УДК 519.872.3: 519.872.7

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ

В. А. Чекменев, ***Т. Д. Чекменева***

MULTICRITERIAL OPTIMIZATION OF PRIORITY QUEUEING SYSTEMS OPERATING AT COMPETITIVE INPUT FLOWS

V. A. Chekmenev, ***T. D. Chekmeneva***

В статье рассматривается подход к оптимизации функционирования систем обслуживания, основанный на принципах устойчивости, выгодности и справедливости при распределении заявок на обслуживание от разных клиентов. Ставится задача многокритериальной оптимизации, для решения которой применяются методы теории игр. Получены аналитические решения для ряда приоритетных систем обслуживания.

The paper describes an approach to optimizing the functioning of queueing systems based on the principles of sustainability, profitability and equity in the allocation of support requests from different clients. The multicriterial optimization problem is solved with methods of the theory of games. Analytical solutions for some priority queueing systems were obtained.

Ключевые слова: приоритетные системы массового обслуживания, динамический приоритет, многокритериальная оптимизация, теория игр.

Keywords: priority queueing systems, dynamic priority, multicriterial optimization, theory of games.

Введение

При исследовании информационных систем различного назначения и их оптимизации традиционно руководствуются принципом однозначности цели, т. е. качество функционирования рассматриваемой системы описывается одной и только одной целевой функцией. Однако существование конкуренции между входящими потоками информации, наличие неопределенностей, порождаемых стохастической природой поступающих в систему потоков, неполнотой знаний о состоянии каналов передачи, наличием нескольких целевых функций и т. п. требует новых подходов к исследованию и оптимизации таких систем. При этом основными чертами оптимальности следует считать интуитивные представления об устойчивости, выгодности и справедливости принимаемых решений для всех пользователей информационной или обслуживающей системы [1].

1. Марковская СМО с относительным приоритетом

Постановка задачи. Рассмотрим многолинейную систему массового обслуживания (СМО) с двумя классами относительных приоритетов. На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i ($i = 1,\ldots, n$). Требования каждого потока генерируются отдельным пользователем A_i ($i = 1,\ldots, n$). Пользователь A_i с вероятностью x_i ($0 \le x_i \le 1$) назначает свои требования приоритетными, а с вероятностью ($1 - x_i$) – неприоритетными. Время обслуживания требований на каждом приборе есть случайная величина с показательным законом распределения с параметром μ. В качестве показателя эффективности распределения заявок по приоритетам выбрана средняя стоимость ожидания обслуживания за единицу времени:

$$L_i(x_1,\ldots, x_n) = K_{i1}\lambda_i x_i\, M\{\gamma_1\} + K_{i2}\lambda_i (1 - x_i)\, M\{\gamma_2\}, \quad (i = 1,\ldots, n), \tag{1}$$

где $M\{\gamma_1\} = M\{\gamma_1(x_1,\ldots, x_n)\}$ – среднее время ожидания заявки в приоритетной очереди,

$M\{\gamma_2\} = M\{\gamma_2(x_1,\ldots, x_n)\}$ – среднее время ожидания заявки в неприоритетной очереди, K_{i1} и K_{i2} – стоимости ожидания за единицу времени для i-го пользователя ($i = 1,\ldots, n$) в приоритетной и неприоритетной очередях соотвественно.

На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по биномиальной схеме образуется два простейших потока к очередям:

– в приоритетную очередь с интенсивностью $\Lambda_1 = \sum \lambda_i x_i$;

– в неприоритетную очередь с интенсивностью $\Lambda_2 = \sum \lambda_i (1 - x_i)$.

Опираясь на известные результаты для систем с относительным приоритетом [2], функционирующих в стационарном режиме:

$\frac{\Lambda_1}{m\mu} < 1,\ \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{m\mu} < 1$ (m – число обслуживающих приборов), получим выражения для среднего времени ожидания заявок в приоритетной и неприоритетной очередях:

$$M\{\gamma_1\} = \frac{C(m)}{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i};\ M\{\gamma_2\} = \frac{C(m)}{(1 - \rho/m)(1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i)},$$

где

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \qquad \rho = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{\mu},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i = \frac{\Lambda_1}{\mu}, \quad \rho = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{\mu} = \sum_{i=1}^{n}\rho_i,$$

$$C(m) = \{m\mu\,[(m-1)!\,(m-\rho)\rho^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!} + 1]\}^{-1}.$$

Тогда функции потерь (1) можно записать в виде:

$$L_i(x_1,...,x_n) = \\ = \lambda_i C(m)\frac{K_{i1}x_i + K_{i2}(1-x_i)/(1-\rho/m)}{1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\rho_k x_k},$$

$i = 1,...,n.$

Ставится задача: найти оптимальное распределение $(x_1^*,...,x_n^*)$ заявок по приоритетам для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за скорость обслуживания. Таким образом, получаем многокритериальную задачу оптимизации, которая формулируется как задача теории игр.

Оптимизация. Так как пользователи формируют свои приоритеты независимо друг от друга, и каждый стремится минимизировать лишь собственные потери на ожидание обслуживания, то задачу оптимизации можно сформулировать в виде бескоалиционной игры n лиц: $\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{L_i\}_{i\in I}\rangle$,
где I – множество игроков (пользователей), $X_i = [0,1]$ – множество стратегий i-го игрока, $i = 1,...,n$,

$L_i(x_1,...,x_n)$ – функция потерь i-го игрока, $x_i \in X_i$, $i = 1,...,n$.

Одной из форм реализации представления об *устойчивости* можно считать понятие равновесия [1], состоящее в следующем: ситуация $x^* = (x_1^*,..., x_n^*)$ называется равновесной, если ни один из игроков не заинтересован отклониться от нее, т. е. для любых $i\in I$ и $x_i\in X_i$ справедливо:

$$L_i(x_1^*,..., x_i^*,..., x_n^*) \le L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*).$$

Так как функции потерь Li (x1*,…, xi – 1*, xi , xi + 1*,…, xn*) непрерывно дифференцируемы по xi ∈ Xi, то для нахождения ситуации равновесия, являющейся внутренней точкой множества стратегий, можно воспользоваться необходимыми условиями экстремума:

$$\frac{\partial L_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*)}{\partial x_i} = 0, \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,...,n. \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*)}{\partial x_i^2} \ge 0,\ i = 1,...,n. \qquad (3)$$

Для рассматриваемой СМО условия (2) с помощью элементарных преобразований можно представить в виде системы линейных уравнений по переменным (x1,…, xn):

$$\frac{1}{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\rho_k x_k = \frac{K_{i1}(1-\rho/m) - K_{i2}(1-\rho_i/m)}{K_{i1}(1-\rho/m) - K_{i2}}, \qquad (4)$$

$i = 1,...,n.$

Так как определитель матрицы коэффициентов при x_k не равен нулю, то линейная алгебраическая система (4) имеет единственное решение, полученное (методом математической индукции) в виде:

$$x_i^* = m\frac{\sum_{k=1,k\neq i}^{n} d_k - (n-2)d_i}{(n-1)\rho_i} = m\frac{\sum_{k=1}^{n} d_k - (n-1)d_i}{(n-1)\rho_i},\ i = 1,...,n, \qquad (5)$$

где через d_i обозначены правые части уравнений системы (4).

Данное решение получено с помощью необходимого условия экстремума (2). Так как величины d_i зависят от коэффициентов K_{i1}, K_{i2}, то становится обязательным рассмотрение достаточных условий. Достаточные условия (3) существования ситуации равновесия можно преобразовать к виду:

$$\frac{K_{i1}}{K_{i2}} > \frac{1-\rho_i/m}{1-\rho/m}, \quad i = 1,...,n. \qquad (6)$$

Соотношение (6) показывает ограничения, которые необходимо накладывать на стоимостные коэффи-циенты K_{i1} и K_{i2}, чтобы можно было получить оптимальное распределение заявок по приоритетам, минимизирующее затраты каждого игрока.

Очевидно, решения (5) при выполнении условий (6) должны также принадлежать допустимой области: $x_i\in X_i$ = [0, 1]. Условия принадлежности ($0 < x_i^* < 1$) получены в виде:

$$\max_{i\in I}\{d_i\} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n-1} \le \min_{i\in I}\{d_i + \rho_i/m\}.$$

Парето-оптимальность отражает свойства *выгодности* принимаемого решения.

Ситуация $x^* = (x_1^*,..., x_n^*)$ называется Парето-оптимальной, если не существует ситуации $x \in X = \prod_1^n [0,\ 1]$, для которой имеет место векторное неравенство $L_i(x^*) \ge L_i(x)$, $i = 1,..., n$. Однако для рассматриваемого типа СМО ситуация равновесия x^* не всегда будет является Парето-оптимальной, так как значения функций потерь игроков $L_i(x_1,...,x_n)$ зависят от стоимостных параметров K_{i1}, K_{i2} (i=1,..., n). Парето-оптимальность будет зависеть от условий, налагаемых на K_{i1} , K_{i2} (i=1,..., n) и параметры системы. Достаточными условиями Парето-оптимальности будут условия минимальности функции

$$L(x) = \alpha\sum_{i=1}^{n} L_i(x),\ \alpha > 0\ [3].$$

Рассматривая $L(x)$ с учетом (4) в виде:

$$L(x) = \alpha C(m)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{K_{i1}x_i + K_{i2}(1-x_i)/(1-\rho/m)}{1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\rho_k x_k} =$$

$$= \alpha C(m)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{K_{i1}x_i + K_{i2}(1-x_i)/(1-\rho/m)}{1-\frac{1}{m}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k x_k - \frac{1}{m}\rho_i x_i} =$$

$$= \alpha C(m)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{K_{i1}/K_{i2}x_i + (1-x_i)/(1-\rho/m)}{K_{i2}\left(1-d_i-\frac{1}{m}\rho_i x_i\right)},$$

найдем, что в точке её минимума должны выполняться условия (необходимые и достаточные):

$$\frac{K_{i1}}{K_{i2}} = \frac{1}{1-\rho/m}\left(1-\frac{\rho_i/m}{1-d_i}\right);$$

$$\frac{K_{i1}}{K_{i2}} > \frac{1-d_i-\rho_i/m}{(1-d_i)(1-\rho/m)}.$$

Таким образом, найдено оптимальное распределение $(x_1^*,...,x_n^*)$ заявок по приоритетам, зависящее от стоимостных параметров ожидания K_{i1}, K_{i2} (i=1,..., n) и получены устойчивые решения многокритериальной задачи оптимизации (1).

2. Полумарковская СМО с относительным приоритетом

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную СМО с двумя классами относительных приоритетов. На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i от разных пользователей A_i (i = 1,…, n). Пользователь A_i с вероятностью x_i ($0 \le x_i \le 1$) назначает свои требования приоритетными, а с вероятностью $(1- x_i)$ – неприоритетными. Время обслуживания требований на каждом приборе есть случайная величина с произвольным законом распределения с первыми двумя моментами a и b соответственно. Показатель эффективности распределения заявок по приоритетам – средняя стоимость ожидания обслуживания за единицу времени (см. п. 1):

$$L_i(x_1,\dots,x_n) = K_{i1}\lambda_i x_i\,\mathrm{M}\{\gamma_1\} + K_{i2}\lambda_i(1-x_i)\,\mathrm{M}\{\gamma_2\},$$
$$(i = 1,\dots,n).$$

На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по биномиальной схеме также образуется два простейших потока к очередям интенсивностей Λ_1 и Λ_2: $\Lambda_1 = \sum \lambda_i x_i$, $\Lambda_2 = \sum \lambda_i (1-x_i)$, для которых условие стационарности имеет вид: $\Lambda_1 a < 1,\ \Lambda_1 a + \Lambda_2 a < 1$.

Опираясь на известные результаты для СМО с относительным приоритетом, функционирующих в стационарном режиме [2], получим выражения для среднего времени ожидания заявок в приоритетной и неприоритетной очередях:

$$M\{\gamma_1\} = \frac{\Lambda_1 b + \Lambda_2 b}{2(1-\Lambda_1 a)} = \frac{\lambda b}{2(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i x_i)};$$

$$M\{\gamma_2\} = \frac{\Lambda_1 b + \Lambda_2 b}{2(1-\Lambda_1 a)(1-\Lambda_1 a - \Lambda_2 a)} =$$
$$= \frac{\lambda b}{2(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i x_i)(1-\rho)},$$

где $\rho_i = \lambda_i a,\ \rho = \Sigma\rho_i,\ \lambda = \sum \lambda_i$.

Тогда функции потерь $L_i(x_1,\dots,x_n)$ можно записать в виде:

$$L_i(x_1,...,x_n) =$$
$$= \frac{\lambda_i \lambda b}{2(1-\rho)} \frac{K_{i1}x_i(1-\rho) + K_{i2}(1-x_i)}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k x_k},$$
$$i = 1,...,n.$$

Ставится задача: найти оптимальное распределение $(x_1^*,...,x_n^*)$ заявок по приоритетам для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за скорость обслуживания.

Оптимизация. Аналогично п. 1 рассмотрим задачу оптимизации в виде бескоалиционной игры n лиц и найдем ситуацию равновесия с помощью необходимых условий экстремума из системы линейных уравнений по переменным (x1,…, xn):

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \rho_k x_k =$$
$$= \frac{K_{i1}(1-\rho) - K_{i2}(1-\rho_i)}{K_{i1}(1-\rho) - K_{i2}}, \qquad (6).$$
$$i = 1,...,n.$$

Решение данной системы получено в виде:

$$x_i^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k - (n-1)d_i}{(n-1)\rho_i}, \quad i = 1,...,n,$$

где di – правые части уравнений системы (6). Получены условия принадлежности (xi ∈ Xi):

$$\max_{i\in I}\{d_i\} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k}{n-1} \le \min_{i\in I}\{d_i + \rho_i\},$$

а также достаточные условия равновесности:

$$\frac{K_{i1}}{K_{i2}} > \frac{1-\rho_i}{1-\rho}, \quad i = 1,..., n.$$

Для рассматриваемой СМО ситуация равновесия x^* также не всегда является Парето-оптимальной.

3. Марковская СМО с динамическим приоритетом

При анализе систем массового обслуживания, функционирующих в условиях большой загрузки, целесообразно использовать асимптотические методы, т. е. заменять исходный процесс функционирования СМО другим асимптотически эквивалентным процессом. Динамический приоритет описывается вероятностью выбора одной из очередей, которая зависит от состояния системы.

Постановка задачи. Дана однолинейная система массового обслуживания с динамическим приоритетом [4], на вход которой поступают n простейших потоков требований интенсивности λ_k (k = 1,…, n) от n независимых пользователей. Распределение времени обслуживания – показательное с параметром μ. Система функционирует в условиях большой загрузки: $\rho = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\mu} \to 1$. Если заявка поступила в очередь на обслуживание, то она обязательно дождется своего обслуживания, независимо от того, какие экономические потери при этом будет нести система и сама заявка. Состояния системы описываются однородным марковским процессом $\{(i_1(t),\ldots, i_n(t)\}$, где $i_k(t)$ – число требований, стоящих в момент времени t в k-й очереди. Рассматривая функционирование данной СМО в стационарном режиме, определим правило выбора требования на прибор в момент окончания обслуживания величиной $\delta_k\,(i_1,\ldots, i_n)$ – условной вероятностью того, что на прибор необходимо поставить требование из k-й очереди при условии, что система находится в состоянии $(i_1,\ldots, i_k,\ldots, i_n)$. Качество функционирования СМО оценивается с точки зрения каждого пользователя и задается (определяется) средними потерями за единицу времени:

$$L_k(i_1,\ldots, i_n) = \Sigma\, G_k\,(i_k)\, P(i_1,\ldots, i_n),\quad k = 1,\ldots, n,$$

где $G_k\,(i_k)$ – потери k -го пользователя за единицу времени;

$P(i_1,\ldots, i_n)$ – стационарное распределение вероятностей состояний системы, зависящее от $\delta_k\,(i_1,\ldots, i_n)$.

Требуется найти такие $\delta_k\,(i_1,\ldots, i_n)$, которые доставляли бы минимум средних потерь для каждого пользователя. Таким образом, получаем многокритериальную задачу оптимизации.

Анализ системы. Зададим правило выбора заявки k -го потока на обслуживание в виде:

$$\delta_k(i_1,...,i_n) = \\ =\begin{cases} 1,\ если\ i_{l\neq k} < f_l(f_k^{-1}(i_k)), & l=1,...,n; \\ 0\ \ в\ \ остальных\ \ случаях; & \text{k=1,...n.}\end{cases}$$

Здесь $f_l\,(s)$ – границы изменения управления, заданные в параметрической форме, $s = \Sigma i_l$ – положительный параметр, $f_l\,(s)$ – монотонно возрастающая функция, подлежащая определению.

Для стационарных состояний однородного марковского процесса $\{(i_1(t),\ldots, i_n(t)\}$ имеет место бесконечная (нет ограничений на очереди) система уравнений Колмогорова относительно вероятностей его состояний $P(i_1,\ldots, i_n)$:

$$\left(\sum \lambda_l + \mu\right) P(i_1,...,i_n) = \\ = \sum_{l=1}^{n} \begin{bmatrix} \lambda_l P(i_1,...,i_l-1,...,i_n) + \\ +\mu P(i_1,...,i_l+1,...,i_n)\delta_k(i_1,...,i_n) \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$$i_k > 0, \quad k = 1,...,n.$$

Для решения этой системы воспользуемся асимптотическим анализом (методом асимптотической аппроксимации). Будем полагать, что в условиях большой загрузки ($\rho = \Sigma\lambda_k\,/\,\mu\uparrow 1$) существует параметр $\varepsilon(\rho)\downarrow 0$ такой, что величины $i_k\varepsilon$ сходятся по распределению к непрерывным случайным величинам x_k с совместной плотностью распределения вероятности $p(x_1,\ldots, x_n)$. Тогда вероятность $\delta_k\,(i_1,\ldots, i_n)$ заменяется вероятностью $\delta_k\,(x_1,\ldots, x_n)$:

$$\delta_k(x_1,...,x_n) = \\ =\begin{cases} 1,\ если\ x_{l\neq k} < f_l(f_k^{-1}(x_k)), & l=1,...,n; \\ 0\ \ в\ \ остальных\ \ случаях; & \text{k=1,...n,}\end{cases}$$

а исходные целевые функции $L_k(i_1,\ldots, i_n)$ – функциями непрерывных переменных $L_k(x_1,\ldots, x_n)$.

При этом непрерывным аналогом системы уравнений (7) будет уравнение Фоккера-Планка относительно плотности $p(x_1,\ldots, x_n)$:

$$\sum_{l=1}^{n} [\varepsilon^2 \frac{\mu\delta_l + \lambda_l}{2} \frac{\partial^2 p(x_1,...,x_n)}{\partial x_l^2} + \\ +\varepsilon(\mu\delta_l - \lambda_l)\frac{\partial p(x_1,...,x_n)}{\partial x_l}] = 0 \qquad (8)$$

с нулевыми граничными условиями. Для нахождения $p(x_1,\ldots, x_n)$ необходимо решить уравнение (8).

Метод решения [5]. Динамический приоритет $\delta_k\,(x_1,\ldots, x_n)$ разбивает пространство состояний на n непересекающихся областей. В каждой k-й области $\{\delta_{l=k} = 1,\ \delta_{l\neq k} = 0\}$ $(k = 1,\ldots, n)$ уравнение Фоккера-Планка решается с помощью перехода к специальной системе координат вида:

$$\{\varphi = \Sigma x_l,\ t_k = (x_k - f_k(\varphi))/\varepsilon,\ x_l = x_{l\neq k},\ l = 1,\ldots, n\}. \quad (9)$$

Этот переход преобразует уравнение (8) к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\pi_k(\varphi,t_k)$. Решения этих уравнений получим в виде:

$$\pi_k(\varphi,t_k) = A(\varphi)\exp\{-\alpha_k t_k\},\ k = 1,\ldots, n, \qquad (10)$$

где α_k – коэффициенты уравнений при первой производной. Для нахождения неизвестной функции $A(\varphi)$ производится обратный переход к переменным $(x_1,\ldots, x_n)$ и используется интегральное условие равенства плотности распределения суммы компонент n-мерной случайной величины с плотностью $p(x_1,\ldots, x_n)$ и асимптотической плотности распределения одномерного случайного процесса $\{x_1(t) + \ldots + x_n(t)\}$ [6]:

$$\int\ldots\int_{\sum_{j=1}^{n} x_j=\varphi} p(x_1,\ ...,\mathrm{x_n})dx_1...dx_n = e^{-\varphi}.$$

Интеграл разбивается на n слагаемых по n непересекающимся областям; функция $A(\varphi)$ – множитель первообразной каждого интеграла по k-й области $\{\delta_{l=k} = 1,\ \delta_{l\neq k} = 0\}$ $(k = 1,\ldots, n)$. Выписывая выражения (10) для каждой из n областей, можно записать выражение для $p(x_1,\ldots, x_n)$ в параметрической форме.

В работе [7] рассмотрен частный случай анализа СМО с динамическим приоритетом с тремя входящими потоками ($n = 3$), где получен явный вид плотности $p(x_1,\ldots, x_n)$ и сделаны выводы о точности полученных асимптотических формул.

Оптимизация. Одним из простейших способов решения многокритериальной оптимизационной задачи является свертка критериев, т. е. сведение задачи к однокритериальной:

$L\,(x_1,\ldots, x_n) = \Sigma L_k(x_k)$, $k = 1,\ldots, n$.

Тогда средние потери запишутся в виде:

$$\mathrm{M}L(x_1,\ldots, x_n) = \int\ldots\int F(x_1,\ldots, x_n)\, p(x_1,\ldots, x_n)\, dx_1,\ldots, dx_n,\ k = 1,\ldots, n,$$

где $F(x_1,\ldots, x_n) = \Sigma L_k(x_k)$.

Предствляя данное выражение для средних потерь в виде суммы n интегралов по n областям $\{\delta_{l=k} =$

1, $\delta_{l\neq k} = 0\}$ ($k = 1,\ldots, n$) и снова переходя к переменным (9), получим:

$$L(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\varphi, \varepsilon t_k + f_k(\varphi))\pi_k(\varphi, t_k)dt_k d\varphi,$$

где

$$F(\varphi, \varepsilon t_k + f_k(\varphi)) =$$

$$= \int_0^{f_1(\varphi)} \ldots \int_0^{f_{n-2}(\varphi)} F(x_1,\ldots,\varepsilon t_k + f_k, x_{n-2},$$

$$\varphi - (\varepsilon t_k + f_k) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-2} x_i)dx_1\ldots dx_{n-2}.$$

Интегрируя L ($x_1,\ldots, x_n$) по t_k и применяя методы вариационного исчисления, можно определить $f_k(\varphi)$ из системы уравнений Эйлера. Функции $f_k(\varphi)$ определяют искомое управление δ_k ($i_1,\ldots, i_n$), доставляющее минимум функционалу $L=L(f(\varphi))$.

В предложенной статье рассмотрены системы массового обслуживания с различными видами приоритетов в обслуживании заявок, получены аналитические результаты для анализа и оптимизации этих систем в условиях конкуренции пользователей за ресурсы обслуживания.

Литература

1. Воробьев, Н. Н. Теория игр / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
2. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М., 1989. – 2 т. – 421 с.
3. Вилкас, Э. И. Оптимальность в играх и решениях / Э. И. Вилкас. – М: Наука, 1990. – 256 с.
4. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
5. Назаров, А. А. Анализ и оптимизация системы массового обслуживания с динамическими по числу требований приоритетами при большой загрузке / А. А. Назаров, В. А. Чекменев. – Автоматика и телемеханика, 1984. – № 10. – С. 78 – 87.
6. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
7. Антропов, М. С. Анализ системы массового обслуживания с динамическими по числу требований приоритетами при большой загрузке / М. С. Антропов, В. А. Чекменев. – Вестник КузГТУ, 2003. – № 4. – С. 6 – 8.

Информация об авторах:

Чекменев Владимир Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики математического факультета КемГУ.

Vladimir A. Chekmenev – Candidate of Technical science, Associate Professor, Assistant Professor at the Department of Investigations Automation and Technical Cybernetics, Kemerovo State University.

Чекменева Татьяна Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общей и региональной экономики экономического факультета КемГУ, 8-923-612-4890, chtd42@yandex.ru.

Tatyana D. Chekmeneva **–** Candidate of Technical science, Associate Professor, Assistant Professorat the Department of General and Regional Economics, Kemerovo State University.

Статья поступила в реколлегию 14.10.2013 г.