова йде про оптимальний вибір керувань $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$.

Результати дослідження. Для розв'язання поставленої задачі оптимального управління використаємо принцип максимуму Понтрягіна. Для цього введемо спряжені змінні ψ_1, ψ_2, ψ_3 («тіньові» ціни або об'єктивно зумовлені оцінки основного капіталу $K\left(t\right)$, інтелектуального капіталу $L(t)$ та забруднення $p\left(t\right)$, відповідно).

Введемо замість ψ_1, ψ_2, ψ_3 нові змінні $q_1 = \psi_1 e^{\delta t}, q_2 = \psi_2 e^{\delta t}, q_3 = \psi_3 e^{\delta t}$. В цих змінних гамільтоніан запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
H = e^{-\delta t}[&u\left(\alpha F\left(K,L\right), p\right) + q_1\left(\left(1-\alpha-\beta-\gamma\right)F\left(K,L\right) - \mu K\right) + q_2\left(\beta F\left(K,L\right) - \nu\left(L-L_0\right)\right) +\\
&q_3\left(\left(\varepsilon - r\gamma\right)F\left(K,L\right) - \varphi p\right)],
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
H = e^{-\delta t}[&u\left(\alpha F\left(K,L\right), p\right) - q_1 \alpha F\left(K,L\right) - \left(q_1 - q_2\right)\beta F\left(K,L\right) -\\
&-\left(q_1 + q_3 r\right)\gamma F\left(K,L\right) + q_1\left[F\left(K,L\right) - \mu K\right] - q_2 \nu\left(L - L_0\right) +\\
&q_3\left(\varepsilon F\left(K,L\right) - \varphi p\right)].
\end{aligned} \tag{5}$$

Згідно з принципом максимуму, оптимальні управління $\alpha(t), \beta(t), \gamma\left(t\right)$ надають максимального значення гамільтоніану H, а функції $q_1(t), q_2(t), q_3\left(t\right)$ є розв'язками такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_1 = -\alpha\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial F}{\partial K} + q_1\left[\delta + \mu - \left(1-\alpha-\beta-\gamma\right)\frac{\partial F}{\partial K}\right] - q_2\beta\frac{\partial F}{\partial K} + q_3\left(r\gamma - \varepsilon\right)\frac{\partial F}{\partial K},\\
&\dot{q}_2 = -\alpha\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial F}{\partial L} - q_1\left(1-\alpha-\beta-\gamma\right)\frac{\partial F}{\partial L} + q_2\left(\delta + \nu - \beta\frac{\partial F}{\partial L}\right) + q_3\left(r\gamma - \varepsilon\right)\frac{\partial F}{\partial L},\\
&\dot{q}_3 = -\frac{\partial u}{\partial p} + q_3\left(\delta + \varphi\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

З виразу (5) бачимо, що функціонал H набуває максимального значення по α,β,γ разом з функцією:

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=v(\alpha)+\theta\beta+\omega\gamma, \quad (7)$$

де $v(\alpha)=u(\alpha F(K,L),p)-q_1\alpha F(K,L),\quad \theta=-(q_1-q_2)F(K,L),\ \omega=-(q_1+q_3r)F(K,L)$.

При цьому α,β,γ змінюються в одиничному симплексі:

$$\Delta=\{(\alpha,\beta,\gamma):\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0,\alpha+\beta+\gamma\leq 1\}.$$

Аналіз виразу (7) приводить до висновку щодо $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$:

1) якщо $\theta>0$ або $\omega>0$, то $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$ досягається при $\alpha+\beta+\gamma=1$;

2) якщо $\theta<0$, то $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$ досягається при $\beta=0$;

3) якщо $\omega<0$, то $\max\limits_{\Delta} h(\alpha,\beta,\gamma)$ досягається при $\gamma=0$;

4) якщо ж $\theta=0$ та $\omega=0$, то $\beta\in[0,1]$ та $\gamma\in[0,1]$ довільні, а α або дорівнює *1*, або є коренем рівняння $v'(\alpha)=0$.

Повний аналіз оптимальних траєкторій даної моделі провести досить складно. Тому, слідуючи роботі [1], дослідимо стани рівноваги або траєкторії збалансованого зростання, які задовольняють необхідним умовам оптимальності.

Стани рівноваги (стаціонарні розв’язки) знаходимо з умов $\dot{K}=0,\dot{L}=0,\dot{p}=0$, тобто:

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha-\beta-\gamma)F(K,L)-\mu K=0,\\
&\beta F(K,L)-\nu(L-L_0)=0,\\
&(\varepsilon-r\gamma)F(K,L)-\varphi p=0.
\end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки $F,K,\mu>0$, то з першого рівняння системи (8) одержуємо: сума $\alpha+\beta+\gamma$ є сталою і $\alpha+\beta+\gamma<1$. Отже, $\alpha<1,\beta<1,\gamma<1$ і можуть виконуватись лише випадки 2), 3) або 4). Друге рівняння системи (8) дозволяє зробити висновок: в точці рівноваги або $\beta=0$ і $L^*=L_0$, або $L^*>L_0$ і $\beta>0$ є сталою величиною. Третє рівняння системи (8) дозволяє зробити висновок, що γ є сталою величиною, причому $\gamma<\varepsilon/r$, де $r>1,\varepsilon<1$. Отже, з системи (8) випливає, що α,β і γ є сталими величинами. І оскільки $\alpha<1$, то у випадку 4) будемо мати $v'(\alpha)=0$ або $\dfrac{\partial}{\partial c}u(\alpha F(K,L))=q_1$, а, отже, $q_1(t)=\dfrac{\partial u}{\partial c}=const$.

З урахуванням останнього система диференціальних рівнянь (6) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
&0=\frac{\partial u}{\partial c}\left[\delta+\mu-(1-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial K}\right]-q_2\beta\frac{\partial F}{\partial K}+q_3(r\gamma-\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K},\\
&\dot{q}_2=-\frac{\partial u}{\partial c}(1-\beta-\gamma)\frac{\partial F}{\partial L}+q_2\left(\delta+\nu-\beta\frac{\partial F}{\partial L}\right)+q_3(r\gamma-\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial L},\\
&\dot{q}_3=-\frac{\partial u}{\partial p}+q_3(\delta+\varphi).
\end{aligned} \quad (9)$$

З цієї системи одержуємо ізольовані диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_2=-\frac{\partial u}{\partial c}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\Big/\frac{\partial F}{\partial K}\right)(\delta+\mu)+q_2(\delta+\nu),\\
&\dot{q}_3=-\frac{\partial u}{\partial p}+q_3(\delta+\varphi).
\end{aligned} \quad (10)$$

З усіх можливих випадків детально зупинимось лише на двох.

1. Випадок $\theta=0,\omega=0$. Це, за визначенням роботи [1], рівновага «золотого віку», коли здійснюються витрати як на споживання, так і на інвестування у фізичний та інтеле-

ктуальний капітали, а також на очищення навколишнього середовища ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$). Відповідний стан рівноваги $\left(K^*, L^*, p^*\right)$ характеризується помірними рівнями капіталів, споживання та забруднення.

При $\theta = 0$ маємо $q_1 = q_2$, а при $\omega = 0$ маємо $q_3 = -\frac{q_1}{r}$, тобто q_1, q_2 і q_3 є сталими величинами. Тоді з (10) отримуємо:

$$q_1 = \frac{\partial u}{\partial c}, q_2 = \frac{\partial u}{\partial c}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\Big/\frac{\partial F}{\partial K}\right)\frac{\delta + \mu}{\delta + \nu}, q_3 = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{1}{\delta + \varphi}.$$

Перше рівняння з (9) можна записати у вигляді:

$$q_1\left(\delta + \mu - \frac{\partial F}{\partial K} + \beta\frac{\partial F}{\partial K} + \gamma\frac{\partial F}{\partial K}\right) - q_2\beta\frac{\partial F}{\partial K} - q_3\left(\varepsilon - r\gamma\right)\frac{\partial F}{\partial K} = 0.$$

Після підстановки в це рівняння $q_2 = q_1$ та $q_3 = -\frac{q_1}{r}$ одержуємо:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\delta + \mu}{1 - \varepsilon/r}. \tag{11}$$

З умови $\dot{q}_2 = 0$ на підставі (10) виводимо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\delta + \nu}{1 - \varepsilon/r} \tag{12}$$

З умови $\dot{q}_3 = 0$ на підставі (10) виводимо:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\delta + \nu}{r}\frac{\partial u}{\partial c}. \tag{13}$$

З системи (8) виключаємо β та γ, що дає:

$$\alpha r F\left(K, L\right) = \varphi p - \mu r K - \nu r\left(L - L_0\right) + \left(r - \varepsilon\right)F\left(K, L\right),$$

а оскільки $c = \alpha F\left(K, L\right)$, то маємо:

$$rc = \varphi p - \mu r K - \nu r\left(L - L_0\right) + \left(r - \varepsilon\right)F\left(K, L\right). \tag{14}$$

Система рівнянь (11), (12) дозволяє визначити рівноважні значення K^* та L^*, а система рівнянь (13), (14) при $K = K^*, L = L^*$ дозволяє визначити c^* та p^*. Після чого легко знаходяться значення α^*, β^* та γ^*.

Вивчимо питання стійкості стану рівноваги «золотого віку» $\left(K^*, L^*, p^*\right)$, які є додатніми розв'язками системи (8). Шукані $K^* > 0, L^* > L_0, p^* > 0$ існують, якщо $\alpha + \beta + \gamma < 1, \beta > 0, \gamma < \varepsilon/r$.

Оскільки $F\left(K, L\right)$ є неокласичною виробничою функцією, то вона володіє властивістю лінійної однорідності:

$$F\left(K, L\right) = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L.$$

В точці $\left(K^*, L^*\right)$ згідно (11), (12) маємо:

$$F\left(K^*, L^*\right) = \frac{1}{1 - \varepsilon/r}\left[\left(\delta + \mu\right)K^* + \left(\delta + \nu\right)L^*\right].$$

Тоді характеристичне рівняння, що відповідає системі диференціальних рівнянь (4) в околі нерухомої точки $\left(K^*, L^*, p^*\right)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \frac{1-\alpha-\beta-\gamma}{1-\varepsilon/r}(\delta+\mu)-\mu-\lambda & \frac{1-\alpha-\beta-\gamma}{1-\varepsilon/r}(\delta+\nu) & 0 \\ \frac{\beta}{1-\varepsilon/r}(\delta+\mu) & \frac{\beta}{1-\varepsilon/r}(\delta+\nu)-\nu-\lambda & 0 \\ \frac{\varepsilon-r\gamma}{1-\varepsilon/r}(\delta+\mu) & \frac{\varepsilon-r\gamma}{1-\varepsilon/r}(\delta+\nu) & -\varphi-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (15)$$

Дослідження випадку $\delta=0$ показують, що корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння (15) задовольняють системі:

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{1}{1-\varepsilon/r}\left[(\alpha+\beta-\varepsilon/r)\mu+(1-\beta-\varepsilon/r)\nu\right], \quad \lambda_1\lambda_2=\frac{1-\alpha-\gamma}{1-\varepsilon/r}\mu\nu>0.$$

Таким чином, у випадку $\delta=0$ достатніми умовами асимптотичної стійкості нерухомої точки $\left(K^*, L^*, p^*\right)$ є умови $\alpha+\beta>\varepsilon/r, 1-\beta>\varepsilon/r$, які разом з умовою її існування $\gamma<\varepsilon/r$ утворюють множину параметрів стійкості.

2. Цей випадок за термінологією роботи [1] можна назвати рівновагою «темного віку». Тепер $\theta<0$ та $\omega<0$, а тому $\beta=0$ та $\gamma=0$. Отже, ніяких витрат на інвестування інтелектуального капіталу та на боротьбу з забрудненням не здійснюється. Такий стан характеризується високим рівнем виробництва (великий обсяг фізичного капіталу), високим рівнем споживання, але й дуже високим рівнем забруднення. Рівень інтелектуальної праці нульовий ($L^{**}=L_0$), а рівень забруднення регулюється лише природними процесами із заданим темпом зниження $\varphi=-\dot{p}/p$.

Комбінуючи перше та третє рівняння системи (9) при умові, що $\beta=0, \gamma=0, \dot{q}_3=0$, знаходимо, що в точці рівноваги $\left(K^{**}, L_0\right)$ маємо умову:

$$\frac{\partial F}{\partial K}=(\delta+\mu)\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta+\varphi}\frac{\partial u/\partial p}{\partial u/\partial c}\right)^{-1}.$$

Отже, стан рівноваги «темного віку» знаходимо з системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial K}F(K,L_0)=(\delta+\mu)\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta+\varphi}\frac{\partial u/\partial p}{\partial u/\partial c}\right)^{-1}, \\ &p=\frac{\varepsilon}{\varphi}F(K,L_0), \\ &c=F(K,L_0)-\mu K. \end{aligned} \qquad (16)$$

Висновок. Таким чином, в роботі побудована нова модель оптимального управління, що враховує інвестиції у виробничі фонди, в інтелектуальний капітал та в охорону навколишнього середовища. Досліджені два важливі стани рівноваги, що задовольняють необхідні умови оптимальності. Дана модель може бути використана для стратегічного планування еколого-економічного розвитку країни.

Література

1. Keeler E. The optimal control of pollution / E. Keeler, M. Spence, R. Zeckhauser // Journal of Economic Theory. — 1972. — Vol. 4. — P. 13–34.
2. Барро Дж. Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.
3. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці / В. С. Григорків. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. — 200 с.
4. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка : навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К. : Вища школа, 2004. — 207 с.