УДК 517.956
ББК В161.611

Ирина Анатольевна Ефимова
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
Сибирского университета потребительской кооперации
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

О решении первой краевой задачи на плоскости для уравнения Лапласа в области, ограниченной параболой[1]

Рассмотрена первая краевая задача во внутренней части области, ограниченной параболой. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено в виде ряда через решение классической задачи Дирихле в полуплоскости.

Ключевые слова: задача Дирихле в криволинейной области, уравнение Лапласа, метод свёртывания разложений Фурье.

Irina Anatol'evna Efimova
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Zabaikalsky Institute of Entrepreneurship of
Siberian University of Consumer Cooperation
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

On Solution of the First Boundary Value Problem on a Plane for Laplace's Equation in the Area Bounded by Parabola

The first boundary value problem in the inner part of the area limited by parabola is considered. Using a convolution method of Fourier expansions, the problem solution is expressed in the form of a series through the solution of the classical Dirichlet problem in the half-plane.

Keywords: Dirichlet problem in curvilinear area, Laplace's equation, a method of convolution of Fourier expansions.

Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами x, y для функции $u(x, y)$ первую краевую задачу в области $D(x > ky^2 - l^2)$, ограниченной параболой $L(x = ky^2 - l^2)$ (D – внутренняя часть, содержащая точку $(0, 0)$):

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \qquad (x, y) \in D; \qquad u_{|(x,y)\in L} = \psi(x, y), \tag{1}$$

где $\psi(x, y)$ – заданная непрерывная функция, $k = (2l)^{-2}$, $l > 0$, $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$. В данном случае область D имеет криволинейную границу L, не совпадающую с координатными линиями, что вызывает существенные трудности при решении данной задачи.

С помощью аналитической функции $z = \zeta^2$ перейдём на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, где $z = x + iy$,

$$x = \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta. \tag{2}$$

Координаты ξ, η являются параболическими координатами основной плоскости z или декартовыми координатами плоскости ζ. Обратное отображение имеет вид

$$\xi = sign(y)\sqrt{\frac{r + x}{2}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{r - x}{2}}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ (код проекта 1.3985.2011).

Функция $z = \zeta^2$ отображает полосу $G(\xi \in R, 0 < \eta < l)$ плоскости ζ на область D с разрезом $s(0 < x < \infty,\ y = 0) \in D$, при этом границы $\eta = l$ и $\eta = 0$ полосы G отображаются соответственно в параболу L и разрез s. В переменных ξ, η задача (1) для функции $u(\xi, \eta)$ примет вид

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u = 0, \qquad (\xi, \eta) \in G; \qquad u_{|\eta=l} = \varphi(\xi), \tag{4}$$

$$u(\xi, 0) = u(-\xi, 0), \qquad \partial_\eta u(\xi, 0) = -\partial_\eta u(-\xi, 0), \tag{5}$$

где $\varphi(\xi) = \psi(\xi^2 - l^2, 2\xi l)$ (2). Условия сопряжения (5) выражают непрерывность искомого решения $u(\xi, \eta)$ и его нормальной производной на разрезе s основной плоскости, т. е. этим разрезом можно пренебречь. На плоскости ζ границами области G являются прямые координатные линии, однако задача усложняется наличием дополнительных условий сопряжения (5).

Наряду с задачей (4), (5) рассмотрим классическую задачу Дирихле в полуплоскости $\eta < l$ с сохранением граничной функции $\varphi(\xi)$ (4) вида

$$\partial_\xi^2 f + \partial_\eta^2 f = 0, \qquad \eta < l; \qquad f_{|\eta=l} = \varphi(\xi). \tag{6}$$

Решение данной задачи строится по формуле Пуассона

$$f(\xi, \eta) = \frac{\eta - l}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(p)dp}{(\xi - p)^2 + (\eta - l)^2}, \tag{7}$$

причем последний интеграл вычисляется в конечном виде для достаточно широкого класса граничных функций $\varphi(\xi)$, т.е. функцию $f(\xi, \eta)$ (7) можно считать известной функцией.

С помощью метода свёртывания разложений Фурье [1, 2] выразим решение задачи (4), (5) через решение $f(\xi, \eta)$ задачи Дирихле (6). Пусть граничная функция $\varphi(\xi)$ разлагается в интеграл Фурье, т. е.

$$\varphi(\xi) = \int\limits_0^\infty [\varphi_1(\lambda) \sin \lambda\xi + \varphi_2(\lambda) \cos \lambda\xi] d\lambda, \tag{8}$$

где

$$\varphi_{(1/2)}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \begin{pmatrix} \sin \lambda\xi \\ \cos \lambda\xi \end{pmatrix} d\xi, \tag{9}$$

при этом $\varphi(\xi) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Отсюда, применяя метод Фурье к задаче Дирихле (6), её решение найдём в виде разложения Фурье:

$$f(\xi, \eta) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\eta - l)} [\varphi_1(\lambda) \sin \lambda\xi + \varphi_2(\lambda) \cos \lambda\xi] d\lambda, \qquad \eta \leq l. \tag{10}$$

Представим решение задачи (4), (5) в виде

$$u(\xi, \eta) = \int\limits_0^\infty [a(\lambda) \operatorname{sh} \lambda\eta \sin \lambda\xi + b(\lambda) \operatorname{ch} \lambda\eta \cos \lambda\xi] d\lambda, \qquad 0 \leq \eta \leq l, \tag{11}$$

где $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ – искомые параметры. Отсюда функция $u(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (4) и условиям сопряжения (5) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла (11)). Из граничного условия (4) с учётом разложения (8) находим

$$a(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda)}{\operatorname{sh}\lambda l}, \qquad b(\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{\operatorname{ch}\lambda l}. \tag{12}$$

Отсюда решение задачи (4), (5) строится по формулам (11), (12). Полученное решение содержит двукратные квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье $\varphi_i(\lambda)$ (9)) от сильно осциллирующих тригонометрических функций, что затрудняет практическое использование полученного решения.

Выразим полученное решение (11) непосредственно через функцию $f(\xi, \eta)$ (7) без разложений Фурье. Из равенств (12) следует

$$a = \frac{2e^{-\lambda l}\varphi_1}{1 - e^{-2\lambda l}} = 2\varphi_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda l(2n+1)}; \qquad b = \frac{2e^{-\lambda l}\varphi_2}{1 + e^{-2\lambda l}} = 2\varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda l(2n+1)}.$$

Здесь дроби разложены в геометрические прогрессии со знаменателями

$$q_i = (-1)^{i+1} e^{-2\lambda l}, \qquad |q_i| < 1.$$

Отсюда с учётом разложения (10) функция $u(\xi, \eta)$ (11) приводится к виду:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [f((-1)^n \xi, \eta - 2nl) + f((-1)^{n+1}\xi, -\eta - 2nl)]. \tag{13}$$

Полученный ряд сходится достаточно быстро, как знакочередующийся ряд, при этом учитываем, что функция $f(\xi, \eta)$ (7) при $\eta \to -\infty$ монотонно стремится к нулю.

Таким образом, решение исходной задачи (1) непосредственно выражается через решение $f(\xi, \eta)$ задачи Дирихле (6) в полуплоскости $\eta < l$ по формуле (13) без квадратур и без разложений Фурье, где переменные $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ имеют вид (3).

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

2. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

References

1. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay obobshchennykh uslovy sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.

2. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furye. Sluchay treshchiny (zavesy) v v neodnorodnom prostranstve // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 15.03.2013