A TEORIA DOS CONJUNTOS DE CANTOR

Antônio Acra Freiria
Depto de Geologia, Física e Matemática
FFCL de Ribeirão Preto - USP

RESUMO

No final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma reformulação significativa da Matemática no Brasil. Sob a bandeira do modernismo, seus defensores buscaram inovações no ensino da Matemática. Dessa forma, os reformistas se concentraram essencialmente na linguagem abusiva e no formalismo da Teoria dos Conjuntos, o que trouxe mais danos do que benefícios do ensino da Matemática de 1º e 2º graus. A linguagem formal da Teoria dos Conjuntos é porém sua parte menos importante.

A teoria criada por Cantor tão logo revelou-se como o fundamento de toda a Matemática, possibilitando o desenvolvimento de novas disciplinas, como a Topologia, a Algebra Abstrata, a Teoria da Medida e Integração, a Teoria da Probabilidade e a Análise Funcional.

O objetivo deste trabalho é um relato sucinto de como surgiu essa teoria, apresentando o "Conjunto de Cantor" como um dos mais ricos exemplos de "Conjunto perfeito" encontrados na literatura matemática.

INTRODUÇÃO

Em 1782 contribuições cruciais na direção da aritmetização da análise foram feitas por cinco grandes matemáticos Charles Meray (1835-1911) da Borgonha, Karl Weierstrass (1815-1897) de Berlin, H.Heine (1821-1881) de Halle, George Cantor (1845-1918) também de Halle e um seu amigo J.W.R.Dedekind (1831-1916) de Braunschweig. Esses homens num certo sentido representam o clima de meio século de investigação sobre a natureza da função e do número que começara em 1822 com a teoria do Calor de Fourier. Foi o estudo das séries de Fourier que levou Cantor a descrever a famosa e discutida Teoria dos Conjuntos.

George Cantor, nasceu em S.Petersburgo, de pais dinamarqueses, mas a maior parte de sua vida passou na Alemanha. Doutourou-se em Berlim em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas contribuições mais originais centram-se ao redor da provocativa palavra "infinito".

Diz-se que um conjunto S é infinito quando é semelhante a uma parte propria dele mesmo, caso contrario S se diz finito. Dois anos depois, Cantor casou-se, e na lua de mel foi a Interlaken, Suiça, onde o casal encontrou Dedekind.

No mesmo ano, 1874, Cantor publicou no Journal de Crelle um de seus artigos mais revolucionários. Como Dedekind, tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas ao contrário dele, Cantor viu que os conjuntos infinitos não são todos iguais.

No caso finito, dizemos que conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se podem ser postos em correspondência biunivoca. De maneira semelhante, Cantor se propos a construir conjuntos infinitos conforme a sua "potência".

O Conjunto dos quadrados perfeitos ou o conjunto dos números triangulares tem a mesma "potência" que o conjunto de todos inteiros positivos, pois eles podem ser postos em correspondência biunivoca. Esses conjuntos parecem menores que o conjunto de todas as frações racionais, no entanto, Cantor mostrou que também esse último conjunto é contável ou enumerável. Seguindo o caminho indicado podemos "contar" as frações:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \rightarrow & \frac{6}{1}\cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2}\cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3}\cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & & & & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

As frações racionais são tão densas, que entre duas delas, há sempre outra, no entanto Cantor mostrou que o conjunto das frações tem a mesma "potência" que a dos inteiros. Começa-se a pensar que os conjuntos infinitos tem a mesma "potência", porém Cantor provou categoricamente que isso não é verdade. O conjunto dos números reais, por exemplo, tem "potencia" maior que o conjunto das frações racionais. Assim, se supuzermos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais infinitos ($\frac{1}{3}$ seria expresso por 0,333..., $\frac{1}{2}$ por 0,4999..., e assim por diante) e que estejam dispostos em ordem:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots
\end{aligned}
$$

................................, onde a_{ij} é digito entre 0 e 9 inclusive.

Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluidos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as referidas anteriormente. Para isso, tomemos $b = 0, b_1 b_2 b_3 ...$, onde $b_K = 9$ se $a_{KK} = 1$ e $b_K = 1$ e $a_{KK} \neq 1$.

Esse número real estará entre 0 e 1 e no entanto será diferente de todos os do arranjo que se pressumia conter todos os números reais entre 0 e 1.

Mas isto é uma contradição de que todos os números do intervalo [0,1] tornassem um conjunto enumerável. Somos, pois, forçados a rejeitar essa hipótese e aceitar o fato que esse conjunto é não enumerável. Como o intervalo [0,1] é um subconjunto dos números reais, concluímos que também este conjunto é não enumerável.

Com esta descoberta, Cantor estabeleceu um fato surpreendente, qual seja, o de que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o dos conjuntos dos números inteiros e o conjunto dos números reais.

As descobertas de Cantor tiveram grande impacto no mundo matemático de fins do século passado e começo deste século. Neste momento, é bom lembrar que desde o início do século XIX era crescente a preocupação com o rigor na Análise Matemática. A partir de 1870, quando Cantor iniciava sua vida profissional, as atividades de pesquisa na área de axiomatização e fundamentos (estruturalismo) intensificavam-se rapidamente. E a sua Teoria dos Conjuntos, que então se desenvolvia, revelou-se muito adequada para ser o fundamento de toda a Matemática. Além disso, com o surgimento de novas disciplinas matemáticas, com a Topologia, a Álgebra Abstrata, a Teoria da Medida e Integração, a Teoria da Probabilidade, a Análise Funcional, entrelaçadas e de fronteiras indistinguiveis, onde a linguagem, a notação e os resultados da Teoria dos Conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho, a ponto de ser impossível conceber o desenvolvimento de toda essa matemática sem a "Teoria dos Conjuntos de Cantor".

Queremos tentar deixar claro neste artigo que a Teoria dos Conjuntos é uma disciplina cuja importância é dificil exagerar, não só para a Matemática, mas para o conhecimento humano de um modo geral.

Contudo, ela não é tão importante para o ensino de 1º e 2º graus, onde foi introduzida de maneira forçada e artificial.

Entendemos que, a razão fundamental para a introdução da Matemática no ensino básico (1º e 2º graus), repousa no fato de que ela fornece instrumentos efetivos para compreender, atuar e criar no mundo que nos cerca.

A Teoria dos Conjuntos, herança brasileira solitária do "modelo estruturalista bourbakiano americano" (Matemática Moderna), sob o ponto de vista do ensino, apresenta a Matemática, na maior parte dos casos, com um exagerado formalismo, escondendo e dissimulando os mecanismo de criação.

Além disso, as distorções das próprias idéias modernistas em mãos inexperientes causaram danos ao ensino da Matemática Moderna no Brasil, onde se dá ênfase às trivialidades de manejar conjuntos, insiste-se em nuances lingüísticas irrelevantes e estimula-se a mediocridade através de exercícios rebuscados sobre o conjunto vázio, comprometendo a criatividade.

Finalmente, na secção abaixo, construímos um subconjunto infinito e não enumerável contido no intervalo [0,1].

Este é o Conjunto de Cantor, "mais infinito" que o conjunto dos números inteiros e "tão perfeito" quanto o conjunto dos números reais.

CONJUNTO DE CANTOR

"Definição 0.1: Um conjunto K é um conjunto de Cantor se ele é fechado, totalmente disconexo e um subconjunto perfeito de I = [0,1]. Um conjunto é totalmente disconexo se ele não contém nenhum intervalo; um conjunto é perfeito se for igual ao seu conjunto derivado". Vamos definir um conjunto de Cantor, que também chamaremos por conjunto K de Cantor, usando-se uma expansão ternária. Tal expansão ternária é formalmente escrita por:

$0, a_1 a_2 a_3 \ldots . a_k \ldots \ldots,$ onde $a_k = 0, 1$ ou 2.

Esta expansão ternária representa o número para o qual a série

$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} converge.$

Exemplos 1/3 = 0,1000..., 1/3 = 0,0222...., 2/3 = 0,2000....

Lema 1.1

A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ converge para um número no intervalo [0,1].
Prova: De fato, temos:

$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \leq \sum_{k-1}^{\infty} 2 3^{-k} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} = 1.$

A reciproca deste resultado é dada pelo:

Lema 1.2

Todo número no intervalo [0,1] admite pelo menos uma expansão ternária.

Prova: Suponhamos que,$a \in [0,1)$, a fim de evitarmos o caso em que a = 1 = 0,222...; vamos definir, por indução em k, uma seqüência a_k da seguinte forma:

$a_1 = [3a]$, é o maior inteiro menor ou igual a 3a; se $a_1, a_2 ..., a_k$ estão definidos por hipóteses, seja $a^k = \sum_{n+1}^{k} a_n 3^{-n}$ tal que a_{k+1} é o maior inteiro menor ou igual a $3^{k+1}(a - a_k)$.

Desta forma é fácil ver que a_k poderá ser somente os inteiros 0,1 ou 2 e que a expansão ternária $0, a_1 a_2 a_3$ ..., representa o número a. Para tanto, mostraremos por indução em k que

$$a_k < 3, \qquad 3^k(a - a^k) < 1$$

e que conseqüentemente a^k converge para a quando k tender para ∞.

Como $a_1 = [3a]$ com $a \in [0,1)$ segue-se que $a_1 < 3$ e $(a - a^1) < \frac{1}{3}$, pois

$$a - a^1 = a - \frac{a_1}{3} = \frac{3a - a_1}{3} < \frac{1}{3}.$$

Temos que $a_k < 3$ e $3^k(a - a^k) < 1$ por hipótese de indução e então devemos mostrar que $a_{k+1} < 3$ e $3_{k+1}(a - a^{k+1}) < 1$.

Para tanto seja, $3^k(a - a^k) < 1$ tal que $33^k(a - a^k) < 3$. Como a_{k+1} é o maior ínteiro menor ou igual à $3^{k+1}(a - a^k)$ segue-se que $a_{k+1} < 3$.

Por outro lado temos ainda que

$$3^{k+1}(a - a^{k+1}) = 3^{k+1}(a - a^k) - 3^{k+1}(a^{k+1} - a^k) = 3^{k+1}(a - a^k) - a_{k+1} < 1.$$

Conseqüentemente a seqüência a^k, com $k \to \infty$ tende para o número a; isto é

$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$, o que demonstra o lema.

Definição 1.1: O conjunto K de Cantor é o conjunto de números reais no intervalo [0,1] que admite uma expansão ternária, $0, a_1 a_2 ... a_k ...$, onde a_k é ou 0 ou 2.

A definição 1.1 é equivalente a dizer que o conjunto K é o que resta do intervalo [0,1] depois da seguinte operação: retira-se o intervalo terço médio aberto (1/3,2/3).

Retira-se depois o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes [0,1/3] e [2/3,1]. Sobra então $[0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$.

Em seguida retira-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é um conjunto de Cantor.

Lema 1.3

Todo número $a \in K$ admite uma única expansão ternária, $0,a_1a_2...a_k...$, onde a_k é ou 0 ou 2.

Observação: Todo número real $a \in K$ tem somente uma expansão ternária, isto é, se um número tiver duas expansões ternárias uma delas necessariamente conterá o 1.

Prova: Pelo Lema 1.2, cada $a \in K$ admite uma expansão ternária. Suponhamos que $a = 0,a_1a_2...a_k... = 0,c_1c_2...c_k...$ e que exista um k tal que $a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_{k-1} = c_{k-1}, a_k - c_k = 1, c_j = 2, a_j = 0$ para $j > k$.

Seja k o menor inteiro tal que $a_k \neq c_k$.

Suponhamos que $a_k > c_k$. Por construção temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$$

$$a_k 3^{-k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-(k+j)} = c_k 3^{-k} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-(k+j)}$$

$$a_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = c_k + \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$$

$$a_k - c_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}, \text{ onde}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$ pertencem ao intervalo [0,1].

Portanto o primeiro membro da igualdade acima é no mínimo 1 e o segundo membro é no máximo 1.

Conseqüêntemente $a_k - c_k$ é um número inteiro no [0,1].

Se $a_k - c_k = 0$, $a_k = c_k$ é absurdo. Logo necessariamente temos que

$a_k - c_k = 1$ e portanto

$1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$, onde

$a_{k+j} = 0$ e $k + j = 2$ para $j = 1,2,...\infty$

Pelo Lema 1.2, temos

$a_k < 3$ e $c_k < 3$; e

como mostramos que $a_k - c_k = 1$ com $a_k > c_k$, segue-se que
i) $c_k = 0$ implica que $a_k = 1$
ii) $c_k = 1$ implica que $a_k = 2$
iii) $c_k = 2$ não pode ocorrer, e pela definição 1.1 segue-se a unicidade da representação.

FUNÇÃO TERNÁRIA DE CANTOR

Teorema 2.1

Seja F definida no conjunto K de Cantor com valores sobre o [0,1], por $F(0,a_1a_2...a_k...) = 0,b_1b_2...b_k...$ onde o lado direito é uma expansão binária com $b_k = 0$ se $a_k = 0$, $b_k = 1$ se $a_k = 2$. Então temos que:
a) F é contínua e monotona no intervalo [0,1].
b) F é constante em cada intervalo contido no conjunto complementar do conjunto de Cantor.

Prova: a) F é monotona por definição.
Mostraremos que F é contínua no intervalo [0,1]. Dado $\varepsilon > 0$, escolheremos k_0 tal que $2^{-k_0} < \varepsilon$, e para tanto, basta tomarmos δ tal que $\delta = 3^{-k_0}$.

Isto é, para x,y, com $x = 0,a_1a_2...a_k...$ $y = 0,c_1c_2...c_k...$ $a_i = c_i$ com i = 1,2,...k_0 tal que $|x-y| < \delta$ implica que

$$|F(x)-F(y)| = |\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \tfrac{b_n}{2^n} - \tfrac{b'_n}{2^n}| = |\sum_{n=k_0+1}^{\infty} (\tfrac{a_n}{2} - \tfrac{c_n}{2})2^{-n}| \leq \sum_{n=k_0+1}^{\infty} 2^{-n} =$$

$$\frac{2^{-(k_0+1)}}{1-\frac{1}{2}} \leq 2^{-k_0} < \varepsilon.$$

o que demonstra a continuidade da F no intervalo [0,1].
b) Seja (a,b) o intervalo aberto pertencente ao complementar de K no [0,1]; e mostraremos que F(a) = F(b).

Na k-ésima retirada de intervalos abertos do [0,1], seja (a,b) um intervalo tal que

$b - a = \frac{1}{3^k} = 0,00...01.$

Segue-se que necessariamente a e b são respectivamente da forma

$$a = 0,a_1a_2...a_{k-1}1 \quad \text{e} \quad b = 0,a_1a_2...a_{k-1}2.$$

Como a,b pertencem ao conjunto K de Cantor segue-se que

$F(a) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}1) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}0222....) = 0,c_1c_2...c_{k-1}01111...;$
$F(b) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}2) = 0,c_1c_2...c_{k-1}1$, onde $c_i = 0$ se $a_i = 0$ e
$c_i = 1$ se $a_i = 2$ e portanto $F(a) = F(b)$.

"Exemplo: Para $(a,b) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ temos:

$$F(\tfrac{1}{3}) = F(0,1) = F(0,0222...) = 0,0111... = \tfrac{1}{2} \text{ e } F(\tfrac{2}{3}) =$$

$$= F(0,2) = 0,1 = \tfrac{1}{2}."$$

Como F é monotônica segue-se que F é constante nos intervalos (a,b) pertencentes ao complementar do conjunto K de Cantor no intervalo [0,1].

Nestas condições, F é chamada de função ternária de Cantor.

Nestas condições é fácil ver que o conjunto K de Cantor é não contável e tem medida nula.

ABSTRACT

The idea of this work is to show how the set theory came on and some analytical properties of the Cantor set.

REFERÊNCIAS

(1) BOYER, C. História da Matemática, Editora Edgar Blűcher LTDA, 1974.

(2) KLINE, Morris "O Fracasso da Matemática Moderna", Editora IBRASA, SP, 1976.

(3) POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas, Editora Interciência, R.Janeiro, 1977.