

УДК 537.7
ББК В. 22

Марина Юрьевна Малакеева
старший преподаватель,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: seilor25@mail.ru

Валерий Ефимович Архинчев
доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник,
Институт физического материаловедения СО РАН
(Улан-Удэ, Россия), e-mail: varkhin@mail.ru

Протекание холловского тока и вычисление эффективной проводимости многофазных сред в режиме КЭХ¹

Рассмотрено протекание тока в условиях квантового эффекта Холла в неоднородных многофазных средах. Описан общий метод исследования неоднородных двумерных сред на основе линейных преобразований поворота, предложенный Дыхне. Получены соотношения дуальности эффективной проводимости и вычислена эффективная проводимость многофазных сред в режиме КЭХ.

Ключевые слова: квантовый эффект Холла, эффективная проводимость, многофазные среды, преобразования Дыхне.

Marina Yur'evna Malakeeva
Senior Lecturer,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: seilor25@mail.ru

Valeriy Efimovich Arkhincheev
Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher,
Institute of Physical Material Science, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
(Ulan-Ude, Russia), e-mail: varkhin@mail.ru

Percolation of Hall Current and Calculation of Effective Conductivity of Multiphase Media in the Quantum Hall Effect Regime

The current percolation has been considered in inhomogeneous multiphase media under Quantum Hall Effect conditions. A general method for studying two-dimensional heterogeneous media on the basis of linear transformations of rotation developed by Dykhne has been described. Duality relations for the effective conductivity of multiphase media have been obtained and calculation of effective Hall conductivity has been performed.

Keywords: Quantum Hall Effect regime, effective conductivity, multiphase media, Dykhne transformations.

Настоящая работа продолжает исследования протекания тока в условиях квантового эффекта Холла (КЭХ). Ранее в работах [5; 10] методами ТФКП был исследован вопрос о протекании холловского тока в двухфазной среде. Было показано, что ненулевое значение эффективной холловской проводимости обусловлено протеканием холловского тока через сингулярные точки. В связи с разработкой квантовых интерферометров актуальными являются задачи протекания тока в средах с границами, к которым относятся многофазные системы. В режиме КЭХ свойства протекания тока существенно определяются именно свойствами межфазных границ и их топологией.

Целью настоящей работы является изучение протекания холловского тока в неоднородной многофазной среде. С помощью преобразований Дыхне будут получены соотношения дуальности эффективной проводимости многофазных сред. Далее на основе установленных соотношений будут получены точные выражения для проводимости в условиях квантового эффекта Холла.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Программы ОФН РАН (проект 20.4)

1. Симметрия двумерной системы относительно преобразований поворота (метод линейных преобразований Дыхне). Опишем кратко метод, предложенный в работах [2; 3]. Двухмерная проводящая среда описывается уравнениями постоянного тока и законом Ома:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{e} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{e}. \quad (1)$$

Как впервые было установлено в работах Дыхне [3], эти уравнения инвариантны относительно уравнений поворота:

$$\vec{j}' = b[\vec{n}, \vec{e}'], \quad \vec{e}' = d[\vec{n}, \vec{j}']. \quad (2)$$

Здесь b, d — постоянные коэффициенты уравнений поворота; \vec{n} — нормаль к плоскости. В силу линейности указанных преобразований сохраняется закон Ома и в новой штрихованной системе. При этом проводимость штрихованной системы равна:

$$\sigma' = \frac{b}{d\sigma}. \quad (3)$$

В магнитном поле \vec{B} , направленном перпендикулярно к плоскости, закон Ома имеет тензорный вид: $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{e}$, здесь $\hat{\sigma}$ — тензор проводимости в магнитном поле с компонентами σ_{xx} и σ_{xy} . Соответственно, в случае магнитного поля используются обобщенные линейные преобразования поворота [3,4]:

$$\vec{j}' = a\vec{j}' + b[\vec{n}, \vec{e}'], \quad \vec{e}' = c\vec{e}' + d[\vec{n}, \vec{j}']. \quad (4)$$

В штрихованной системе закон Ома также имеет тензорный вид: $\vec{j}' = \hat{\sigma}' \vec{e}'$. При этом компоненты тензора новой штрихованной системы связаны с компонентами тензора исходной системы следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}(ac + bd)}{(\sigma_{xx}d)^2 + (\sigma_{xy}d + a)^2}; \\ \sigma'_{xy} &= \frac{\sigma_{xx}^2 cd + (c\sigma_{xy} - b)(d\sigma_{xy} - a)}{(\sigma_{xx}d)^2 + (\sigma_{xy}d + a)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Эффективная холловская проводимость многофазных сред. Применим преобразования Дыхне для многофазных холловских сред. Для металлических сред этот метод не работает, но для холловских сред из-за особенностей протекания тока этим методом можно получить решения и точные выражения для эффективной холловской проводимости.

Рассмотрим многофазный случай. Пусть имеются 4 фазы в режиме КЭХ с различными проводимостями $\sigma_{xy}^{(i)}$ (в дальнейшем будем обозначать холловские проводимости просто как σ_i) и случайным расположением фаз. Предположим также, что концентрации чётных и нечётных фаз равны между собой:

$$X_1 = X_3, \quad X_2 = X_4 \quad (6)$$

и произвольны по величине:

$$2(X_1 + X_2) = 1. \quad (7)$$

Для удобства представим концентрации 1 и 2 фаз в виде:

$$X_1 = \frac{1}{4} + \delta, \quad X_2 = \frac{1}{4} - \delta. \quad (8)$$

Двух- и трёхфазные среды являются частными случаями рассматриваемой задачи. Следуя общему методу, установим возможные симметрии перестановок и соответствующие соотношения дуальности. Переставим чётные и нечётные фазы местами:

$$\sigma'_1 = \sigma_2, \quad \sigma'_2 = \sigma_1, \quad \sigma'_3 = \sigma_4, \quad \sigma'_4 = \sigma_3, \quad (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4). \quad (9)$$

В соответствии с условиями (9) и формулой (5) это преобразование задается коэффициентами

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sigma_1 \sigma_2 (\sigma_3 + \sigma_4) - \sigma_3 \sigma_4 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 \sigma_4}, \\ a_1 &= c_1, \\ d_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 \sigma_4}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что такое преобразование при произвольных значениях проводимостей возможно только для сред в режиме КЭХ. При обычном металлическом характере проводимости в трёхфазном случае возникает дополнительное условие на проводимость третьей фазы: $\sigma_3 = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, а в четырёхфазном случае такое преобразование вообще отсутствует.

При произвольных концентрациях фаз штрихованная система оказывается дуальной по отношению к исходной: $\sigma'_e(\delta) = \sigma_e(-\delta)$. Следовательно, получим следующее соотношение дуальности для эффективных проводимостей четырёхфазных неоднородных сред в режиме КЭХ:

$$d_1\sigma_e(-\delta)\sigma_e(\delta) + b_1 = a_1(\sigma_e(-\delta) + \sigma_e(\delta)). \quad (11)$$

Помимо указанной симметрии в данной задаче есть ещё одна возможность при перестановке чётных и нечётных фаз: $\sigma'_1 = \sigma_4, \sigma'_2 = \sigma_3, \sigma'_3 = \sigma_2, \sigma'_4 = \sigma_1, (1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3)$. В этом случае коэффициенты a, b, d принимают значения:

$$a_2 = -c_2, \quad b_2 = \frac{\sigma_1\sigma_4(\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_2\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_4)}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$d_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_4 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}, \quad (12)$$

и получается ещё одно соотношение дуальности, аналогичное (11), но со своими коэффициентами a_2, b_2, d_2 .

В рассматриваемой системе также есть дополнительная симметрия – перестановка чётных и нечётных фаз между собой:

$$\sigma'_1 = \sigma_3, \quad \sigma'_2 = \sigma_4, \quad \sigma'_3 = \sigma_1, \quad \sigma'_4 = \sigma_2, \quad (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (13)$$

В этом случае штрихованная система оказывается макроскопически эквивалентной исходной: $\sigma'_e(\delta) = \sigma_e(\delta)$ и эффективная холловская проводимость определяется уравнением:

$$d_3\sigma_e(\delta)^2 + b_3 - 2a_3\sigma_e(\delta) = 0. \quad (14)$$

Здесь коэффициенты a_3, b_3, d_3 находятся из условий (13). Таким образом, эффективная проводимость четырёхфазной среды в режиме КЭХ равна:

$$\sigma_{xy}^e(\pm\delta) = \frac{\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_4}{(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_4)} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_4}\right)^2 - \frac{\sigma_2\sigma_4(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_1\sigma_3(\sigma_2 + \sigma_4)}{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_4}}. \quad (15)$$

Переход к средам с меньшим количеством фаз осуществляется достаточно легко: трёхфазная среда соответствует пределу $\sigma_2 = \sigma_4$, а двухфазная: $-\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = \sigma_4$. Интересно заметить, что плато холловской проводимости в широком интервале не зависит от концентрации фаз. Другим интересным обстоятельством является то, что высота плато зависит от проводимостей всех четырёх фаз вплоть до малых концентраций.

Такие неожиданные результаты связаны с необычным характером протекания тока в условиях КЭХ. Как известно, холловский ток всегда перпендикулярен электрическому полю:

$$j = \sigma_{xy}[n, e]. \quad (16)$$

Тогда из уравнения $div j = 0$ с учетом потенциальности электрического поля $rot e = 0$ получим

$$\vec{e} \times \nabla \sigma_{xy} = 0. \quad (17)$$

Следовательно, линии тока не могут пересекать линии постоянных значений величины σ_{xy} , т. е. холловский ток не может протекать из одной фазы в другую и «замораживается» в каждой из фаз. Это и объясняет постоянство плато σ_{xy} в широком интервале концентраций [6; 7; 8]. Отметим также, что, согласно нашим результатам, значение холловской проводимости на пороге протекания существенно зависит от того, по бесконечному кластеру из каких фаз произошёл выход на

пороговое значение σ_{xy} . Для образования бесконечного кластера достаточно двух фаз, поэтому в четырёхфазной системе возможны шесть независимых способов образования бесконечного кластера из различных фаз (число сочетаний равно 6). Это соответствует нашим результатам.

В настоящее время в связи с интенсивным исследованием квантовых явлений и разработкой квантовых интерферометров теоретическое исследование механизма распределения краевых токов в условиях КЭХ является актуальным и представляет существенный интерес. На наш взгляд, полученные результаты могут быть использованы для создания и усовершенствования квантовых интерферометров.

Список литературы

1. Балагуров Б. Я. Соотношения взаимности в двумерной теории протекания // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1982. Т. 82. С. 1333–1340.
2. Дыхне А. М. Проводимость двумерной двухфазной системы // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1970. Т. 59. № 1. С. 110–115.
3. Дыхне А. М. Проводимость двумерной двухфазной системы // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1970. Т. 59. № 1. С. 641–648.
4. Емец Ю. П. Преобразование симметрии двумерной двухкомпонентной электропроводной системы // ЖЭТФ. 1982. Т. 96. С. 701–711.
5. Малакеева М. Ю., Архинчев В. Е. Вычисление распределений локальных токов и полей в слоистых средах в условиях квантового эффекта Холла // Учёные записки ЗабГГПУ. 2011. № 3(38). С. 108–115.
6. Arkhincheev V. E. Exact Relations and Galvan magnetic Properties of the Inhomogeneous Two-Dimensional Medium // Physica status solidi (b). 1990. V. 161. P. 815–821.
7. Arkhincheev V. E. Effective conductivity of three-phase no dissipative randomly-inhomogeneous media // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1999. V. 89. P. 1166–1167.
8. Arkhincheev V. E. and. Batyiev E. G. To the theory of the. Quantum Hall Effect in inhomogeneous medium// Solid State Communications 1989. V.12. P.1059–1060.
9. Arkhincheev V. E. Quantum Hall Effect in Inhomogeneous Media: Effective Characteristics and Local Current Distribution//Journal of Experimental and Theoretical Physics. Vol. 91. №. 2. 2000. P. 407–415.
10. Malakeeva M. U., Arkhincheev V. E. Current percolation in medium with boundaries under Quantum Hall Effect conditions// Advances in Condensed Matter Physics Volume. 2012. 6 pages.

References

1. Balagurov B. Ya. Sootnosheniya vzaimnosti v dvumernoy teorii protekaniya // Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki. 1982. T. 82. S. 1333–1340.
2. Dykhne A. M. Profodimost dvukhmernoy dvukhfaznoy sistemy // Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki. 1970. T. 59. № 1. S. 110–115.
3. Dykhne A. M. Provodimost dvumernoy dvukhfaznoy sistemy // Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki. 1970. T. 59. № 1. S. 641–648.
4. Yemets Yu. P. Preobrazovaniye simmetrii dvukhmernoy dvukhkomponentnoy elektroprovodnoy sistemy // ZhETF. 1982. T. 92. S. 701–711.
5. Malakeyeva M. Yu., Arkhincheyev V. Ye. Vychisleniye raspredeleny lokalnykh tokov i poley v sloistyx v usloviyakh kvantovogo effekta Kholla // Uchyonye zapiski ZabGGPU. 2011. № 3(38). S. 108–115.
6. Arkhincheev V. E. Exact Relations and Galvan magnetic Properties of the Inhomogeneous Two-Dimensional Medium // Physica status solidi (b). 1990. V. 161. P. 815–821.

7. Arkhincheev V. E. Effective conductivity of three-phase no dissipative randomly-inhomogeneous media // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1999. V. 89. P. 1166–1167.

8. Arkhincheev V. E. and. Batyiev E. G. To the theory of the. Quantum Hall Effect in inhomogeneous medium// Solid State Communications 1989. V.12. P.1059–1060.

9. Arkhincheev V. E. Quantum Hall Effect in Inhomogeneous Media: Effective Characteristics and Local Current Distribution//Journal of Experimental and Theoretical Physics. Vol. 91. № 2. 2000. P. 407–415.

10. Malakeeva M. U., Arkhincheev V. E. Current percolation in medium with boundaries under Quantum Hall Effect conditions// Advances in Condensed Matter Physics Volume. 2012. 6 pages.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013