УДК 532.5
ББК В253.31/32

Владимир Александрович Толпаев
доктор физико-математических наук, профессор,
Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов
(Ставрополь, Россия), e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Ирина Анатольевна Евенко
старший преподаватель,
Ставропольский институт кооперации (филиал)
Белгородского университета кооперации, экономики и права
(Ставрополь, Россия) e-mail: irina.evenko@mail.ru

Математические модели плоскорадиальной фильтрации газа по закону Форхгеймера к вертикальной скважине

В статье дается вывод уравнения для исследования нестационарного плоскорадиального притока газа по закону Форхгеймера с целью его дальнейшего применения для обработки данных кривых восстановления давления и кривых падения давления, по которым можно значительно точнее по сравнению со стационарными исследованиями определить пластовое давление в зоне дренирования скважины.

Ключевые слова: скважина, зона дренирования, обработка данных газогидродинамических исследований, плоскорадиальный приток газа, линейный закон Дарси, закон Форхгеймера, кривые восстановления давления, кривые падения давления.

Vladimir Aleksandrovich Tolpaev
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
North-Caucasian Research Planning Institute of Natural Gases
(Stavropol, Russia)б e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Irina Anatol'evna Evenko
Senior Lecturer,
Stavropol Institute of Cooperation, Branch of
Belgorod University of Cooperation, Economics and Law
(Stavropol, Russia) e-mail: irina.evenko@mail.ru

Mathematical Models of Flat-Radial Gas Filtration by the Forchheimer Law to a Vertical Well

The article provides derivation of an equation for the study of unsteady flat-radial gas discharge according to the Forchheimer law for the purpose of its further application with the data on pressure recovery curves and pressure drop curves. They can more accurately determine reservoir pressure in the drainage area of the well as compared with the stationary studies.

Keywords: well, drainage area, data processing of gas-hydrodynamic studies, flat-radial gas discharge, Darcy's linear law , Forchheimer law, pressure recovery curves, pressure drop curves.

Введение. На сегодняшний день стандартная методика обработки данных газогидродинамических исследований (ГДИ) скважин базируется на решениях стационарных и нестационарных задач о плоскорадиальном притоке газа к вертикальной скважине, когда фильтрация подчиняется линейному закону Дарси, а при решении нестационарного уравнения применяется линеаризация Лейбензона. В действительности в призабойной зоне пласта (ПЗП) фильтрация газа подчиняется двучленному закону Форхгеймера [1], однако двучленное уравнение применяется лишь для обработки данных ГДИ на установившихся режимах. В статье дается вывод уравнения для исследования нестационарного плоскорадиального притока газа по закону Форхгеймера с целью его дальнейшего применения для обработки данных кривых восстановления давления и кривых падения давления, по которым можно значительно точнее по сравнению со стационарными исследованиями определить пластовое давление в зоне дренирования скважины.

1. Вывод основного уравнения плоскорадиальной фильтрации газа по закону Форхгеймера к вертикальной скважине. Математические модели нестационарных плоскорадиальных притоков газа по закону Форхгеймера [1] (говорят также, по двухчленному закону фильтрации) к совершенной вертикальной скважине для однородной призабойной зоны пласта описываются системой уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}[\rho v(r,t)] + \frac{\rho v(r,t)}{r} = m\frac{\partial \rho}{\partial t},\\ \beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}v^2(r,t) + \frac{\mu v(r,t)}{k} = \frac{\partial P(r,t)}{\partial r},\\ \rho = \rho_{am}\zeta\frac{P}{P_{am}}, \qquad \zeta = \frac{Z_{am}T_{am}}{Z_{пл}T_{пл}}.\end{gathered} \tag{1}$$

В системе уравнений (1): r – расстояние от оси скважины до точки наблюдения; t – время; $P(r,t)$ – давление газа в пласте; $\rho(r,t)$ – плотность газа в пластовых условиях; ρ_{am} – плотность газа при нормальном атмосферном давлении; P_{am} и стандартной атмосферной температуре T_{am}; $v(r,t)$, – скорость фильтрации; k – проницаемость пласта; m – пористость, β – безразмерная характеристика шероховатости и извилистости порового пространства пласта; μ – коэффициент динамической вязкости газа в пластовых условиях; $Z_{am} = Z(P_{am}, T_{am})$, $Z_{пл} = Z(P_{пл}, T_{пл})$ – коэффициенты сверхсжимаемости газа при пластовых и нормальных атмосферных условиях.

Первое уравнение в системе (1) представляет собой математическое выражение закона сохранения массы фильтрующегося газа; второе – динамическое уравнение движения (закон Форхгеймера); третье – уравнение состояния реального газа. Заметим, что для идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$\rho = \frac{\rho_{am}P}{P_{am}}, \tag{2}$$

то есть для идеального газа коэффициент $\zeta = 1$. Поэтому в дальнейших выкладках, исходя из соображений сокращения объемов записи формул, будем применять без ограничения общности уравнение состояния газа в виде (2). Там, где понадобится произвести расчёт для реального газа, нужно заменить плотность ρ_{am} произведением $\rho_{am}\zeta$.

Приступим к выводу основного уравнения. Из второго уравнения системы (1), которое перепишем в виде квадратного уравнения относительно $v(r,t)$, найдём

$$\rho v(r,t) = \frac{\mu}{2\beta\sqrt{k}}\left(\sqrt{1 + \frac{4\beta k\rho\sqrt{k}}{\mu^2}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}} - 1\right). \tag{3}$$

Отсюда, учитывая уравнения состояния (2) и вводя функцию Лейбензона $\Phi(r,t) = P^2(r,t)$, получим

$$\rho v(r,t) = \frac{\mu}{2\beta\sqrt{k}}\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}} - 1\right). \tag{4}$$

Подставляя (4) в первое уравнение системы (1), с учётом уравнения (2), найдём

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}}\right) + \frac{1}{r}\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}} - 1\right) = \\ = \frac{m\beta\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu P_{am}\sqrt{\Phi(r,t)}}\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t}. \tag{5}$$

Уравнения (5), и есть основное уравнение нестационарного плоскорадиального притока газа к вертикальной скважине.

2. Преобразование основного уравнения плоскорадиальной фильтрации газа. Выполняя дифференцирование первого слагаемого в левой части уравнения (5), с учётом

$$\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}}-1=\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}\left(\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}}+1\right)^{-1}$$

уравнение (5) приведём к виду

$$\frac{\partial^2\Phi(r,t)}{\partial r^2}+\frac{F_1[\Phi(r,t)]}{r}\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}=\frac{m\mu}{k\sqrt{\Phi(r,t)}}F_2[\Phi(r,t)]\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial t}, \tag{6}$$

где $F_1[\Phi(r,t)]$ и $F_2[\Phi(r,t)]$ – две безразмерные функции, определяемые равенствами

$$F_1[\Phi]=2\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}}\left(\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}}+1\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$F_2[\Phi]=\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}}. \tag{8}$$

Поскольку, как легко видеть, $F_{1,2}[\Phi]\to 1$ при $\beta\to 0$, то в пределе, когда двучленный закон фильтрации газа переходит в закон Дарси, из (6) получаем хорошо известное уравнение нестационарного плоскорадиального притока газа к вертикальной скважине по закону Дарси.

3. Точное стационарное решение задачи о плоскорадиальном притоке газа по закону Форхгеймера к вертикальной скважине. Уравнение стационарного плоскорадиального притока газа (6) примет вид

$$\frac{d\Psi(r)}{dr}+\frac{1}{r}[\Psi(r)-1]=0,$$

где

$$\Psi(r)=\sqrt{1+\frac{2\beta k\rho_{am}\sqrt{k}}{\mu^2 P_{am}}\frac{d\Phi(r)}{dr}}.$$

Опуская элементарные выкладки, запишем точное решение стационарной задачи:

$$\Phi(r)-\Phi_3=AQ\frac{\ln(r/r_c)}{\ln(R/r_c)}+BQ^2\frac{(r-r_c)R}{(R-r_c)r}, \tag{9}$$

где

$$A=\frac{\mu P_{am}}{\pi bk}\ln(R/r_c),\qquad B=\frac{\beta\rho_{am}P_{am}}{2\pi^2b^2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{R}\right)\cong\frac{\beta\rho_{am}P_{am}}{2\pi^2b^2r_c\sqrt{k}},$$

R – радиус контура питания, r_c – радиус скважины (радиус долота, вскрывшего пласт), а на этих круговых границах области фильтрации задаются значения давления, т. е. значения функции Лейбензона $\Phi(r_c)=\Phi_3=P_3^2$ и $\Phi(R)=\Phi_n=P_n^2$. Подставляя в (9) значение $r=R$, получим следующее хорошо известное в литературе уравнение для расчета дебита Q скважины:

$$P_n^2-P_3^2=AQ+BQ^2. \tag{10}$$

4. Упрощённая форма основного уравнения второй базовой модели. Математические модели нестационарных плоскорадиальных притоков газа по закону Форхгеймера к вертикальной скважине для однородной призабойной зоны пласта описываются решениями весьма сложного для аналитического и численного решения уравнения (5) и его модификацией (6). Для преобразования уравнения (6) будем опираться на следующие свойства его стационарного решения (9). Первое свойство стационарного решения (9) показывает, что во всей области фильтрации (за исключением кольца между контуром скважины и окружностью с радиусом $r \cong (10 \div 50)r_c$) можно считать $\sqrt{\Phi(r)} \cong P_{пл}$. Второе свойство стационарного решения (9) заключается в том, что

$$F_1[\Phi(r)] = 1 + \frac{C}{2r + C}, \qquad F_2[\Phi(r)] = 1 + \frac{C}{r},$$

где

$$C = \frac{\rho_{am} Q \beta \sqrt{k}}{\pi b \mu},$$

Q – соответствующий стационарному решению дебит скважины, определяемый из уравнения (10); F_i имеют вид (7), (8).

Для преобразования уравнения (6) с целью его упрощения примем *рабочую гипотезу* – для любого нестационарного решения $\Phi(r,t)$ уравнения (6) с достаточной для практики точностью можно считать верными равенства

$$F_1[\Phi(r,t)] \cong 1 + \frac{C}{2r + C}, \qquad F_2[\Phi(r,t)] \cong 1 + \frac{C}{r}. \tag{11}$$

Если рабочая гипотеза (11) верна, то для исследования закономерностей плоскорадиального притока газа к скважине, когда фильтрация подчиняется двучленному закону Форхгеймера, вместо точных уравнений (5) и (6) можно будет применять более простое для решения начально-краевых задач уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{C}{2r + C}\right)\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} = \frac{m\mu}{k\sqrt{\Phi(r,t)}}\left(1 + \frac{C}{r}\right)\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t}. \tag{12}$$

Если же к рабочей гипотезе (11) присоединить приближенное равенство $\sqrt{\Phi(r,t)} \approx \sqrt{\Phi(r)} \cong P_{пл}$, то тогда плоскорадиальную фильтрацию по двучленному закону Форхгеймера в первом приближении можно будет описывать решениями начально-краевых задач линейного уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{C}{2r + C}\right)\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} = \frac{m\mu}{kP_{пл}}\left(1 + \frac{C}{r}\right)\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t}. \tag{13}$$

В заключение отметим, что вопрос о возможности применения в обработке экспериментальных данных кривых восстановления давления и кривых падения давления с помощью нестационарных решений начально-краевых задач приближенных уравнений (12) и (13) пока остается открытым и ждет своих исследователей.

Список литературы

Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 480 с.

References

Basniyev K. S., Dmitriyev N. M., Rozenberg G. D. Neftegazovaya gidromekhanika. M.; Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovany, 2003. 480 s.

Статья поступила в редакцию 17.04.2013