УДК 517.982.43
ББК B161.911

Святослав Евгеньевич Холодовский
*доктор физико-математических наук,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru*
Алексей Олегович Потехо
*кандидат физико-математических наук,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: potehoao@rambler.ru*

Решение краевой задачи о движении полуограниченной струны с граничным условием третьего рода [1]

Рассмотрена краевая задача о движении полуограниченной струны со свободным концом, на который действует упругая сила, пропорциональная смещению (типа пружинки). С помощью метода свертывания разложений Фурье решение задачи выражено в явном виде через решение классической задачи Коши для неограниченной струны. В предельных случаях из полученных решений следуют решения классических задач для полуограниченной струны со свободным и закрепленным концом.

Ключевые слова: полуограниченная струна, волновое уравнение, упругий контакт, метод свёртывания разложений Фурье.

Svyatoslav Evgen'evich Kholodovskiy
*Doctor of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru*
Aleksey Olegovich Potekho
*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: potehoao@rambler.ru*

Solution of a Boundary Value Problem on Semi-Bounded String Motion with the Boundary Condition of the Third Kind

The paper considers the boundary problem of motion of semi-bounded string with the free end operated by an elastic force, which is proportional to the displacement of the spring type. With the help of the method of convolution of Fourier expansions, solution of the problem is expressed in explicit form by means of the classical Cauchy problem solution for an unbounded string. In limiting cases, the obtained solutions result in the solutions of classical problems for semi-bounded strings with a free and a fixed end point.

Keywords: semi-bounded string, wave equation, elastic contact, method of convolution of Fourier expansions.

В работе рассматривается задача о движении полуограниченной струны в виде луча $0 < x < \infty$ с граничным условием третьего рода, что соответствует упругому контакту на конце струны $x = 0$. Решение данной задачи выражено через решение классической задачи Коши. Для вывода общих формул сначала рассамтривается вспомогательная задача, допускающая применение метода свёртывания разложений Фурье. При этом полученная формула даёт решение целого класса краевых задач с граничными условиями третьего рода. В частности решение исходной задачи о струне также строится по выведенной формуле. Отметим, что непосредственно метод свёртывания разложений Фурье к исходной задаче о струне неприменим.

Рассмотрим вспомогательную третью краевую задачу в полуплоскости $x \geq 0$ вида

$$\Delta u = H(x, y), \qquad \partial_x u - \gamma u_{|x=0} = 0, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена в рамках Uосударственного задания вузу Минобрнауки РФ (код проекта 1.3985.2011).

© Холодовский С. Е., Потехо А. О., 2013

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, Δ – оператор Лапласа, $\gamma = const > 0$, $H(x, y)$ – заданная непрерывная функция; x, y – декартовы координаты. Наряду с этой задачей рассмотрим на всей плоскости x, y классическую задачу

$$\Delta f = \begin{cases} H(x,y), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \tag{2}$$

при соответствующем условии на ∞, обеспечивающем корректность задачи (2). В частности, $f(x, y)$ является гармонической функцией, особые точки которой расположены в полуплоскости $x > 0$.

С помощью метода свёртывания разложений Фурье [1; 2] выразим решение задачи (1) через решение $f(x, y)$ классической задачи (2).

Пусть функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье:

$$f(0,y) = \int\limits_0^\infty g(y,\lambda)d\lambda, \qquad g(y,\lambda) = f_1(\lambda)\sin\lambda y + f_2(\lambda)\cos\lambda y, \tag{3}$$

где

$$f_{(1/2)}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(0,y)\begin{pmatrix} \sin\lambda y \\ \cos\lambda y \end{pmatrix} dy.$$

Отсюда функция $f(x, y)$ при $x < 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (2), представима в виде

$$f(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} g(y,\lambda)d\lambda, \qquad x \le 0. \tag{4}$$

Последняя формула выражает решение задачи Дирихле в полуплоскости $x < 0$ вида $\Delta v = 0$, $v_{|x=0} = f(0, y)$, полученное методом Фурье. Представляя решение задачи (1) в виде

$$u(x,y) = f(x,y) + \int\limits_0^\infty a e^{-\lambda x} g d\lambda, \qquad x \ge 0, \tag{5}$$

из граничного условия (1) получим

$$a(\lambda) = 1 - \frac{2\gamma}{\lambda + \gamma}.$$

Отсюда функция (5) с учётом (4) примет вид

$$u = f(x,y) + f(-x,y) - 2\gamma\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda+\gamma} d\lambda, \qquad x \ge 0, \tag{6}$$

где функция $g(y, \lambda)$ определена в (3). Из разложения (4) следует формула [1; 2]:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(x-z,y)dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda+\gamma}\, d\lambda, \qquad x \le 0, \qquad \gamma > 0.$$

Отсюда решение (6) задачи (1) выражается непосредственно через решение классической задачи (2) без разложений Фурье:

$$u(x,y) = f(x,y) + f(-x,y) - 2\gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(-x-z,y)dz, \qquad x \geq 0. \tag{7}$$

Интеграл (7) сходится для широкого класса функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x,y)| < O(e^{\alpha|x|}), \qquad x \to -\infty, \qquad \alpha < \gamma.$$

Отметим, что выражение справа (7) является оператором, действующим на функцию $f(x,y)$ по одной переменной x (переменная y остаётся свободной). При этом функция $u(x,y)$ тождественно удовлетворяет граничному условию (1) для любой дифференцируемой функции $f(x,y)$. Отсюда по переменной y для функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ можно изменить уравнение и задать дополнительные краевые условия.

Рассмотрим для функции $u(x,t)$ краевую задачу на луче $0 < x < \infty$ для волнового уравнения с сохранением граничного условия (1):

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = H(x,t), \qquad u_{|t=0} = \varphi(x), \qquad \partial_t u_{|t=0} = \psi(x), \tag{8}$$

$$\partial_x u - \gamma u_{|x=0} = 0, \tag{9}$$

где

$$\gamma = \frac{B}{k} = const > 0, \tag{10}$$

$H(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции, $t \geq 0$ – время. Задача (8), (9) описывает движение полуограниченной струны со свободным концом при упругом контакте, т.е. на конце $x = 0$ имеет место пружинка с жёсткостью B. При этом в точке $x = 0$ (на левом конце) действует сила натяжения, пропорциональная смещению $k\partial_x u = Bu$ [3].

Непосредственно проверяется, что решение задачи (8), (9) строится по формуле (7):

$$u(x,t) = f(x,t) + f(-x,t) - 2\gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(-x-z,t)dz, \qquad x \geq 0, \tag{11}$$

где $f(x,t)$ – решение классической задачи Коши при $-\infty < x < \infty$ вида

$$\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = \begin{cases} H(x,t), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$f_{|t=0} = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \qquad \partial_t f_{|t=0} = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Из формулы (11) в предельном случае $B \to 0$ (10), когда сила возврата пружинки бесконечно мала, находим $u = f(x,t) + f(-x,t)$, что соответствует классическому случаю свободного конца $x = 0$ для полуограниченной струны без пружинки. В случае $B \to \infty$, когда сила возврата пружинки бесконечно большая, из формулы (11) с помощью интегрирования по частям получим $u = f(x,t) - f(-x,t)$, что соответствует движению полуограниченной струны с неподвижным концом $x = 0$.

В качестве примера рассмотрим задачу (8), (9) для заданных функций вида

$$H(x,t)=0, \qquad \varphi(x)=\begin{cases}2h(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}, \qquad \psi(x)=0, \tag{12}$$

где $a>0$, $3a>b$, $h(x)\geq 0$, $h(a)=h(b)=0$. Отсюда решение задачи (8), (9) строится по формуле (11), где функция $f(x,t)$ определяется формулой Даламбера [3]:

$$f(x,t)=\begin{cases}h(x+t), & a-t<x<b-t\\ h(x-t), & a+t<x<b+t\end{cases}, \tag{13}$$

$f(x,t)=0$ в остальных точках x.

Для моментов времени $0<t<a$, когда обратная волна $h(x+t)$ не доходит до точки $x=0$, из формулы (11) следует $u=f(x,t)$, где $f(x,t)$ имеет вид (13). Далее рассматривается движение струны в окрестности конца $x=0$, при этом слагаемое $h(x-t)$, характеризующее прямую волну, которая уходит вправо и не пересекает точку $x=0$, будем опускать.

Для моментов времени $a<t<(a+b)/2$, $(a+b)/2<t<b$, $t>b$ функция $u(x,t)$ (11), (13) имеет соответственно вид

$$u=\begin{cases}h(x+t)+h(t-x)-\Phi(t-x), & 0<x<t-a\\ h(x+t), & t-a<x<b-t\end{cases}; \tag{14}$$

$$u=\begin{cases}h(x+t)+h(t-x)-\Phi(t-x), & 0<x<b-t\\ h(t-x)-\Phi(t-x), & b-t<x<t-a\end{cases}; \tag{15}$$

$$u=\begin{cases}-e^{\gamma(x-t)}c, & 0<x<t-b\\ h(t-x)-\Phi(t-x), & t-b<x<t-a\end{cases}, \tag{16}$$

где

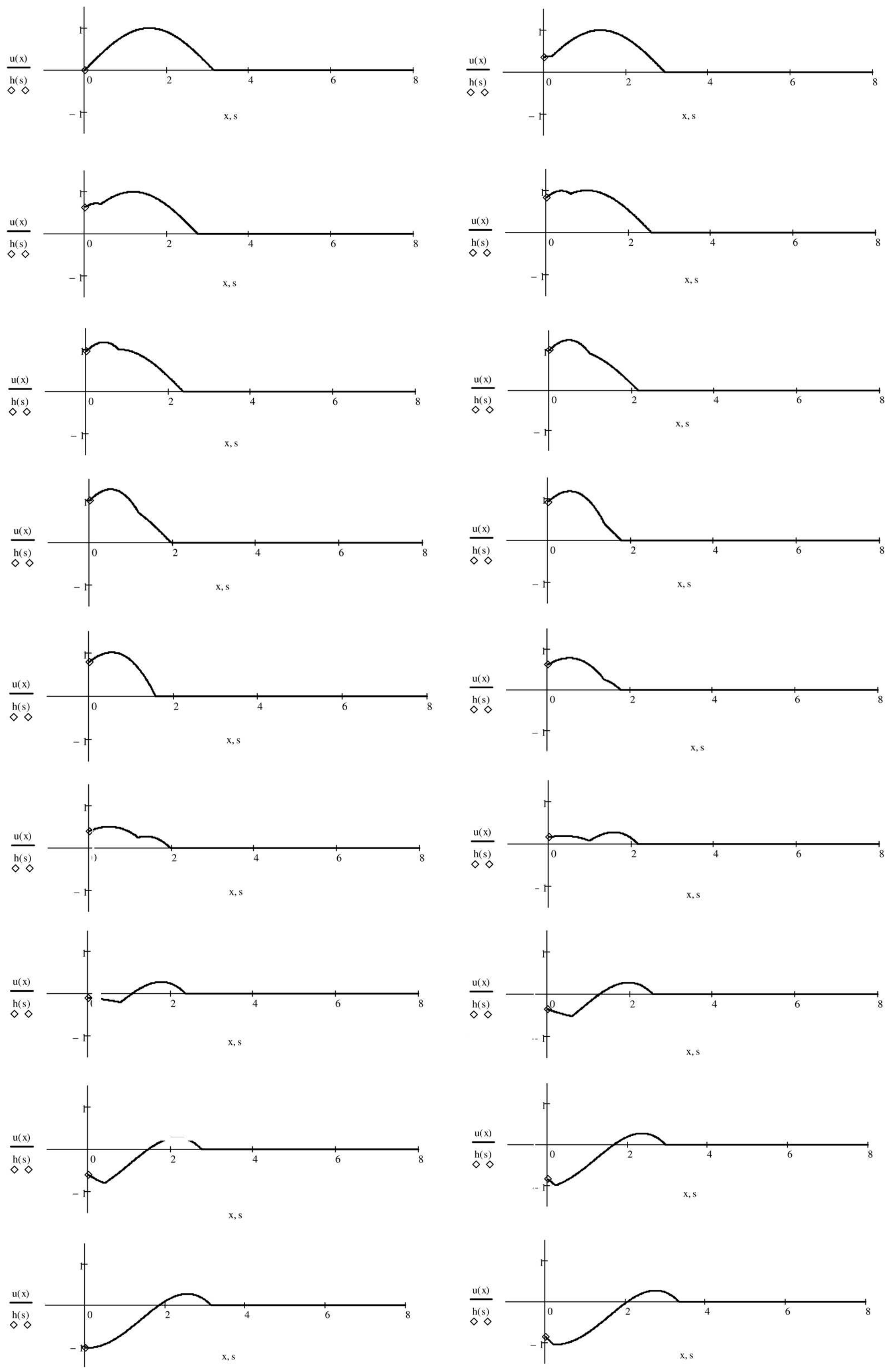
$$\Phi(x)=2\gamma e^{-\gamma x}\int\limits_a^x e^{\gamma z}h(z)dz, \qquad c=2\gamma\int\limits_a^b e^{\gamma z}h(z)dz. \tag{17}$$

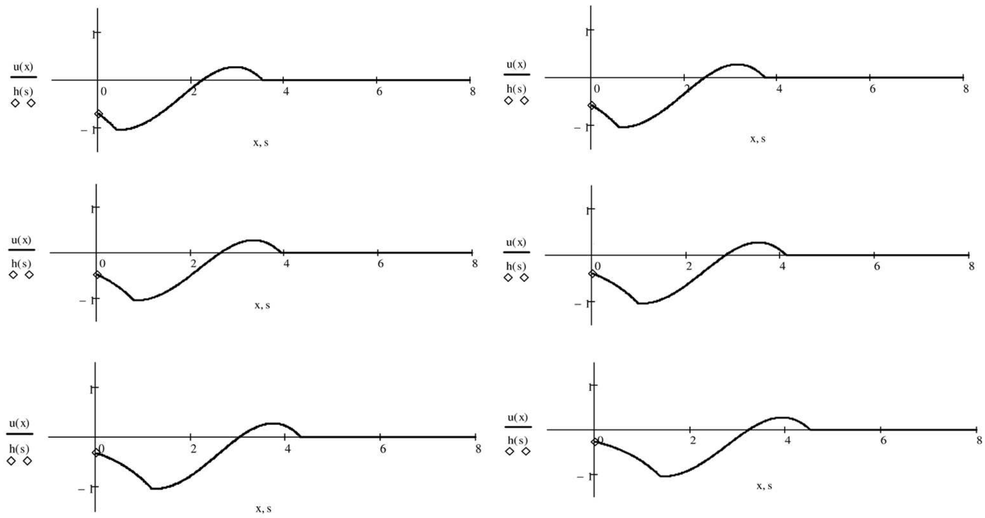
Закон движения конца струны $x=0$ описывается функцией

$$u(0,t)=\begin{cases}0, & 0<t<a\\ 2h(t)-\Phi(t), & a<t<b\\ -e^{-\gamma t}c, & t>b\end{cases},$$

где $\Phi(x)$ и c имеют вид (17). Отсюда точка $x=0$ до момента времени $t=a$ остается в покое. В промежутке времени $t\in(a,b)$ конец струны достигает максимального положительного, затем минимального отрицательного отклонения и при $t\to\infty$ экспоненциально стремится к нулю.

В качестве примера рассмотрим начальную функцию $h(x)=\sin x$ (12) при $a=2\pi$, $b=3\pi$, $\gamma=1$. Решение задачи (8), (9) строится в конечном виде по формулам (14)–(16), где $\Phi(x)=\sin x-\cos x+e^{2\pi-x}$, $c=e^{3\pi}+e^{2\pi}$. Ниже приведены графики струны в окрестности точки $x=0$ в моменты времени от $t=2\pi$ (когда обратная волна подходит к точке $x=0$) до $t=\frac{55}{16}\pi$ с шагом $\Delta t=\frac{1}{16}\pi$.


u(x)
h(s)
x, s
0
2
4
6
8



Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

2. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

References

1. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay obobshchyonnykh uslovy sopryazheniya tipa treshchin (zavesy)v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differents. uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.

2. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay treshchin (zavesy)v kusochno-neodnorodnom prostranstvakh // Differents. uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

3. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972.

Статья поступила в редакцию 10.03.2013