УДК 519.7
ББК В 22.18

Александр Эммануилович Менчер
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия) e-mail: aementcher@mail.ru

Комбинированная арбитражная процедура с квадратичной функцией выигрыша[1]

Рассматривается бескоалиционная игра с нулевой суммой. Игроки, работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. В конфликтной ситуации игроки апеллируют к арбитру. Предложения арбитра моделируются дискретной случайной величиной. В работе применены две арбитражные схемы с квадратичной функцией выигрыша. Найдено равновесие по Нэшу в игре в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: арбитражная процедура, равновесие, смешанные стратегии.

Aleksandr Emmanuilovich Mencher
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor, Zabaikalsky State University
(Chita, Russia) e-mail: aementcher@mail.ru

Combined Arbitration Procedure with Quadratic Payoff Function

We consider a non-cooperative zero-sum game. The players, the Labor and the Manager, negotiate an improvement in the wage rate. In a conflict situation the players appeal to the arbitrator. The arbitrator's solution is a discrete random variable. In this paper we use two arbitration schemes with quadratic payoff function. A mixed strategy Nash equilibrium in this game is found.

Keywords: arbitraton procedure, equilibrium, mixed strategies.

1. Введение

Рассматривается бескоалиционная игра с нулевой суммой, в которой игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M – предложение y. Предположим, что x и y выбираются из заданных множеств X и Y на числовой оси. Для удобства вычислений рассмотрим предложения без ограничений на знак. В реальных приложениях интервал значений можно сдвинуть в положительную часть числовой оси. Если $x \leq y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A. Пусть выбор арбитра является дискретной случайной величиной, принимающей три возможных значения: -1, 0, 1, – вероятность каждого из которых равна $\frac{1}{3}$. В работах [1 – 3] рассматривались две арбитажные схемы: арбитражная схема по последнему предложению [1; 3] и арбитражная схема с наказанием [2; 3]. В арбитражной схеме по последнему предложению арбитр выбирает то предложение, которое ближе к его решению z, т.е. функция выигрыша в данной схеме имеет вид

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x < y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1.1}$$

В арбитражной схеме с наказанием арбитр определяет, чье предложение ближе к его решению, и к своему решению прибавляет (если предложение L ближе к его решению) или вычитает (если предложение игрока M ближе к его решению) разницу между своим решением и предложением

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ (проект № 8.3641.2011).

«провинившегося» игрока. Это рассматривается здесь, как наказание. Таким образом, функция выигрыша в схеме с наказанием имеет вид

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ 2z-y, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ 2z-x, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1.2}$$

Поскольку в функциях (1.1) и (1.2) решение арбитра z является случайной величиной, в качестве функции выигрыша будем рассматривать математическое ожидание от этих функций: $H(x,y) = EH_z(x,y)$. В работе [3] найдено равновесие в игре в комбинированной арбитражной процедуре в смешанных стратегиях.

В настоящей работе мы используем две арбитражные процедуры с квадратичной функцией выигрыша, первая из которых – модификация арбитражной схемы по последнему предложению, а вторая – арбитражной схемы с наказанием. Именно: пусть $x \in [0,+\infty)$, $y \in (-\infty,0]$; арбитр с вероятностью p руководствуется процедурой с функцией выигрыша

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x-z| < |y-z|, \\ -y^2, & \text{если } |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } |x-z| = |y-z| \end{cases} \tag{1.3}$$

и с вероятностью $1-p$ - процедурой с функцией выигрыша

$$H_z(x,y) = \begin{cases} 2z+y^2, & \text{если } |x-z| < |y-z|, \\ 2z-x^2, & \text{если } |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1.4}$$

Равновесие в игре будем искать среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1; \qquad g(y) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, т. е. $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L. Обозначим через $H(f(x),y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$.

2. Оптимальные стратегии

Теорема. *Если* $p \in (\frac{2}{3},1]$, *то для игрока* L *стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \dfrac{3p-1}{x^2}\cdot \text{c}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $c = 2(3p-2)$, *является оптимальной.*

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию игрока L в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и дважды непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$.

Функция $H(f(x),y)$ непрерывна на всей отрицательной полуоси. Стратегия (2.2) будет оптимальной, если $H(f(x),y) = 0$ для $y \in [-(c+2),-c]$ и $H(f(x),y) \geq 0$ для $y \in (-\infty,-(c+2)) \cup (-c,0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[p\left(\int\limits_{c}^{c+2}(-y^2)f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{-y}x^2 f(x)\,dx + \right.\right.$$

$$+\left.\int\limits_{-y}^{c+2}(-y^2)f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx\right) + (1-p)\left(\int\limits_{c}^{c+2}(-2-x^2)f(x)\,dx + \right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{c}^{-y}y^2 f(x)\,dx + \int\limits_{-y}^{c+2}(-x^2)f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{c+2}(2+y^2)f(x)\,dx\right)\right]. \tag{2.3}$$

Если теперь $f(x)$ — оптимальная стратегия, то

$$0 = H(f(x), -c-0) = \frac{1}{3}\left[p(-c^2 - c^2 + \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx) + \right.$$

$$\left.+(1-p)(-2 - \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx - \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx + 2 + c^2)\right],$$

откуда

$$(3p-2)\int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx = (3p-1)c^2; \tag{2.4}$$

$$0 = H(f(x) - (c+2) + 0) = \frac{1}{3}[p(-(c+2)^2 + 2\int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx) +$$

$$+(1-p)(-2 - \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx + (c+2)^2 + 2 + (c+2)^2)].$$

Отсюда

$$(3p-1)\int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx = (3p-2)(c+2)^2. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) получаем

$$c = 2(3p-2), \int\limits_{c}^{c+2}x^2 f(x)\,dx = 4(3p-1)(3p-2). \tag{2.6}$$

Из условия $0 < c \leq 2$, получаем $\frac{2}{3} < p \leq 1$.

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = H'''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$.

Имеем:

$$H'(f(x), y) = -\frac{2}{3}[p(y + y^2 f(-y) + y\int\limits_{-y}^{c+2}f(x)\,dx) +$$

$$+(1-p)(y^2 f(-y) - y\int\limits_{c}^{-y}f(x)\,dx - y)], \tag{2.7}$$

$$H''(f(x),y) = -\frac{2}{3}[p(1+3yf(-y)+\int\limits_{-y}^{c+2} f(x)\,dx) - y^2f'(-y)+$$

$$+(1-p)(3yf(-y) - y^2f'(-y) - 1 - \int\limits_{c}^{-y} f(x)\,dx)], \tag{2.8}$$

$$H'''(f(x),y) = -\frac{2}{3}[4f(-y) - 5yf'(-y) + y^2f''(-y))]. \tag{2.9}$$

Так как $H'''(f(x),y) = 0$, то, полагая $y = -x$, $x \in (c, c+2)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$x^2\varphi''(x) + 5x\varphi'(x) + 4\varphi(x) = 0, \tag{2.10}$$

известному из [4]. Его решением является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{x^2}.$$

Найдем константу α:

$$1 = \int\limits_{2(3p-2)}^{2(3p-1)} \frac{\alpha}{x^2}\,dx = \frac{\alpha}{2(3p-1)(3p-1)},$$

откуда

$$\alpha = 2(3p-2)(3p-1) = (3p-1)\cdot c. \tag{2.11}$$

Итак, функция $f(x)$ имеет вид (2.1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[p\left\{\int\limits_{c}^{c+2}(-y^2)\frac{(3p-1)c}{x^2}f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{-y}(3p-1)c\,dx + \right.\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-y}^{c+2}(-y^2)\frac{3p-1)c}{x^2}\,dx + \int\limits_{c}^{c+2}(3p-1)c\,dx\right\} +$$

$$+(1-p)\left\{\int\limits_{c}^{c+2}(-2-x^2)\frac{(3p-1)c}{x^2}\,dx + \int\limits_{c}^{-y} y^2\frac{(3p-1)c}{x^2} + \right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{-y}^{c+2}(-(3p-1)c)\,dx + \int\limits_{c}^{c+2}(2+y^2)\frac{(3p-1)c}{x^2}\,dx\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}[p\left\{-y^2 + 2(3p-2)(3p-1)(-y-2(3p-2)) + y^2 2(3p-2) + \right.$$

$$\left. +2(3p-2)(3p-1)y + 4(3p-1)(3p-2)\right\} +$$

$$+(1-p)\left\{-2 - 4(3p-2)(3p-1) + 2(3p-2)(3p-1)y + 2(3p-1)y^2 - \right.$$

$$\left. -2(3p-2)(3p-1)2(3p-1) - 2(3p-2)(3p-1)y + 2 + y^2\right\}] = 0. \tag{2.12}$$

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда

$$H(f(x),y) = p\int\limits_{c}^{c+2} x^2f(x)\,dx + (1-p)\int\limits_{c}^{c+2} y^2f(x)\,dx =$$

$$= 4p(3p-2)(3p-1) + (1-p)y^2. \tag{2.13}$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[p\left\{\int\limits_{c}^{-2-y} x^2 f(x)\,dx - y^2 \int\limits_{-2-y}^{c+2} f(x)\,dx + 2\int\limits_{c}^{c+2} x^2 f(x)\,dx\right\} + \right.$$

$$+(1-p)\left\{\int\limits_{c}^{-2-y} (-2+y^2) f(x)\,dx + \int\limits_{-2-y}^{c+2} (-2-x^2) f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{c+2} y^2 f(x)\,dx + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{c}^{c+2} (2+y^2) f(x)\,dx\right\}\right] \tag{2.14}$$

Далее,

$$H(f(x), -(c+2)-0) = \frac{1}{3}\left[\{-(c+2)^2 + 8(3p-2)(3p-1)\} + \right.$$
$$\left. +(1-p)\{-4(3p-2)(3p-1) + 2(c+2)^2\}\right] =$$
$$= \frac{4}{3}(3p-1)\left[2p(3p-2) - p(3p-1) + 2(1-p)(3p-1) - \right.$$
$$\left. -(1-p)(3p-2)\right] = 0, \tag{2.15}$$

$$H'(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[p\left\{-(2+y)^2 f(-2-y) - y^2 f(-2-y) - \right.\right.$$

$$\left. -2y\int\limits_{-2-y}^{c+2} f(x)\,dx\right\} + (1-p)\left\{(-y^2 f(-2-y) + 2y\int\limits_{c}^{-2-y} f(x)\,dx - \right.$$

$$\left.\left. -(2+y)^2 f(-2-y) + 4y\right\}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[y - \frac{4(3p-2)(3p-1)}{(y+2)^2}\right] < 0. \tag{2.16}$$

Так как $H'(f(x),y) < 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$ и $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$, то функция $H(f(x),y)$ на отрезке $[-(c+4), -(c+2)]$ строго убывает от $4p(3p-2)(3p-1) + (1-p)y^2$ до 0.

Пусть, наконец, $y \in [-c, 0]$, тогда $-y \in [0, c]$,$2-y \in [2, c+2]$ и

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[p\{-2y^2 + \int\limits_{c}^{2-y} x^2 f(x)\,dx\} - y^2 \int\limits_{2-y}^{c+2} f(x)\,dx\} + \right.$$

$$\left. +(1-p)\ \{\int\limits_{c}^{2-y} y^2 f(x)\,dx - \int\limits_{2-y}^{c+2} x^2 f(x)\,dx - 8(3p-2)(3p-1)\}\right]. \tag{2.17}$$

Далее,

$$H(f(x), -c+0) = \frac{1}{3}\left[p\{-2c^2 + 4(3p-2)(3p-1)\} + \right.$$
$$\left. (1-p)\{c^2 - 8(3p-2)(3p-1)\}\right] =$$
$$= \frac{4}{3}(3p-2)\left[-2p(3p-2) + p(3p-1) + \right.$$
$$\left. +(1-p)(3p-2) - 2(1-p)(3p-1)\right] = 0, \tag{2.18}$$

$$H(f(x), -0) = \frac{1}{3}[p\int\limits_{c}^{2} x^2 f(x)\,dx + (1-p)\{-\int\limits_{2}^{c+2} x^2 f(x)\,dx -$$

$$-8(3p-2)(3p-1)\}] = \frac{1}{3}\left[4p(3p-2)(3p-1) - 4(3p-2)^2(3p-1) - \right.$$

$$-8(1-p)(3p-2)(3p-1)] = 0. \tag{2.19}$$

Найдем $H'(f(x),y)$ и $H''(f(x),y)$. Имеем:

$$H'(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[p\{-4y-(2-y)^2 f(2-y) - y^2 f(2-y) - 2y\int\limits_{2-y}^{c+2} f(x)\,dx\}+\right.$$

$$\left.+(1-p)\{2y\int\limits_{c}^{2-y} f(x)\,dx - y^2 f(-2-y) - (2-y)^2 f(2-y)\}\right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[y+\frac{4(3p-2)(3p-1}{(y-2)^2}\right], \tag{2.20}$$

$$H''(f(x),y) = -\frac{2}{3}\left[1-\frac{8(3p-2)(3p-1}{(y-2)^3}\right] < 0.$$

Таким образом, $H(f(x),-c+0) = H(f(x),-0) = 0$, функция $H(f(x),y)$ – выпуклая вверх на интервале (-c,0) и, следовательно, положительна. Теорема доказана.

Список литературы

1. Farber H. An Analysis of Final-Offer Arbitration // Journal of Conflict Resolution. 1980. Vol. 35. P. 683–705.

2. Zeng Dao-Zhi. An Amendment to Final offer Arbitratoin // Working Paper, Kagawa:Kagawa University, 2006.

3. Mazalov V. V., Mencher A. E., Tokareva J. S. On the Equilibrium in Bargaining Model with Arbitrator // Journal of Computer and Systems Science International, 2009. Vol. 48., № 5. P. 739–745.

4. Менчер А. Э. Об одной арбитражной схеме с тремя предложениями //Математический анализ и его приложения. 2011. Вып. 10. С. 34–40.

References

1. Farber H. An Analysis of Final-Offer Arbitration // Journal of Nonflict Resolution. 1980. Vol. 35. P. 683–705.

2. Zeng Dao-Zhi. An Amendment to Final offer Arbitratoin // Working Paper, Kagawa:Kagawa University, 2006.

3. Mazalov V. V., Mencher A. E., Tokareva J. S. On the Equilibrium in Bargaining Model with Arbitrator// Journal of Computer and Systems Science International, 2009. Vol. 48. № 5. P. 739–745.

4. Mencher A. E. Ob odnoy arbirtrazhnoy skheme s tremya predlozheniyami // Matematichesky analiz i ego prilozheniya. 2011. Vyp. 10. S. 34–40.

Статья поступила в редакцию 20.05.2013