УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

И. Р. Гарайшина, М. С. Лобова, А. А. Назаров

INVESTIGATION OF THREE-PHASE QUEUING SYSTEMS WITH THE METHOD OF SIFTED FLOW

I. R. Garayshina, M. S. Lobova, A. A. Nazarov

Работа поддержана РФФИ, проект №11-01-90712-моб_ст.

Для исследования трёхфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и с входящим МАР-потоком предлагается использовать метод просеянного потока и метод асимптотического анализа в условиях растущего времени обслуживания. Найдены асимптотики первого и второго порядка.

To investigate the three-phase queuing system with an unlimited number of devices and the input MAP-flow, the authors of the paper suggest using the method of sifted flow and the method asymptotic analysis in the face of increasing service time. Asymptotics of the first and second order were discovered.

Ключевые слова: страховая компания, пенсионное страхование, метод просеянного потока, метод асимптотического анализа.

Keywords: insurance company, pension insurance, method of sifted flow, the method of asymptotic analysis.

Системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов являются моделями реальных систем в различных сферах повседневной жизни: банковское дело, страхование, транспорт, торговля и т. д.

Пусть страховая компания (например, негосударственный пенсионный фонд) заключает договоры пенсионного страхования, страховым случаем по которым является достижение определенного (пенсионного) возраста. Рассмотрим процесс изменения численности клиентов компании по данному виду страхования. Выделим три группы:

1) потенциальные клиенты, в число которых включаем всех лиц от рождения до момента заключения договора;

2) клиенты, выплачивающие страховые взносы;

3) клиенты, получающие пенсионные выплаты. Процесс изменения числа застрахованных лиц можно представить в виде математической модели системы массового обслуживания.

1. Математическая модель

Рассмотрим трёхфазную систему массового обслуживания. Полагаем, что на вход системы поступает МАР-поток заявок. Случайный поток однородных событий будем называть МАР-потоком, управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний $k = 1, 2, \ldots, K$, если выполняются равенства

$$P\{m(t+\Delta t) = m+1 \mid m(t) = m,\ k(t) = v\} = \lambda_v \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{m(t+\Delta t) > m+1 \mid m(t) = m,\ k(t) = v\} = o(\Delta t),$$
$$P\{m(t+\Delta t) = m+1,\ k(t+\Delta t) = v \mid m(t) = m,\ k(t) = v\} = d_{vk} q_{vk}\, \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{m(t+\Delta t) = m,\ k(t+\Delta t) = v \mid m(t) = m,\ k(t) = k\} = (1-d_{vk}) q_{vk}\, \Delta t + o(\Delta t),$$

здесь $m(t)$ – число событий рассматриваемого потока, наступивших за время t; $\lambda_k \geq 0$ – условные интенсивности наступления событий в потоке в течение пребывания цепи Маркова в состоянии k; q_{vk} – элементы инфинитезимальной матрицы $\mathbf{Q}$, имеющие смысл интенсивностей вероятностей перехода потока из состояния v в состояние k; d_{vk} – вероятность того, что в момент перехода цепи Маркова из состояния v в состояние k наступает ещё одно событие. [1, с. 159]

Будем считать, что продолжительности обслуживания заявки на первой, второй и третьей фазах являются независимыми случайными величинами τ_1, τ_2, τ_3, имеющими заданные функции распределения, одинаковые для всех приборов одной фазы, которые обозначим $B_1(x)$, $B_2(x)$ и $B_3(x)$ соответственно.

Завершив обслуживание на первой фазе, заявка с вероятностью r_1 переходит на вторую фазу, то есть с указанной вероятностью с потенциальным клиентом компании будет заключён договор страхования или с вероятностью $1-r_1$ заявка покидает систему. Закончив обслуживание на второй фазе, заявка с вероятностью r_2 переходит на третью фазу, что соответствует ситуации, когда клиент компании, выплачивающий страховые взносы, начинает получать пенсионные выплаты или с вероятностью $1-r_2$ заявка покидает систему, то есть клиент не доживает до пенсионного возраста. Закончив обслуживание на третьей фазе, заявка покидает систему (рис.). Под окончанием обслуживания мы понимаем смерть застрахованного или окончание срока действия договора.

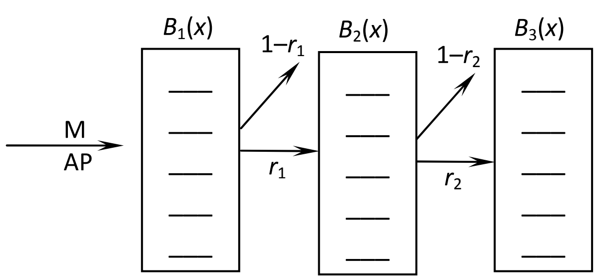

Рис. ***Трехфазная система обслуживания с неограниченным числом приборов***

Обозначим i_k – число заявок, находящихся на обслуживании на k-ой фазе, и рассмотрим трёхмерный случайный процесс изменения во времени величин i_k, то есть процесс $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$. Для исследования данного процесса применим метод просеянного потока. В настоящее время метод просеянного потока применяется преимущественно для исследования потоков случайных событий [2, 3] и однофазных систем массового обслуживания [3, 4]. Использование метода просеянного потока для исследования многофазных систем массового обслуживания с простейшим входящим потоком приведены в [5; 6; 7].

2. Метод просеянного потока

Для выделения интересующих нас «просеянных» заявок поступим следующим образом. Зафиксируем некоторый момент времени t_1 и, для определённости, будем считать, что $t_1 = 0$. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1 = 0$, с вероятностью $S_1(t) = 1 - B_1(-t)$ формирует событие первого просеянного потока и в момент времени t_1 будет находиться в системе на первой фазе обслуживания, а с вероятностями $r_1 S_2(t)$ и $r_1 r_2 S_3(t)$, значения которых определим ниже, формирует события второго или третьего просеянных потоков и в момент времени t_1 будет находиться в системе на второй или третьей фазе обслуживания соответственно. Заявки, не попавшие в просеянные потоки, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1.

Обозначим $n_k(t)$ – число событий k-го просеянного потока. Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система была пуста, то в момент времени t_1 выполняются равенства:

$i_l(t_1) = n_l(t_1)$, $l = 1, 2, 3$.

Определим, с какой вероятностью заявка, поступающая в момент времени $t < t_1$, формирует событие второго просеянного потока. Очевидно, что в этом случае значение случайной величины $\tau_1 + \tau_2$ – суммарного времени пребывания заявки в системе должно быть больше $-t$. Учитывая, что за время $-t$ должно быть завершено обслуживание на первой фазе, получаем:

$$S_2(t) = P(\tau_1 < -t, \tau_1 + \tau_2 > -t) =$$
$$= \int_0^{-t} P(y \le \tau_1 < y + dy, y + \tau_2 > -t)dy =$$
$$= \int_0^{-t} P(y \le \tau_1 < y + dy)P(\tau_2 > -(t + y))dy =$$
$$= \int_0^{-t} [1 - B_2(-(t + y))]dB_1(y).$$

Далее найдем величину $S_3(t)$, определяющую вместе с r_1 и r_2 вероятность того, что поступившая заявка формирует событие третьего просеянного потока. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$S_3(t) = P(\tau_1 + \tau_2 < -t, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 > -t) =$$
$$= \int_0^{-t} P(y \le \tau_1 + \tau_2 < y + dy, y + \tau_3 > -t)dy =$$
$$= \int_0^{-t} P(y \le \tau_1 + \tau_2 < y + dy)P(\tau_3 > -(t + y))dy =$$
$$\int_0^{-t} [1 - B_3(-(t + y))]dB_{\tau_1+\tau_2}(x),$$

где $B_{\tau_1+\tau_2}(x)$ – функция распределения случайной величины $\tau_1 + \tau_2$, $B_{\tau_1+\tau_2}(x) = \int_0^x B_1(x - y)dB_2(y)$.

Для распределения вероятностей $P(k, n_1, n_2, n_3) = P\{k(t) = k, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3\}$ система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{\partial P(k,n_1,n_2,n_3,t)}{\partial t} =$$
$$= \lambda_k S_1(t)\big(P(k,n_1-1,n_2,n_3,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ \lambda_k r_1 S_2(t)\big(P(k,n_1,n_2-1,n_3,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ \lambda_k r_1 r_2 S_3(t)\big(P(k,n_1,n_2,n_3-1,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ q_{kk} P(k,n_1,n_2,n_3,t) +$$
$$+ \sum_{v\ne k} q_{vk} \{P(v,n_1,n_2,n_3,t) + d_{vk}\,[S_1(t)(P(v,n_1-1,n_2,n_3,t) -$$
$$- P(v,n_1,n_2,n_3,t)) +$$
$$+ r_1 S_2(t)\big(P(v,n_1,n_2-1,n_3,t) - P(v,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ r_1 r_2 S_3(t)\big(P(v,n_1,n_2,n_3-1,t) - P(v,n_1,n_2,n_3,t))\big]\}.$$

Полагая, что $d_{kk} = 0$, эту систему можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial P(k,n_1,n_2,n_3,t)}{\partial t} = \lambda_k S_1(t)\big(P(k,n_1-1,n_2,n_3,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ \lambda_k r_1 S_2(t)\big(P(k,n_1,n_2-1,n_3,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ \lambda_k r_1 r_2 S_3(t)\big(P(k,n_1,n_2,n_3-1,t) - P(k,n_1,n_2,n_3,t)\big) +$$
$$+ \sum_{v} q_{vk} \{P(v,n_1,n_2,n_3,t) + d_{vk}\,[S_1(t)(P(v,n_1-1,n_2,n_3,t) - P(v,n_1,n_2,n_3,t)) +$$
$$+ r_1 S_2(t)\big(P(v,n_1,n_2-1,n_3,t) - P(v,n_1,n_2,n_3,t)\big) + r_1 r_2 S_3(t)\big(P(v,n_1,n_2,n_3-1,t) - P(v,n_1,n_2,n_3,t))\big]\}. \quad (1)$$

Обозначив

$$H(k,u_1,u_2,u_3,t)=\sum_{\substack{n_1=0,n_2=0,\\ n_3=0}}^{\infty} e^{jn_1u_1+jn_2u_2+jn_3u_3}P(k,n_1,n_2,n_3,t),$$

из (1) получим задачу Коши:

$$\frac{\partial H(k,u_1,u_2,u_3,t)}{\partial t}=\lambda_k H(k,u_1,u_2,u_3,t)\Big\{S_1(t)(e^{ju_1}-1)+r_1S_2(t)(e^{ju_2}-1)+$$
$$+r_1r_2S_3(t)(e^{ju_3}-1)+\sum_{\nu}\Big[1+d_{\nu k}\big(S_1(t)(e^{ju_1}-1)+r_1S_2(t)(e^{ju_2}-1)+r_1r_2S_3(t)(e^{ju_3}-1)\big)\Big]q_{\nu k}\Big\},$$

$$H(k,u_1,u_2,u_3,t_0)=R(k).$$

Запишем эту задачу в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)\Big[\mathbf{Q}+\big(S_1(t)(e^{ju_1}-1)+r_1S_2(t)(e^{ju_2}-1)+r_1r_2S_3(t)(e^{ju_3}-1)\big)\mathbf{B}\Big],$$
$$\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t_0)=\mathbf{R}, \tag{2}$$

где $\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)=\{H(1,u_1,u_2,u_3,t),H(2,u_1,u_2,u_3,t),...\}$; $\mathbf{R}=\{R(1),R(2),...\}$ – вектор-строка стационарного распределения управляющей цепи Маркова; **B** – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{\nu k}q_{\nu k}$ вне главной диагонали.

Задачу (2), определяющую характеристики рассматриваемой системы обслуживания, будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, полагая, что $b_l\to\infty$ (l = 1, 2, 3), здесь b_l – среднее значение времени обслуживания на l-ой фазе. При этом $b_1/b_l=q_l$, где q_l – некоторые положительные конечные величины.

3. Асимптотика первого порядка

Обозначив $1/b_1=\varepsilon$, $1/b_l=\varepsilon q_l$, выполним следующие замены: $t\varepsilon=\tau$, $t_0\varepsilon=\tau_0$, $S_l(t)=S_l^*(\tau)$ (l = 1, 2, 3), $u_1=\varepsilon x$, $u_2=\varepsilon y$, $u_3=\varepsilon z$, $\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)=\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)$, в результате чего получим для $\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)$ следующую систему уравнений:

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)\Big[\mathbf{Q}+\big(S_1^*(\tau)(e^{j\varepsilon x}-1)+r_1S_2^*(\tau)(e^{j\varepsilon y}-1)+r_1r_2S_3^*(\tau)(e^{j\varepsilon z}-1)\big)\mathbf{B}\Big]. \tag{3}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.

Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}(x,y,z,\tau)$, то

$$\mathbf{F}(x,y,z,\tau)=\mathbf{R}\exp\left[jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)dv+jy\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}r_1S_2^*(v)dv+jz\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}r_1r_2S_3^*(v)dv\right], \tag{4}$$

где величина κ_1 определена равенством

$$\kappa_1=\mathbf{RBE}, \qquad 5)$$

в котором **E** – единичный вектор-столбец.

Доказательство:

Выполнив в системе (3) предельный переход при $\varepsilon\to0$, получим, что $\mathbf{F}(x,y,z,\tau)$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$\mathbf{F}(x,y,z,\tau)\mathbf{Q}=0$,

поэтому ее решение имеет вид:

$$\mathbf{F}(x,y,z,\tau)=\Phi(x,y,z,\tau)\mathbf{R}, \tag{6}$$

в котором скалярную функцию $\Phi(x,y,z,\tau)$ определим следующим образом. Суммируя все уравнения системы (3), запишем:

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)\Big[S_1^*(\tau)(e^{j\varepsilon x}-1)+r_1S_2^*(\tau)(e^{j\varepsilon y}-1)+r_1r_2S_3^*(\tau)(e^{j\varepsilon z}-1)\Big]\mathbf{BE}.$$

Поделим левую и правую части равенства на ε и, полагая $\varepsilon\to0$, получим, что для $\mathbf{F}(x,y,z,\tau)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x,y,z,\tau)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\mathbf{F}(x,y,z,\tau)\Big[jxS_1^*(\tau)+jyr_1S_2^*(\tau)+jzr_1r_2S_3^*(\tau)\Big]\mathbf{BE},$$

подставляя в которое выражение (4) и принимая во внимание равенство (5) и то, что **RE** = 1, получим для функции $\Phi(x,y,z,\tau)$ систему:

$$\frac{\partial\Phi(x,y,z,\tau)}{\partial\tau}=\Phi(x,y,z,\tau)\left[jx\kappa_1 S_1^*(\tau)+jyr_1\kappa_1 S_2^*(\tau)+jzr_1r_2\kappa_1 S_3^*(\tau)\right],$$

решение которой при начальном условии $\Phi(x, y, z, \tau_0) = 1$ имеет вид:

$$\Phi(x,y,z,\tau)=\exp\left[jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)dv+jy\kappa_1 r_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)dv+jz\kappa_1 r_1 r_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_3^*(v)dv\right].$$

Подставляя это выражение в (6), получим равенство (4).

Теорема доказана.

В силу произведенной замены переменных из равенства (4) можно записать асимптотическое равенство при $\varepsilon\to 0$

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)=\mathbf{F}(x,y,z,\tau,\varepsilon)\approx\mathbf{F}(x,y,z,\tau)=$$

$$=\mathbf{R}\exp\left[jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)dv+jy\kappa_1 r_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)dv+jz\kappa_1 r_1 r_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_3^*(v)dv\right]=$$

$$=\mathbf{R}\exp\left[ju_1\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_1(y)dy+ju_2\kappa_1 r_1\int_{t_0}^{t}S_2(y)dy+ju_3\kappa_1 r_1 r_2\int_{t_0}^{t}S_3(y)dy\right].$$

При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ в стационарном режиме функционирования системы получим:

$$Me^{ji_1(t)u_1+ji_2(t)u_2+ji_3(t)u_3}=\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,0)\mathbf{E}=\exp\left[ju_1\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_1(y)dy+ju_2\kappa_1 r_1\int_{-\infty}^{0}S_2(y)dy+ju_3\kappa_1 r_1 r_2\int_{-\infty}^{0}S_3(y)dy\right].$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для рассматриваемой системы обслуживания.

4. Асимптотика второго порядка

Решение $\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)$ задачи (2) запишем в виде произведения

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)\exp\left[ju_1\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)dv+ju_2\kappa_1 r_1\int_{t_0}^{t}S_2(v)dv+ju_3\kappa_1 r_1 r_2\int_{t_0}^{t}S_3(v)dv\right],\qquad(7)$$

подставляя которое в (2), получим систему уравнений для $\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)$ в виде

$$\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)j\kappa_1\left[u_1S_1(t)+u_2r_1S_2(t)+u_3r_1r_2S_3(t)\right]+\frac{\partial\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)}{\partial t}=$$

$$=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)\left\{\mathbf{Q}+\left[S_1(t)(e^{ju_1}-1)+r_1S_2(t)(e^{ju_2}-1)+r_1r_2S_3(t)(e^{ju_3}-1)\right]\mathbf{B}\right\}.$$

Следовательно, $\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)$ является решением системы

$$\frac{\partial\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)}{\partial t}=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)\left\{\mathbf{Q}+S_1(t)\left[(e^{ju_1}-1)\mathbf{B}-ju_1\kappa_1\mathbf{I}\right]+r_1S_2(t)[(e^{ju_2}-1)\mathbf{B}-ju_2\kappa_1\mathbf{I}]+\right.$$

$$\left.+r_1r_2S_3(t)[(e^{ju_3}-1)\mathbf{B}-ju_3\kappa_1\mathbf{I}]\right\},\qquad(8)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Обозначив $1/b_1 = \varepsilon^2$, $1/b_l = \varepsilon^2 q_l$, в системе (8) выполним следующие замены:

$t\varepsilon^2 = \tau$, $t_0\varepsilon^2 = \tau_0$, $S_1(t)=S_1^*(\tau)$, $r_1S_2(t)=S_2^*(\tau)$, $r_1r_2S_3(t)=S_3^*(\tau)$, $u_1 = \varepsilon x$, $u_2 = \varepsilon y$, $u_3 = \varepsilon z$,

$$\mathbf{H_2}(u_1, u_2, u_3, t) = \mathbf{F}_2(x, y, z, \tau, \varepsilon).\qquad(9)$$

В результате этих преобразований получаем систему уравнений для $\mathbf{F}_2(x, y, z, \tau, \varepsilon)$:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=$$

$$=\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q}+S_1^*(t)\left[(e^{j\varepsilon x}-1)\mathbf{B}-j\varepsilon x\kappa_1\mathbf{I}\right]+S_2^*(t)[(e^{j\varepsilon y}-1)\mathbf{B}-j\varepsilon y\kappa_1\mathbf{I}]+S_3^*(t)[(e^{j\varepsilon z}-1)\mathbf{B}-j\varepsilon z\kappa_1\mathbf{I}]\right\}.\qquad(10)$$

Докажем следующие утверждение.

Теорема 2.

Если существует предел

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau)$,

то

$$\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_1^*(v)\right]^2dv\right)+\frac{(jy)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_2^*(v)\right]^2dv\right)+\right.$$
$$+\frac{(jz)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_3^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_3^*(v)\right]^2dv\right)+$$
$$\left.+2j^2\kappa_2\left(xy\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)S_2^*(v)dv+xz\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)S_3^*(v)dv+yz\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)S_3^*(v)dv\right)\right\},\qquad(11)$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2=\mathbf{f}_2(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E},\qquad(12)$$

а вектор $\mathbf{f}_2$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})=0.\qquad(13)$$

Доказательство:

Решение $\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau)$ системы (10) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(x,y,z,\tau)\left\{\mathbf{R}+j\varepsilon\left[xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right]\mathbf{f}_2\right\}+o(\varepsilon^2),\qquad(14)$$

подставив которое в (10), получим

$$o(\varepsilon^2)=\Phi_2(x,y,z,\tau)\left\{j\varepsilon\left[xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right]\mathbf{R}(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})+\right.$$
$$\left.+j\varepsilon\left[xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right]\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+(j\varepsilon)^2\left[xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right]^2\mathbf{f}_2(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})\right\}.\qquad(15)$$

Выполняя предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получаем, что вектор $\mathbf{f}_2$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (13).

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(x,y,z,\tau)$ просуммируем все уравнения системы (10):

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)\left\{\left[S_1^*(\tau)(e^{j\varepsilon x}-1)+S_2^*(\tau)(e^{j\varepsilon y}-1)+S_3^*(\tau)(e^{j\varepsilon z}-1)\right]\mathbf{B}-\right.$$
$$\left.-j\kappa_1\varepsilon\left[xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right]\mathbf{I}\right\}\mathbf{E}.$$

Используя разложение $\varepsilon^{j\varepsilon\alpha}-1=j\varepsilon\alpha+\dfrac{(j\varepsilon\alpha)^2}{2}+o(\varepsilon)^2$, можно записать

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)\left\{\left[j\varepsilon xS_1^*(\tau)+j\varepsilon yS_2^*(\tau)+j\varepsilon zS_3^*(\tau)\right](\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}S_1^*(\tau)+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}S_2^*(\tau)+\frac{(j\varepsilon z)^2}{2}S_3^*(\tau)\right]\mathbf{B}\right\}\mathbf{E}+o(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложение (14) функции $\mathbf{F}_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)$ в последнее равенство, получим:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2(x,y,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\Phi_2(x,y,z,\tau)\left\{\left[j\varepsilon xS_1^*(\tau)+j\varepsilon yS_2^*(\tau)+j\varepsilon zS_3^*(\tau)\right]\mathbf{R}(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E}+\right.$$
$$+\left[\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}S_1^*(\tau)+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}S_2^*(\tau)+\frac{(j\varepsilon z)^2}{2}S_3^*(\tau)\right]\mathbf{RBE}+$$
$$\left.+(j\varepsilon)^2\left(xS_1^*(\tau)+yS_2^*(\tau)+zS_3^*(\tau)\right)^2\mathbf{f}_2(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E}\right\}+o(\varepsilon^2).\qquad(16)$$

Так как в силу (13) $\mathbf{R}(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E}=0$, то, выполняя предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получаем, что с учетом обозначений (5) и (12) функция $\Phi_2(x,y,z,\tau)$ является решением системы:

$$\frac{\partial\Phi_2(x,y,z,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_2(x,y,z,\tau)\left\{\frac{(jx)^2}{2}\left(\kappa_1S_1^*(\tau)+2\kappa_2S_1^{*2}(\tau)\right)+\frac{(jy)^2}{2}\left(\kappa_1S_2^*(\tau)+2\kappa_2S_2^{*2}(\tau)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(jz)^2}{2}\left(\kappa_1S_3^*(\tau)+2\kappa_2S_3^{*2}(\tau)\right)+2j^2\kappa_2\left(xyS_1^*(\tau)S_2^*(\tau)+xzS_1^*(\tau)S_3^*(\tau)+yzS_2^*(\tau)S_3^*(\tau)\right)\right\},$$

откуда следует, что

$$\Phi_2(x,y,z,\tau)=\exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_1^*(v)\right]^2dv\right)+\frac{(jy)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_2^*(v)\right]^2dv\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(jz)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_3^*(v)dv+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}\left[S_3^*(v)\right]^2dv\right)+2j^2\kappa_2\left(xy\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)S_2^*(v)dv+xz\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^*(v)S_3^*(v)dv+yz\int_{\tau_0}^{\tau}S_2^*(v)S_3^*(v)dv\right)\right\}.$$

Подставляя найденное выражение для $\Phi_2(x,y,z,\tau)$ в (14), при $\varepsilon\to 0$ получим равенство (11).

Теорема доказана.

В силу замен (9) и выражения (11) для $\mathbf{H_2}(u_1, u_2, u_3, t)$ можно записать асимптотическое (приближенное) равенство

$$\mathbf{H}_2(u_1,u_2,u_3,t)=$$
$$=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)dv+2\kappa_2\int_{t_0}^{t}\left[S_1(v)\right]^2dv\right)+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1 r_1\int_{t_0}^{t}S_2(v)dv+2\kappa_2 r_1^2\int_{t_0}^{t}\left[S_2(v)\right]^2dv\right)+\right.$$
$$+\frac{(ju_3)^2}{2}\left(r_1r_2\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_3(v)dv+2\kappa_2(r_1r_2)^2\int_{t_0}^{t}\left[S_3(v)\right]^2dv\right)+$$
$$\left.+2j^2\kappa_2\left(u_1u_2r_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)S_2(v)dv+u_1u_3r_1r_2\int_{t_0}^{t}S_1(v)S_3(v)dv+u_2u_3r_1^2r_2\int_{t_0}^{t}S_2(v)S_3(v)dv\right)\right\}.$$

Тогда в силу равенства (7) имеем

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,t)=$$
$$=\mathbf{R}\exp\left[ju_1\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)dv+ju_2\kappa_1 r\int_{t_0}^{t}S_2(v)dv+ju_3\kappa_1r_1r_2\int_{t_0}^{t}S_3(v)dv+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)dv+2\kappa_2\int_{t_0}^{t}\left[S_1(v)\right]^2dv\right)+\right.$$
$$+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1r_1\int_{t_0}^{t}S_2(v)dv+2\kappa_2r_1^2\int_{t_0}^{t}\left[S_2(v)\right]^2dv\right)+\frac{(ju_3)^2}{2}\left(r_1r_2\kappa_1\int_{t_0}^{t}S_3(v)dv+2\kappa_2(r_1r_2)^2\int_{t_0}^{t}\left[S_3(v)\right]^2dv\right)+$$
$$\left.+2j^2\kappa_2\left(u_1u_2r_1\int_{t_0}^{t}S_1(v)S_2(v)dv+u_1u_3r_1r_2\int_{t_0}^{t}S_1(v)S_3(v)dv+u_2u_3r_1^2r_2\int_{t_0}^{t}S_2(v)S_3(v)dv\right)\right].$$

При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ в стационарном режиме функционирования системы получим:

$$Me^{ji_1(t)u_1+ji_2(t)u_2+ji_3(t)u_3}=\mathbf{H}(u_1,u_2,u_3,0)\mathbf{E}=$$
$$=\exp\left[ju_1\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_1(v)dv+ju_2\kappa_1r\int_{-\infty}^{0}S_2(v)dv+ju_3\kappa_1r_1r_2\int_{-\infty}^{0}S_3(v)dv+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_1(v)dv+2\kappa_2\int_{-\infty}^{0}\left[S_1(v)dv\right]^2\right)+\right.$$
$$+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1r_1\int_{-\infty}^{0}S_2(v)dv+2\kappa_2r_1^2\int_{-\infty}^{0}\left[S_2(v)\right]^2dv\right)+\frac{(ju_3)^2}{2}\left(r_1r_2\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_3(v)dv+2\kappa_2(r_1r_2)^2\int_{-\infty}^{0}\left[S_3(v)\right]^2dv\right)+$$
$$\left.+2j^2\kappa_2\left(u_1u_2yr_1\int_{-\infty}^{0}S_1(v)S_2(v)dv+u_1u_3r_1r_2\int_{-\infty}^{0}S_1(v)S_3(v)dv+u_2u_3r_1^2r_2\int_{-\infty}^{0}S_2(v)S_3(v)dv\right)\right].$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой второго порядка для рассматриваемой системы обслуживания.

Следовательно, для маргинальных характеристических функций процессов $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ в стационарном режиме можно записать:

$$h_1(u_1)=Me^{ju_1i_1(t)}=\exp\left\{ju_1\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_1(v)dv+\frac{(ju_1)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S_1(v)dv+2\kappa_2\int_{-\infty}^{0}\left[S_1(y)\right]^2dy\right]\right\},$$

$$h_2(u_2)=Me^{ju_2i_2(t)}=\exp\left\{ju_2\kappa_1r_1\int_{-\infty}^{0}S_2(v)dv+\frac{(ju_2)^2}{2}\left[\kappa_1r_1\int_{-\infty}^{0}S_2(v)dv+2\kappa_2r_1^2\int_{-\infty}^{0}\left[S_2(y)\right]^2dy\right]\right\},$$

$$h_3(u_3)=Me^{ju_3i_3(t)}=\exp\left\{ju_3\kappa_1r_1r_2\int_{-\infty}^{0}S_3(v)dv+\frac{(ju_3)^2}{2}\left[\kappa_1r_1r_2\int_{-\infty}^{0}S_3(v)dv+2\kappa_2r_1^2r_2^2\int_{-\infty}^{0}\left[S_3(y)\right]^2dy\right]\right\}.$$

Заключение

В данной работе рассмотрена трёхфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком. С помощью метода просеянного потока удалось записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Система уравнений решена с использованием метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания. Найдена асимптотика первого и второго порядков для характеристической функции числа занятых приборов.

Литература

1. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

2. Назаров, А. А. Асимптотический анализ выходящего потока системы MAP|GI|∞ / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 191 – 195.

3. Назаров, А. А. Исследование выходящего потока системы GI│GI│∞ методом просеянного потока / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 4 (9). – С. 59 – 66.

4. Назаров, А. А. Исследование системы MMP/GI методом просеянного потока / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4(17). – С. 74 – 84.

5. Моисеева, С. П. Исследовние системы $MAP^{(2)}|GI^{2}|\infty$ методом просеянного потока / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Вестник Кемеровского государственного университета. – № 1 (49). – 2012. – С. 47 – 52.

6. Гарайшина, И. Р. Применение немарковской трехфазной СМО для моделирования процессов пенсионного страхования / И. Р. Гарайшина, М. С. Лобова, А. А. Назаров // Научное творчество молодежи: материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции (17 – 18 мая 2012 г.). – Электрон. дан. (5,3 Мб). – Анжеро-Судженск, 2012. – Ч. 1. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – С. 11 – 15.

7. Гарайшина, И. Р. Исследование многофазных систем массового обслуживания с простейшим входящим потоком / И. Р. Гарайшина, А. А. Назаров // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы IX Российской конференции с международным участием. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – С. 81 – 82.

Информация об авторах:

Гарайшина Ирина Рашитовна – кандидат физико-математических наук, доцент; заместитель директора по научной работе инновациям и информатизации АСФ КемГУ, garayshina@ngs.ru.

Irina R. Garayshina – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Deputy Director for Science , Innovation and Informatization, Anzhero-Sudzhensk branch of Kemerovo State University.

Лобова Мария Сергеевна – аспирант КемГУ, ассистент кафедры математики АСФ КемГУ, 8-905-070-6460; lobova_ms@mail.ru

Maria S. Lobova – post-graduate at Kemerovo State University; Lecturer at the Department of Mathematics, Anzhero-Sudzhensk branch of Kemerovo State University.

Назаров Анатолий Андреевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ, anazarov@fpmk.tsu.ru.

Anatoly A. Nazarov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Tomsk State University.