УДК 517.956
ББК В 146

Галина Михайловна Яковлева
старший преподаватель,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: y.g.m@mail.ru

О решении краевых задач для уравнения Лапласа на кусочно-однородной плоскости с двумя параллельными трещинами[1]

Рассмотрены краевые задачи в полуплоскости и полосе с двумя сильно проницаемыми трещинами, перпендикулярными границам областей. Решения указанных задач выражены через решения аналогичных краевых задач в однородных областях без трещин.

Ключевые слова: краевые задачи, кусочно-однородные области, сильно проницаемые плёнки, метод свёртывания разложений Фурье.

Galina Mikhailovna Yakovleva
Senior Lecturer,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: y.g.m@mail.ru

On Solution of Boundary-Value Problems for Laplace's Equation on a Piecewise-Homogeneous Plane with Two Parallel Cracks

Boundary value problems in the half-plane and strip with two highly permeable cracks perpendicular to the borders of the regions are considered. Solutions of these problems are expressed via the solution of similar boundary value problems in homogeneous areas without cracks.

Keywords: boundary value problems, piecewise-homogeneous areas, highly permeable film, method of convolution of Fourier expansions.

Статья является продолжением работы автора [1], в которой выведены общие формулы, выражающие особые точки потенциалов на кусочно-однородной анизотропной плоскости с двумя параллельными трещинами через особые точки гармонических функций. Другими словами, задавая гармоническую функцию на плоскости, по выведенным формулам получаем потенциалы на кусочно-однородной анизотропной плоскости с двумя трещинами при сохранении особых точек гармонической функции. В данной статье полученные формулы распространяются на решение краевых задач в кусочно-однородной изотропной полуплоскости и полосе с двумя трещинами.

Рассмотрим полуплоскость $y < 0$, состоящую из трёх однородных зон $D_1(x < 0), D_2(0 < x < l)$ и $D_3(x > l)$, когда зоны D_i разделены сильно проницаемыми плёнками типа трещин $x = 0$ и $x = l$ с одинаковым параметром A [2, 3], где x, y – декартовы координаты. Пусть проницаемости крайних зон D_1 и D_3 одинаковы и равны k_1, а проницаемость средней зоны D_2 равна k_2, т.е. в полуплоскости $y < 0$ имеет место включение в виде полосы D_2, окаймлённой трещинами.

Пусть на границе $y = 0$ заданы граничные условия первого рода, при этом рассмотрим случай однородных граничных условий в зонах D_2 и D_3. Отсюда для функций $u_i(x, y)$ в D_i задача имеет вид (см. [1]):

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{1|y=0} = h(x), \qquad u_{j|y=0} = 0, \qquad j = 2, 3, \tag{1}$$

$$x = 0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \tag{2}$$

$$x = l: \qquad u_3 = u_2, \qquad k_1 \partial_x u_3 - k_2 \partial_x u_2 = A \partial_x^2 u_2, \tag{3}$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, $h(x)$ – заданная непрерывная функция, Δ – оператор Лапласа.

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим аналогичную классическую задачу Дирихле в однородной полуплоскости $y<0$ без трещин:

$$\Delta f = 0, \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} h(x), & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}. \tag{4}$$

Отметим, что решение задачи Дирихле (1) строится по формуле Пуассона:

$$f(x,y) = -\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+y^2},$$

и для широкого класса граничных функций $h(x)$ последний интеграл вычисляется в конечном виде.

Покажем, что решение задачи (1)–(3) выражается через решение задачи Дирихле (4) по общим формулам, полученным в работе [1] методом свёртывания разложений Фурье [2, 3]:

$$u_1 = f(x,y) - f(-x,y) +$$

$$+\frac{2k_1}{A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}t^{2n}\left\{\partial_t^{2n}\left[e^{-\nu t}f(\xi_1,y)\right] + \frac{t}{2n+1}\partial_t^{2n+1}\left[e^{-\nu t}f(\xi_2,y)\right]\right\}dt, \tag{5}$$

$$u_2 = \frac{2k_1}{A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}t^{2n}\left\{\partial_t^{2n}\left[e^{-\nu t}f(\xi_3,y)\right] + \frac{t}{2n+1}\partial_t^{2n+1}\left[e^{-\nu t}f(\xi_2,y)\right]\right\}dt, \tag{6}$$

$$u_3 = \frac{4k_1k_2}{A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}t^{2n+1}\partial_t^{2n}\left[e^{-\nu t}f(\xi_3,y)\right]dt, \tag{7}$$

где $\xi_1 = -x+2nl+t$, $\xi_2 = -x+2nl+2l+t$, $\xi_3 = x+2nl+t$,

$$\nu = \frac{k_1-k_2}{A}, \qquad \delta = \frac{2k_2}{A},$$

при этом, как показано в работах [4, 5], интегралы (5)–(7) сходятся при достаточно слабом условии на поведение функции $f(x,y)$ в бесконечности вида

$$|\partial_x^k[e^{-\nu x}f(x,y)]| < c\alpha^k e^{\alpha x},$$

где $x\to+\infty$, $k=0,1,...$, $0<\alpha<\alpha_0$, $\alpha_0(1+e^{(\alpha_0+\nu)l}) = \delta$.

Действительно, выражения справа (5)–(7) являются операторами, действующими на функцию $f(x,y)$ по одной переменной x, при этом переменная y является свободной. Условия сопряжения (2), (3) также являются операторами, действующими на функции $f(x,y)$ по одной переменной x, при этом эти условия для функций (5)–(7) выполняются тождественно, что устанавливается интегрированием по частям. Уравнение Лапласа (1) для функций (5)–(7) выполняется, т.к. это уравнение выполняется для функции $f(\pm x,y)$.

Первые аргументы функции $f(x,y)$ в формулах (5)–(7), кроме первого слагаемого в формуле (5), положительны, причем для $x>0$ выполняется однородное граничное условие $f(x,0)\equiv 0$ (4). Первый аргумент в первом слагаемом формулы (5) отрицательный, при этом для $x<0$ выполняется граничное условие $f(x,0)=h(x)$. Отсюда граничные условия (1) для функций (5)–(7) выполняются.

Таким образом, решение задачи (1)–(3) на кусочно-однородной полуплоскости $y<0$ с двумя параллельными трещинами строится по формулам (5)–(7).

Формулы (5)–(7) являются универсальными в следующем смысле. По этим формулам аналогично вышеизложенному решаются краевые задачи первого, второго и третьего рода в полуплоскости $y < 0$ и полосе $D(x \in R, a < y < b)$. Так, если в формулах (5)–(7) функция $f(x, y)$ является решением краевой задачи в однородной полуплоскости $y < 0$ с граничным условием второго (третьего) рода, т.е.

$$\Delta f = 0, \qquad \partial_y f_{|y=0} = \begin{cases} h(x), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \qquad \left(\partial_y f + \gamma f_{|y=0} = \begin{cases} h(x), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \right), \tag{4}$$

то функции $u_i(x, y)$ (5)–(7) являются решением аналогичной задачи в кусочно-однородной полуплоскости, состоящей из зон D_i, с трещинами $x = 0$, $x = l$ вида

$$\Delta u_i = 0, \qquad \partial_y u_{1|y=0} = h(x), \qquad \partial u_{j|y=0} = 0, \qquad j = 2, 3,$$

$$\left(\partial_y u_1 + \gamma u_{1|y=0} = h(x), \qquad \partial_y u_j + \gamma u_{j|y=0} = 0, \qquad j = 2, 3 \right),$$

$$x = 0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1,$$

$$x = l: \qquad u_3 = u_2, \qquad k_1 \partial_x u_3 - k_2 \partial_x u_2 = A \partial_x^2 u_2,$$

$(\gamma = const > 0)$. Данное утверждение проверяется непосредственно.

Аналогично можно непосредственно показать, что если функция $f(x, y)$ является решением некоторой краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе $D(x \in R, a < y < b)$ с произвольной комбинацией граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода (однородных при $x > 0$ и неоднородных при $x < 0$), то функции (5)–(7) являются решением аналогичной задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородной полосе, состоящей из зон D_i, с трещинами $x = 0, x = l$ при сохранении граничных условий.

Список литературы

1. Яковлева Г. М. О построении особых точек потенциалов на кусочно-однородной анизотропной плоскости с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. 2012. Вып. 11. ЗабГУ. Чита. С. 50–58.

2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

4. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в цилиндрах с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. 2011. Вып. 10. ЗабГГПУ. Чита. С. 56–62.

5. Холодовский С. Е., Давиденко Г. М. О решении краевых задач в кусочно-однородных цилиндрах с двумя параллельными завесами // Учёные записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. Сер. «Физика, математика, техника, технология». 2012. № 3(44). Чита. С. 152–156.

References

1. Yakovleva G. M. O postroyenii osobykh tochek potentsialov na kusochno-odnorodnoy ploskosti s dvumya parallelnymi treshchinami // Matematichesky analiz i ego prilozheniya. 2012. Vyp. 11 Izd-vo ZabGU. Chita. S. 50–58.

2. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

3. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay obobshchennykh uslovy sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.

4. Kholodovsky S. Ye. O reshenii zadach v tsilindrakh s dvumya parallelnymi treshchinami // Matematichesky anliz i ego prilozhenii. 2011. Vyp. 10. ZabGGPU. Chita. S. 56–62.

5. Kholodovsky S. Ye., Davidenko G. M. O reshenii krayevykh zadach v kusochno-odnorodnykh tsilindrakh s dvumya parallelnymi zavesami // Uchyonye zapiski Zabaykalskogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta. Ser. «Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya». 2012. № 3(44). Chita. S. 152–156.

Статья поступила в редакцию 15.04.2013