УДК 519.834, 519.837.3
ББК В 22.18

Анатолий Анатольевич Забелин
кандидат физико-математических наук,
Читинский институт
Байкальского государственного университета экономики и права,
(Чита, Россия), e-mail: anatanza@mail.ru

Об одной динамической модели арбитража

В статье приводится исследование неантагонистической многошаговой модели арбитража, где предложение арбитра является равномерно распределённой случайной величиной.

Ключевые слова: арбитраж, неантагонистическая игра, многошаговая игра.

Anatoliy Anatol'evich Zabelin
Candidate of Physics and Mathematics,
Chita Institute of Baikal State University of Economics and Law,
(Chita, Russia), e-mail: anatanza@mail.ru

On a Dynamic Arbitration Model

The article is devoted to non-antagonistic multistage arbitration game, where an arbiter's offer is a random variable uniformly distributed on $[0; 1]$.

Keywords: arbitration game, non-antagonistic game, multistage game.

Рассмотрим неантагонистическую модель арбитража. Два игрока делят некоторый ресурс, максимальная величина которого равна единице. Выдвижением предложений о дележе ресурса занимается арбитр. Он наблюдает случайную величину α, равномерно распределенную на отрезке $[0; 1]$, и, получив наблюдение a, объявляет его игрокам. У каждого игрока две стратегии – принять это предложение или отвергнуть его. Игра многошаговая, n – количество периодов игры, k – количество периодов, оставшихся до конца игры. Положим также, что с течением времени ресурс дисконтируется с коэффициентом дисконтирования $\delta \in [0; 1]$. Пусть u_i^k – выигрыш игрока с номером i в партии с индексом k при оптимальной игре обоих игроков. Предложение арбитра обозначим a^k.

Определим выигрыш игроков в партии с индексом k. Если оба игрока принимают предложение арбитра, то первый игрок получает долю ресурса a^k, а второй игрок – долю ресурса, равную $1 - a^k$, и игра заканчивается. Положим, что в случае, когда кто-либо из игроков не согласен с предложением арбитра, спор разрешается в пользу несогласной стороны и игра также завершается. Отсюда следует, что в ситуации, когда только один из игроков не принял предложения арбитра, игрок, не согласный с предложением, получает долю ресурса, равную $\max(a^k, 1 - a^k)$ (соответственно, игрок, согласившийся с предложением, получает долю, равную $\min(a^k, 1 - a^k)$). Если же оба игрока не согласны с предложением арбитра, игра переходит в следующий период, индекс k уменьшается на единицу, выигрыши игроков дисконтируются и они равны соответственно δu_1^{k-1} и δu_2^{k-1}.

Получаем биматричную игру с матрицами выигрыша (первая строка и первый столбец соответствуют принятию игроками предложения арбитра)

$$\begin{pmatrix} a^k & \min(a^k, 1 - a^k) \\ \max(a^k, 1 - a^k) & \delta u_1^{k-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 - a^k & \max(a^k, 1 - a^k) \\ \min(a^k, 1 - a^k) & \delta u_2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Граничное условие: $u_1^0 = u_2^0 = 0$.

Пусть x и y – вероятности выбора стратегии «принять предложение арбитра» первым и вторым игроком соответственно.

Рассмотрим случай $n = 1$.

Если предложение арбитра $a^1 \in [0; 0.5]$, то матрицы выигрышей имеют вид

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^1 \\ 1 - a^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 - a^1 & 1 - a^1 \\ a^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение для данного случая, найденное по алгоритму, приведённому в [1, с. 251–256], даёт два типа ситуаций равновесия по Нэшу. Первый – ситуация $(x = 0; y = 1)$, при которой пара выигрышей $(h_1(x, y); h_2(x, y)) = (1 - a^1; a^1)$. Второй – множество ситуаций в смешанных стратегиях $(x = 1; y)$, где $y \in \left[0; \dfrac{a^1}{1 - a^1}\right]$. Здесь выигрыши $(h_1(x, y); h_2(x, y)) = (a^1; 1 - a^1)$.

Если же $a^1 \in (0.5; 1]$, то матрицы выигрышей:

$$\begin{pmatrix} a^1 & 1 - a^1 \\ a^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 - a^1 & a^1 \\ 1 - a^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае также два типа ситуаций равновесия. Первый тип – ситуация $(x = 1; y = 0)$, при которой выигрыши $(h_1(x, y); h_2(x, y)) = (1 - a^1; a^1)$. Второй – множество ситуаций в смешанных стратегиях $(x; y = 1)$, где $x \in \left[0; \dfrac{1 - a^1}{a^1}\right]$. Здесь выигрыши $(h_1(x, y); h_2(x, y)) = (a^1; 1 - a^1)$.

Ситуации равновесия не единственны и дают неравноценные выигрыши, поэтому в качестве решений игры они выступать не могут. Найдём арбитражное решение по Нэшу (см. [2, с. 142–146]).

Для каждого конкретного $a \in [0; 1]$ множество пар выигрышей $(h_1; h_2)$, оптимальных по Парето, имеет вид $h_1 + h_2 = 1$, точка статус-кво $(\min(a^1, 1 - a^1); \min(a^1, 1 - a^1))$, отсюда арбитражное решение задается соотношением $(h_1; h_2) = (0.5; 0.5)$. Пару таких выигрышей можно получить, выбирая при $a \leqslant 0.5$ стратегии $(x = 0.5; y = 1)$, а при $a > 0.5$ пару стратегий $(x = 1; y = 0.5)$, причём указанные пары стратегий единственны. В итоге,

$$u_1^1 = \int\limits_0^1 0.5\, da^1 = 0.5, \quad u_2^1 = \int\limits_0^1 0.5\, da^1 = 0.5.$$

Итак, решение игры при $n = 1$ получено с помощью арбитражной схемы Нэша.

Решим игру для произвольного n, предварительно положив, что $u_1^{k-1} = u_2^{k-1} = u^{k-1}$, где $k \in \overline{1, n}$ – индекс партии игры. Положим, что $u^{k-1} \leqslant 0.5$.

Пусть $a^k \in [0; 0.5]$. Матрицы выигрыша в партии с индексом k:

$$\begin{pmatrix} a^k & a^k \\ 1 - a^k & \delta u^{k-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 - a^k & 1 - a^k \\ a^k & \delta u^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Если $a^k \in [0; \delta u^{k-1}]$, то имеется единственная ситуация равновесия по Нэшу $(x = 0; y = 0)$, и выигрыши игроков одинаковы и равны δu^{k-1}.

Если $a^k \in (\delta u^{k-1}; 0.5]$, то имеется два неравноценных, оптимальных по Нэшу и Парето класса ситуаций. Первый – ситуация $(x = 0; y = 1)$, которой соответствуют выигрыши $(1 - a^k, a^k)$, второй – множество ситуаций $(x = 1; y \in [0; t])$, где $t = \dfrac{\delta u^{k-1} - a^k}{\delta u^{k-1} - (1 - a^k)} \in (0; 1)$ и которым соответствуют выигрыши $(a^k, 1 - a^k)$.

Если же $a^k \in (0.5; 1)$, то матрицы выигрыша:

$$\begin{pmatrix} a^k & 1 - a^k \\ a^k & \delta u^{k-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 - a^k & a^k \\ 1 - a^k & \delta u^{k-1} \end{pmatrix}.$$

При $a^k \in [1 - \delta u^{k-1}; 1]$ имеется единственная ситуация равновесия по Нэшу $(x = 0; y = 0)$, выигрыши игроков равны δu^{k-1}.

Если $a^k \in (0.5; 1 - \delta u^{k-1})$, то имеется два неравноценных, оптимальных по Нэшу и Парето класса ситуаций. Первый – ситуация $(x = 1; y = 0)$, которой соответствуют выигрыши $(1 - a^k, a^k)$, второй – множество ситуаций $(x \in [0; t]; y = 1)$, где $t = \dfrac{\delta u^{k-1} - (1 - a^k)}{\delta u^{k-1} - a^k} \in (0; 1)$ и которым соответствуют выигрыши $(a^k, 1 - a^k)$.

Отсюда следует, что при $|a^k - 0.5| \geqslant 0.5 - \delta u^{k-1}$ решение можно найти без использования схемы Нэша, а если $|a^k - 0.5| < 0.5 - \delta u^{k-1}$, то приходится рассматривать делёж.

Рассуждая аналогично первому случаю, получаем арбитражное решение $(h_1; h_2) = (0.5; 0.5)$, которое реализуется теми же наборами стратегий, что и указанные ранее.

В итоге получаем:

$$u_1^k = u_2^k = \int\limits_0^{\delta u^{k-1}} \delta u^{k-1}\, da^k + \int\limits_{\delta u^{k-1}}^{1-\delta u^{k-1}} 0.5\, da^k + \int\limits_{1-\delta u^{k-1}}^{1} \delta u^{k-1}\, da^k = \delta u^{k-1} + \frac{(1-2\delta u^{k-1})^2}{2}.$$

Равенство выигрышей, совместно с базой $u_1^1 = u_2^1$, подтверждает индукцию по всем $k \in \overline{1, n}$.

В качестве дополнения к сказанному выше, в проведённом исследовании была найдена асимптотика выигрышей

$$\lim_{n\to\infty} u_i^n = \frac{1+\delta-\sqrt{1+2\delta-3\delta^2}}{4\delta^2}$$

и среднее время игры (в периодах)

$$\mathsf{E}_n\tau = 1 + \sum_{t=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{t}\left\{2\delta u^{n-r}\right\} = 1 + 2\delta u^{n-1}\mathsf{E}_{n-1}\tau,$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}_n\tau = \dfrac{2\delta}{\sqrt{1+2\delta-3\delta^2}-(1-\delta)}$.

Список литературы

1. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 336 с.

2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Сёмина Е.А. Теория игр: учеб. пособие для ун-тов. М.: Высшая школа; Университет, 1998. 304 с.

References

1. Dyubin G. N., Suzdal V. G. Vvedeniye v prikladnuyu teoriyu igr. M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1981. 336 s.

2. Petrosyan L. A., Zenkevich G. A., Syomina Ye. A. Teoriya igr: ucheb. posobiye dlya un-tov. M.: Vysshaya shkola; Universitet, 1998. 304 s.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013