УДК 517.956
ББК В161.912

Алексей Олегович Потехо
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: potehoao@rambler.ru

Об эффективном решении смешанных краевых задач на плоскости для уравнения Лапласа [1]

Рассмотрены краевые задачи в квадранте и полуплоскости с составной границей в виде лучей, на которых заданы различные граничные условия, включая неоднородное условие третьего рода. Методом свёртывания разложений Фурье решения задач выражены через решение классической задачи Дирихле в полуплоскости.

Ключевые слова: смешанные краевые задачи, неоднородное граничное условие третьего рода, метод свёртывания разложений Фурье.

Aleksey Olegovich Potekho
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Zabaikalsky StateUniversity
(Chita, Russia), e-mail: potehoao@rambler.ru

On Effective Solution of Mixed Boundary Value Problems on the Plane for Laplace's Equation

The paper considers boundary value problems in a quadrant and a half-plane with integral boundary in the form of rays on which different boundary conditions are specified, including the heterogeneous condition of the third kind. Using the method of convolution of Fourier expansions, problem solutions are expressed in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in the half plane.

Keywords: mixed boundary value problems, inhomogeneous boundary condition of the third kind, method of convolution of Fourier expansions.

В теории краевых задач математической физики одними из наиболее сложных являются смешанные задачи, содержащие граничные условия третьего рода [1; 2]. Поэтому имеет большой интерес построение явных решений смешанных краевых задач в различных областях.

1. Решение задачи типа (1, 3) в квадранте. Рассмотрим краевую задачу в квадранте $D(x>0, y>0)$ со смешанными граничными условиями 1-го и 3-го рода на лучах $s_1(x=0, y>0)$ и $s_2(x>0, y=0)$ вида

$$\Delta u = 0, \qquad x>0,\ \ y>0; \tag{1}$$

$$u_{|x=0} = 0, \qquad \partial_y u - \gamma u_{|y=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, Δu – оператор Лапласа, $\gamma = const > 0$, $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция; x, y – декартовы координаты. Граничное условие третьего рода (2) соответствует наличию на границе s_2 слабопроницаемой плёнки. Методом свёртывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (1), (2) через решение классической задачи Дирихле с сохранением граничной функции (2).

Представим решение задачи (1), (2) в виде

$$u(x,y) = -\int_0^\infty e^{-\gamma t} v(x, y+t)\,dt, \qquad x>0,\ \ y>0, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ (код проекта 1.3985.2011).

где функция $v(x,y)$ удовлетворяет достаточно слабому условию на бесконечности вида

$$|v(x,y)| = O(e^{\alpha y}), \qquad y \to +\infty, \qquad \alpha < \gamma.$$

Функция $u(x,y)$ (3) является решением третьей краевой задачи в полуплоскости $y>0$ вида $\Delta u = 0$, $\partial_y u - \gamma u_{|y=0} = \psi(x)$, где $v(x,y)$ – решение соответствующей задачи Дирихле $\Delta v = 0$, $y>0$; $v_{|y=0} = \psi(x)$, т. е. формула (3) выражает решение третьих краевых задач через решение первых краевых задач в полуплоскости с сохранением граничных функций [3; 4].

Из равенства (3) для функции $v(x,y)$ в квадранте $D(x>0, y>0)$ получаем задачу Дирихле вида

$$\Delta v = 0, \qquad v_{|x=0} = 0, \qquad v_{|y=0} = \varphi(x). \tag{4}$$

Отметим, что граничное условие третьего рода при $y=0$ (2) для функции $u(x,y)$ (3) выполняется тождественно для любой дифференцируемой по x функции $v(x,y)$. Решение задачи (4) строится по формуле Пуассона в однократных квадратурах:

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(p)dp}{(x-p)^2+y^2}, \tag{5}$$

где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x>0 \\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}.$$

При этом функция $v(x,y)$ (5) является решением задачи Дирихле в полуплоскости $y>0$ вида

$$\Delta v = 0, \qquad y>0; \qquad v_{|y=0} = \varphi_1(x), \tag{6}$$

где граничная функция $\varphi_1(x)$ определяется для всех $x \in R$ посредством продолжения граничной функции $\varphi(x)$ на полуось $x<0$ по нечётному закону. Отметим, что для широкого класса граничных функций $\varphi(x)$ интеграл (5) вычисляется в конечном виде. Например, для функции $\varphi(x)$ вида кусочно-непрерывных функций, составленных из многочленов, функция $v(x,y)$ (5) выражается в конечном виде через элементарные функции.

Таким образом, решение смешанной задачи (1), (2) выражается через решение $v(x,y)$ задачи Дирихле (6) в полуплоскости по формулам (3), (5).

2. Решение задачи типа (2, 3) в квадранте. Рассмотрим в квадранте $D(x>0, y>0)$ смешанную краевую задачу с граничными условиями 2-го и 3-го рода:

$$\Delta u = 0, \qquad \partial_x u_{|x=0} = 0, \qquad \partial_y u - \gamma u_{|y=0} = \varphi(x). \tag{7}$$

Представляя решение данной задачи в виде (3), для функции $v(x,y)$ получим смешанную краевую задачу типа (2, 1):

$$\Delta v = 0, \qquad \partial_x v_{|x=0} = 0, \qquad v_{|y=0} = \varphi(x).$$

Решение последней задачи также строится по формуле Пуассона:

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(p)dp}{(x-p)^2+y^2}, \tag{8}$$

где

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases},$$

при этом функция $v(x, y)$ (8) является решением задачи Дирихле в полуплоскости $y > 0$ вида

$$\Delta v = 0, \qquad y > 0; \qquad v_{|y=0} = \varphi_2(x), \tag{9}$$

где функция $\varphi_2(x)$ определяется для $x \in R$ посредством продолжения граничной функции $\varphi(x)$ на полуось $x < 0$ по чётному закону. Как и выше, функция $v(x, y)$ (8) для широкого класса граничных функций $\varphi(x)$ строится в конечном виде. При этом решение смешанной краевой задачи (7) выражается в однократных квадратурах через решение задачи Дирихле (9) в полуплоскости по формулам (3), (8).

3. Решение краевых задач типа (1. 3) и (2, 3) в полуплоскости. Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами ξ, η смешанную краевую задачу типа (1, 3) в полуплоскости $D_1(\eta > 0)$ вида

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u = 0, \qquad \eta > 0, \tag{10}$$

$$u_{|\eta=0,\xi<0} = 0, \qquad \partial_\eta u - \gamma u_{|\eta=0,\xi>0} = f(\xi). \tag{11}$$

Аналитическая функция $\zeta = z^2$ конформно отображает квадрант $D(x > 0, y > 0)$ комплексной плоскости $z = x + iy$ на полуплоскость $D_1(\xi \in R, \eta > 0)$ комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Отсюда

$$\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = 2xy, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 < y < \infty. \tag{12}$$

Обратное отображение имеет вид

$$x = sign(\eta)\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}{2}}. \tag{13}$$

При этом в переменных x, y, т.е. на плоскости z, задача (10), (11) примет вид задачи (1), (2), где $\varphi(x) = f(\xi) = f(x^2)$ (12). Отсюда решение задачи (10), (11) строится по формулам (3), (5), где переменные $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ имеют вид (13).

Рассмотрим смешанную задачу в полуплоскости $\eta > 0$ типа (2, 3):

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u = 0, \qquad \eta > 0, \tag{14}$$

$$\partial_\eta u_{|\eta=0,\xi<0} = 0, \qquad \partial_\eta u - \gamma u_{|\eta=0,\xi>0} = f(\xi). \tag{15}$$

В переменных x, y (13) указанная задача примет вид (7), где $\varphi(x) = f(x^2)$. Отсюда решение задачи (14), (15) строится по формулам (3), (8), где переменные $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ имеют вид (13).

Таким образом, решение всех рассмотренных задач выражается через решение классической задачи Дирихле в полуплоскости.

Отметим, что посредством метода конформных отображений можно существенно расширить класс областей, в которых решение смешанных краевых задач типа (1, 3) и (2, 3) выражается через решение классической задачи Дирихле в полуплоскости.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

3. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

References

1. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.

2. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnye funktsii. M.: Nauk, 1974. 431 s.

3. Kholodovsy S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay obobshchyonnykh uslovy sopryazheniya treshchin (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.

4. Kholodovsy S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay treshchin (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 17.04.2013