УДК 517.9

О КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, М. В. Краюшкина, О. В. Малышенко

FINITE DIMENSIONAL APPROXIMATION OF COMPRESSIBLE NAVIER- STOKES EQUATIONS FOR BINARY MIXTURES

N. A. Kucher, M. V. Krayushkina, O. V. Malyshenko

В работе установлена корректность конечномерной системы операторных уравнений, возникающих в результате аппроксимации системы нелинейных дифференциальных уравнений составного типа, моделирующих пространственные нестационарные течения бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей. Результаты, полученные в этой работе, могут быть положены в основу численного алгоритма решения упомянутой задачи механики.

Nonlinear evolutionary equations modelling compressible flows of binary mixtures are considered. Well-posedness of boundary value problems for finite dimensional approximation of these equations is proved. The results can be used for numerical simulation of such flows.

Ключевые слова: смеси вязких сжимаемых жидкостей, краевая задача, динамика смесей.

Keywords: mixture of viscous compressible fluids, boundary value problem, dynamics of mixtures.

Математическая модель бинарной смеси вязких сжимаемых жидкостей, о конечномерной аппроксимации которой идет речь в данной работе, основана на подходе, предложенном в [1] и в некотором роде является обобщением классической модели Навье – Стокса. Нелокальные результаты для многомерных уравнений смесей с учетом сжимаемости и вязкости составляющих на сегодняшний день получены только для стационарных течений [2 – 4]. Более простые модели (в приближении Стокса и квази – стационарные модели) с позиции существования решений в целом изучены в работах [5 – 7]. Исследования, проведенные в данной работе, являются необходимым этапом доказательства существования глобальных решений нестационарных уравнений смесей вязких жидкостей.

Вспомогательные предложения

В работе используются общепринятые (см., например, [8 – 10]) обозначения функциональных пространств: $L^p(\Omega)$ ($W^{l,p}(\Omega)$) – пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$ включительно). $C^l(\bar{\Omega})$ ($C^l_0(\Omega)$) – банахово пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geq 0$ включительно в $\bar{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не различаем обозначения пространств вектор – функций и скалярных функций.

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^3 точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ и ее граница $\partial\Omega$ принадлежат классу $C^{2+\alpha}, 0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\partial_t(\rho) + div(\rho\vec{u}) = \varepsilon\Delta\rho \quad \text{в } Q_T = (0,T)\times\Omega, \tag{1.a}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho^0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1.b}$$

$$\nabla\rho\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{в } (0,T)\times\partial\Omega, \tag{1.c}$$

для искомой функции $\rho(t,x)$, $t \in I = (0,T)$, $x \in \Omega$, где $\varepsilon > 0$ – заданная постоянная, ρ^0 – заданная в Ω функция, а $\vec{u}(t,x)$ – заданное векторное поле, обращающееся в нуль на границе $I \times \partial\Omega$ цилиндра Q_T.

Лемма 1. Предположим, что

$\rho^0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $0 < \underline{\rho} \leq \rho^0 \leq \overline{\rho} < \infty$,

где $\overline{\rho}, \underline{\rho}$ – постоянные и $\vec{u} \in L^\infty(I, W^{1,\infty}_0(\Omega))$.

Тогда существует единственное решение $\rho = S_{\rho^0}(\vec{u})$ задачи (1) в классе

$\rho \in L^2(I, W^{2,p}(\Omega)) \bigcap C^0(\bar{I}, W^{1,p}(\Omega))$,

$\partial_t\rho \in L^2(I, L^p(\Omega)), 1 < p < \infty$.

При этом уравнение (1.a) выполнено п. в. в Q_T, начальное условие (1.b) – п. в. в Ω, а граничные условия (1.c) – в смысле следов п. в. в I.

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\underline{\rho}\exp\{-\int_0^t \|div\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\,d\tau\} \leq \\ &\leq \left[S_{\rho^0}(\vec{u})\right](x,t) \leq \\ &\leq \overline{\rho}\exp\{\int_0^t \|div\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\,d\tau\}, \end{aligned} \tag{2}$$

$t \in \bar{I}$, для почти всех $x \in \Omega$.

Если $\|\vec{u}\|_{L^\infty(I, W^{1,\infty}(\Omega))} \leq K$, где $K = const > 0$, то

$$\begin{aligned} &\left\|S_{\rho^0}(\vec{u})\right\|_{L^\infty(I_t, W^{1,2}(\Omega))} \leq \\ &\leq c\left\|\rho^0\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}\exp\left\{\frac{c}{2\varepsilon}(K + K^2)t\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

$t \in \bar{I}$.

$$\| \nabla^2 S_{\rho^0}(\vec{u}) \|_{L^2(Q_t)} \le \frac{C}{\varepsilon}\sqrt{t}\, \| \rho^0 \|_{W^{1,2}(\Omega)} \cdot$$
$$\cdot K \exp\left\{ \frac{C}{2\varepsilon}\left(K + K^2\right)t \right\},\ t \in \overline{I}. \tag{4}$$

$$\| \partial_t S_{\rho^0}(\vec{u}) \|_{L^2(Q_t)} \le C\sqrt{t}\, \| \rho^0 \|_{W^{1,2}(\Omega)} \cdot$$
$$\cdot K \exp\left\{ \frac{C}{2\varepsilon}\left(K + K^2\right)t \right\},\ t \in \overline{I}. \tag{5}$$

$$\left\| [S_{\rho^0}(\vec{u}_1) - S_{\rho^0}(\vec{u}_2)](t) \right\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le C_1(K, \varepsilon, T)\cdot t \cdot \left\| \rho^0 \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \cdot \tag{6}$$
$$\cdot \left\| \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \right\|_{L^\infty(I_t, W^{1,\infty}(\Omega))},\quad t \in \overline{I}.$$

Постоянная C в неравенствах (3) – (5) зависит от области Ω и не зависит от $\varepsilon, K, \rho^0, \vec{u}$. Доказательство леммы 1 имеется в [11].

Выберем систему достаточно гладких вектор – функций $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$, образующую ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$, а также ортонормированный базис в $W_0^{1,2}(\Omega)$. Рассмотрим последовательность конечномерных пространств X_n с базисом $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{n}$ и скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})_{X_n} = \int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx,\quad \vec{u},\vec{v} \in X_n$.

Отметим, что все нормы на X_n, и, в частности $W^{k,p}(\Omega)$ – норма $k = 0,1,\ldots,\ \ 1 \le p \le \infty$ эквивалентны на X_n. Через $P_n = P$ обозначим ортогональный проектор из $L^2(\Omega)$ в X_n.

Пусть дана функция

$$g \in C^0\left(I, L^1(\Omega)\right),\ \partial_t g \in L^1\left(Q_T\right),\ \operatorname*{ess\,inf}_{(t,x)\in Q_T} g(t,x) \ge a_1 > 0.$$

Так как отображение $\vec{w} \to \int_\Omega g(t)\vec{v}\cdot\vec{w}dx$ является ограниченным линейным функционалом на X_n, то по теореме Рисса его можно представить в виде скалярного произведения $\left(M_{g(t)}\vec{v},\vec{w}\right),\ M_{g(t)}\vec{v} \in X_n$ и тем самым для всех $t \in \overline{I}$ определено линейное отображение $M_{g(t)} : X_n \to X_n$,

$$\left(M_{g(t)}\vec{v},\vec{w}\right) = \int_\Omega g(t)\vec{v}\cdot\vec{w}dx,\quad \vec{v},\vec{w} \in X_n.$$

Отметим следующие свойства оператора $M_{g(t)}$ [1]:

$$\left\| M_{g(t)} \right\|_{L(X_n,X_n)} \le c(n)\int_\Omega g(t)dx,\quad t \in \overline{I}.$$

Обратный оператор $M_{g(t)}^{-1}$ существует для всех $t \in \overline{I}$ и при этом справедлива оценка

$$\left\| M_{g(t)}^{-1} \right\|_{L(X_n,X_n)} \le \frac{1}{a_1}$$

$$\left\| M_{g_2(t)} - M_{g_1(t)} \right\|_{L(X_n,X_n)} \le \frac{c(n)}{a_1}\left\| g_2(t) - g_1(t) \right\|_{0,1}.$$

Уравнения Фаэдо-Галеркина

Для произвольно выбранного $T' = (0,T],\ i = 1,2$, ищутся вектор – функции $\vec{u}^{(i)} \in C^0\left(\overline{I}', X_n\right),\ \overline{I}' = \left(0,T'\right)$, $i = 1,2$, удовлетворяющие для любой $\vec{\varphi} \in X_n$ уравнениям:

$$\int_\Omega \rho_i(t)\vec{u}^{(i)}\vec{\varphi}\,dx - \int_\Omega \vec{q}_i\vec{\varphi}\,dx =$$
$$= \int_0^t \int_\Omega N_i(\rho_i, \vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) \cdot \vec{\varphi}\,dx\,dt, \tag{7}$$

$$N_i(\rho_i,\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^{2}(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla div\vec{u}^{(j)} -$$
$$-\nabla\rho_i^{\gamma_i} - \delta\nabla\rho_i^{\beta_i} - div(\rho_i\vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) - \tag{8}$$
$$-\varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} + (-1)^{i+1}\cdot a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}).$$

Здесь $\rho_i(t) = \left[S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})\right](t)$ – решение задачи (1), построенные в лемме 1, функции $\rho_i^0(x),\ i = 1,2$, удовлетворяют условиям леммы 1, μ_{ij} и λ_{ij}, $i = 1,2$ – заданные постоянные, характеризующие вязкостные свойства смеси, и удовлетворяющие условиям:

$$\mu_{11} > 0,\qquad \lambda_{11} + 2\mu_{11} > 0,$$
$$4\mu_{11}\cdot\mu_{22} - (\mu_{12}+\mu_{21})^2 > 0,$$
$$4(\lambda_{11}+2\mu_{11})\cdot(\lambda_{22}+2\mu_{22}) - (\lambda_{12}+2\mu_{12}+\lambda_{21}+2\mu_{21})^2 > 0$$

a – положительная постоянная $\gamma_i > 1$ – показатели политропы компонентов смеси, $\delta,\ \varepsilon > 0,\ \beta_i > 1$ – параметры регуляризации, $\vec{q}_i(x)$ – заданные в Ω векторные поля (физически вектор $\vec{u}^{(i)}$ характеризует приближенное значение вектора скорости частиц i-той компоненты смеси, а ρ_i – приближенное значения поля плотностей i-той компоненты).

Уравнения (7), (8) могут быть записаны в операторной форме:

$$\vec{u}^{(i)}(t) = M^{-1}_{\left[S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})\right](t)}\left\{ P\vec{q}_i + \int_0^t P\left[N_i\left(S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)}), \vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}\right)\right]d\tau \right\},\quad i = 1,2. \tag{9}$$

Лемма 2. Найдется $T' > 0$ такое, что на промежутке $0 < t < T'$ существует единственное решение $\vec{u}^{(i)} \in C^0\left(\left(0,T'\right), X_n\right),\ i = 1,2$ системы (9).

Доказательство. Отметим сначала следующие факты.

1. Предположим, что

$$\left\| \vec{v}^{(i)} \right\|_{C^0(\overline{I},X_n)} \le K_1,\ i = 1,2, \tag{10}$$

K_1 – некоторая положительная постоянная. Тогда справедливы неравенства:

$$\left\| P\left[N_i\left(\rho_i, \vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)\right](t) \right\|_{X_n} \le d_i,\ i = 1,2,\ t \in I, \tag{11}$$

где постоянные d_i зависит от $K_1, T, n, \overline{\rho}$ и параметров задачи (7).

Рассмотрим пары $\left\{\rho_{i,1}, \vec{v}_1^{(i)}\right\}$, $\left\{\rho_{i,2}, \vec{v}_2^{(i)}\right\}$, $\rho_{i,1} = S_{\rho_i^0}\left(\vec{v}_1^{(i)}\right)$, $\rho_{i,2} = S_{\rho_i^0}\left(\vec{v}_2^{(i)}\right)$, $i = 1,2$, где $\vec{v}_1^{(i)}, \vec{v}_2^{(i)}$ принадлежат классу $C^0\left(\overline{I}, X_n\right)$ и удовлетворяют условиям (10). Тогда имеют место неравенства:

$$\left\|P\left[N_i\left(\rho_{i,1}, \vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}\right) - N_i\left(\rho_{i,2}, \vec{v}_2^{(1)}, \vec{v}_2^{(2)}\right)\right](t)\right\|_{X_n} \le$$

$$\le L_i\left(\left\|\rho_{i,1}(t) - \rho_{i,2}(t)\right\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2}\left\|\left(\vec{v}_1^{(j)} - \vec{v}_2^{(j)}\right)(t)\right\|_{X_n}\right), \quad (12)$$

$i = 1,2,\ t \in \overline{I}$,

где постоянные L_i зависит от $K_1, T, n, \overline{\rho}$.

Положим для краткости записи $\rho_i(t) = \left[S_{\rho_i^0}\left(\vec{v}^{(i)}\right)\right](t)$, где $\vec{v}^{(i)}$ принадлежат классу $C^0\left(\overline{I}, X_n\right)$ и удовлетворяют условиям (10). Тогда справедливы оценки:

$$\left\|M_{\rho_i(t)}^{-1}\right\|_{L(X_n, X_n)} \le \underline{\rho}^{-1}\exp\left\{K_1 \cdot t\right\} \quad (13)$$

$$\left\|M_{\rho_i(t)}^{-1} - M_{\rho_i(0)}^{-1}\right\|_{L(X_n, X_n)} \le c(n,\Omega)\cdot\sqrt{t}\exp\left\{K_1 \cdot t\right\}\cdot H\left(K_1, t\right), \quad (14)$$

где

$$H\left(K_1, t\right) = \underline{\rho}^{-2}\left\|\rho_i^0\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}\cdot$$

$$\cdot\left[1 + K_1\left(1+t\right)\exp\left\{\frac{c_0}{2\varepsilon}\left(K_1 + K_1^2\right)t\right\}\right],$$

c_0 – постоянная, зависящая только от области Ω.

Предположим, теперь что векторные поля $\vec{v}^{(i)}(t) \in C^0(\overline{I}, X_n)$ удовлетворяют условиям

$$\left\|\vec{v}^{(i)}(t) - \vec{v}_*^{(i)}\right\|_{X_n} \le K_2,\ i = 1,2, \quad (15)$$

где $\vec{v}_*^{(i)} = M_{\rho_i^0}^{-1}P\vec{q}_i$, $i = 1,2$, K_2 – некоторая положительная постоянная. В силу свойств проектора P $\left\|\vec{v}_*^{(i)}\right\|_{X_n} \le \underline{\rho}^{-1}\cdot\left\|\vec{q}_i\right\|_{L^2(\Omega)}$ и тем самым

$$\left\|\vec{v}^{(i)}(t)\right\|_{1,\infty} \le K_3,\ K_3 = c(n)\left(K_2 + \underline{\rho}^{-1}\max_i\left\|\vec{q}_i\right\|_{L^2(\Omega)}\right). \quad (16)$$

В силу леммы 1 имеет место соотношение $ess\inf_{\Omega}\rho_i(t) \ge \underline{\rho}\exp\left\{-\int_0^t\left\|\vec{v}^{(i)}(\tau)\right\|_{1,\infty}d\tau\right\}$ и поэтому неравенство (16) влечет оценку $ess\inf_{\Omega}\rho_i(t) \ge \underline{\rho}\exp\left\{K_3 \cdot t\right\}$. (17)

Рассмотрим отображение

$$\mathbf{F}\left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)(t) = \begin{Bmatrix}\mathbf{F}_{\rho_1^0,\vec{q}_1}^{(1)}\left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)(t), \\ \mathbf{F}_{\rho_2^0,\vec{q}_2}^{(2)}\left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)(t)\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{\rho_i^0,\vec{q}_i}^{(i)}\left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)(t) = M_{\left[S_{\rho_i^0}\left(\vec{v}^{(i)}\right)\right](t)}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{P\vec{q}_i + \int_0^t P\left[N_i\left(S_{\rho_i^0}(\vec{v}^{(i)}), \vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right)\right]d\tau\right\} \quad (18)$$

пространства $C^0\left(\overline{I}_{\tau_0}, X_n\right)$ в себя.

Пусть параметр $\tau_0 \in \left(0, T\right)$ выбран из условий

$$\exp\left\{K_3 \cdot \tau_0\right\} \le 2,\ \exp\left\{\frac{c_0}{2\varepsilon}\left(K_3 + K_3^2\right)\tau_0\right\} \le 2,$$
$$2M_0\left[3 + 2K_3(1+\tau_0)\right]\sqrt{\tau_0} + 2d\tau_0 \le K_2, \quad (19)$$

где $M_0 = c(\Omega, n)\underline{\rho}^{-2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left\|\rho_i^0\right\|_{1,2}^2\cdot\left\|\vec{q}_i\right\|_{0,2}^2}$,

$$d = d\left(K_3, \rho_i, T, n\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}d_i^2}.$$

Постоянные d_i взяты из неравенств (11), в которых роль постоянной K_1 играет K_3. На основании свойств (11), (13) и (14) может быть доказано, что при выполнении условий (19) отображение $\mathbf{F}$, определенное в (18), переводит шар

$$B_{K_2,\tau_0} = \begin{Bmatrix}\left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\right) \in C^0\left(\overline{I}_{\tau_0}, X_n\right): \\ : \sum_{i=1}^{2}\left\|\vec{v}^{(i)} - \vec{v}_*^{(i)}\right\|_{C^0\left(\overline{I}_{\tau_0}, X_n\right)}^2 \le K_2^2\end{Bmatrix} \quad (20)$$

в себя.

Докажем теперь, что при подходящем выборе параметра $\tau_0 > 0$ отображение $\mathbf{F}$ является сжимающим.

Пусть элементы $\vec{v}_1 = \left(\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}\right), \vec{v}_2 = \left(\vec{v}_2^{(1)}, \vec{v}_2^{(2)}\right)$ принадлежат шару B_{K_2,τ_0}. В силу свойств b), c) оператора $M_{g(t)}$ и неравенства (2), (6) имеют место оценки:

$$\left\|M_{\rho_i(t)}^{-1}\right\|_{L(X_n, X_n)} \le \frac{1}{\underline{\rho}}e^{K_2 t},$$

$$\left\|M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_1^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1} - M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_2^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1}\right\|_{L(X_n, X_n)} \le \quad (21)$$

$$\le c(n, \varepsilon, K_2, T)\cdot t\cdot\left\|\rho_i^0\right\|_{0,1}\cdot\left\|\vec{v}_1^{(i)} - \vec{v}_2^{(i)}\right\|_{L^\infty\left(I_t, W^{1,\infty}(\Omega)\right)}.$$

Из тождества:

$$\mathbf{F}_{\rho_i^0,\vec{q}_i}^{(i)}\left(\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}\right)(t) - \mathbf{F}_{\rho_i^0,\vec{q}_i}^{(i)}\left(\vec{v}_2^{(1)}, \vec{v}_2^{(2)}\right)(t) =$$

$$= \left\{M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_1^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1} - M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_2^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1}\right\}P\vec{q} +$$

$$+\left\{M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_1^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1} - M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_2^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1}\right\}\cdot \quad (22)$$

$$\cdot\int_0^t P\left[N_i\left(S_{\rho_i^0}(\vec{v}^{(i)}), \vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}\right)\right]d\tau +$$

$$+M_{\left[S_{\rho_i^0\left(\vec{v}_2^{(i)}\right)}\right](t)}^{-1}\int_0^t P\left[N_i\left(S_{\rho_i^0}(\vec{v}^{(i)}), \vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}\right) -\right.$$

$$\left. - N_i\left(S_{\rho_i^0}(\vec{v}^{(i)}), \vec{v}_2^{(1)}, \vec{v}_2^{(2)}\right)\right]d\tau,$$

и оценок (21) получаем неравенство

$$\left\|\mathbf{F}(\vec{v}_1) - \mathbf{F}(\vec{v}_2)\right\|_{C^0\left(\overline{I}_{\tau_0}, X_n\right)} \le \alpha(t)\cdot\left\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right\|_{C^0\left(\overline{I}_{\tau_0}, X_n\right)}, \quad (23)$$

где

$$\alpha(t)=\frac{c}{\underline{\rho}^2}e^{2K_2t}\cdot G(t),\ G(t)=$$
$$=\sqrt{\sum\left(\left\|\rho_i^0\right\|_{0,1}^2\cdot\left\|\vec{q}_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2\cdot t^2+\left\|\rho_i^0\right\|_{0,1}^2\cdot d_i^2\cdot t^4+\left\|\rho_i^0\right\|_{0,1}^2\cdot L_i^2\cdot t^4+4t\right)}.$$

Пусть параметр τ_0 наряду с условием (19) удовлетворяет требованию $c\underline{\rho}^{-2}\cdot G\left(\tau_0\right)<1$.

Тогда $\alpha(t)\le\alpha(\tau_0)<1$ и, следовательно, отображение **F** – шара B_{K_2,τ_0} в себя является сжимающим. Лемма 2 доказана.

Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. На любом конечном промежутке $0<t<T$ система уравнений (9) имеет единственное решение в классе $C^0\left(\left(0,T\right),X_n\right)$.

Доказательство. Легко видеть, что возможность продолжения локального решения, построенного в лемме 2, на произвольный конечный временной интервал $\left(0,T\right)$, следует из ограниченности в пространстве $C^0\left(\left(0,T\right),L^2(\Omega)\right)$ семейства решений уравнений (9). Действительно, располагая оценкой

$$\left\|\vec{u}^{(i)}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\le C, \tag{24}$$

получаем, что

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left\|\vec{u}^{(i)}-\vec{v}_*^{(i)}\right\|_{C^0(I,X_n)}\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(C+\frac{1}{\underline{\rho}}\left\|\vec{q}_i\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\tilde{K}_2.$$

Таким образом, решение системы уравнений (9) принадлежат шару $B_{\tilde{K}_2,T}(\vec{v}_*)$, $\vec{v}_*=\left(\vec{v}_*^{(1)},\vec{v}_*^{(2)}\right)$, и поэтому выбирая в качестве радиуса K_2 шара B_{K_2,τ_0}, число $K_2\ge\tilde{K}_2$, мы за конечное число шагов продолжим локальное решение уравнений (10) на произвольный конечный промежуток времени $\left(0,T\right)$. Докажем теперь оценку (24). Пусть

$\vec{u}^{(i)}(t)=\vec{u}_n^{(i)}(t,x)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(i)}(t)\vec{\psi}_j(x)\in C^0\left(I,X_n\right)$ – решение уравнений (9), которые в данном случае удобнее представить в форме (7), (8), где $\rho_i=S_{\rho_i^0}\left(\vec{u}^{(i)}\right)$, $i=1,2$. Для каждой базисной функции $\vec{\psi}_k(x)$, $k=1,...,n$, из (7), (8) после дифференцирования по t получаем тождества:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\rho_i\cdot\vec{u}^{(i)}\right)\cdot\vec{\psi}_k(x)dx==\int_\Omega N_i\left(\rho_i,\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}\right)\cdot\vec{\psi}_k(x)dx,\ \ k=1,...,n.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $c_k^{(i)}(t)$ и суммируя по k, получаем следующее энергетическое неравенство на решениях уравнений (9):

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}\rho_i\left|\vec{u}^{(i)}\right|^2+\frac{1}{\gamma_i-1}\rho_i^{\gamma_i}+\frac{\delta}{\beta_i-1}\rho_i^{\beta_i}\right\}dx+c_0\int_\Omega\left(\left|\nabla\vec{u}^{(1)}\right|^2+\left|\nabla\vec{u}^{(2)}\right|^2\right)dx+\\+\varepsilon\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\left(\gamma_i\rho_i^{\gamma_i-2}+\delta\beta_i\rho_i^{\beta_i-2}\right)\left|\nabla\rho_i\right|^2dx+a\int_\Omega\left|\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}\right|^2dx\le 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Из (25), в частности, следуют неравенства:

$$\int_\Omega\rho_i\left|\vec{u}^{(i)}\right|^2dx\le\hat{\varepsilon}_{\delta,0},\qquad\int_0^t\left(\left\|\vec{u}^{(1)}\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2+\left\|\vec{u}^{(2)}\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2\right)d\tau\le\frac{1}{c_0}\hat{\varepsilon}_{\delta,0}, \tag{26}$$

где $\hat{\varepsilon}_{\delta,0}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}\left\|\vec{u}_0^{(i)}\right\|_{0,2}^2+\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{1}{\gamma_i-1}\left(\rho_k^0\right)^{\gamma_k}+\frac{\delta}{\beta_k-1}\left(\rho_k^0\right)^{\beta_k}\right\}dx$ – известная постоянная, не зависящая от номера n.

На основании оценки (2) леммы 1 имеем:

$$\rho_i(t)\ge\underline{\rho}\exp\left\{-\int_0^t c(n)\left\|\vec{u}^{(i)}\right\|_{1,2}d\tau\right\}\ge\underline{\rho}\exp\left\{-c(n)\sqrt{T}\cdot\sqrt{\frac{1}{c_0}\hat{\varepsilon}_{\delta,0}}\right\}. \tag{27}$$

Из неравенств (26), (27) вытекает оценка (24), так как $\int_\Omega\left|\vec{u}^{(k)}\right|^2dx\le\hat{\varepsilon}_{\delta,0}\cdot\underline{\rho}\exp\left\{c(n)\sqrt{\frac{T\hat{\varepsilon}_{\delta,0}}{c_0}}\right\},\ \ k=1,2$.

Теорема доказана.

Литература

1. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – Singapore: Word Sci., 1995.
2. Кучер, Н. А. Стационарные решения смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – Т. 12. – № 3. – С. 52 – 65.
3. Кучер, Н. А. Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник НГУ. – 2009. – Т. 9. – Вып. 3. – С. 33 – 53.
4. Кучер, Н. А. Стационарные решения уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 23. – № 6. – С. 1338 – 1353.
5. Frehse, J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // SIAM J. Math. Anal. – 2005. – V. 36. – № 4. – P. 1259 – 1281.

6. Goj, S. Analysis for mixtures of fluids: Dissertation / S. Goj // Universitat Bonn. Math. Inst. – 2005. – Режим доступа: http://bib.math.uni-bonn.de/downloads/bms/BMS-375.pdf.

7. Frehse, J. On quasi – stationary models of mixtures of compressible fluids / J. Frehse, W. Weigant // Appl. Math. – 2008. – V. 53. – № 4. – P. 319 – 345.

8. Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев. – М.: Наука – 1989. – 254 с.

9. Мазья, В. Г. Пространства С. Л. Соболева / В. Г. Мазья. – Л.: Из-во Ленинград. гос. ун-та, 1985. – 416 с.

10. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М: Наука, 1977. – 456 с.

11. Novotny, A. Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow / A. Novotny // Oxford University Press. – 2004.

Информация об авторах:

Кучер Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, nakycher@rambler.ru.

Nikolay A. Kucher – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Краюшкина Марина Владимировна – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, krayushkinanv@mail.ru.

Marina V. Krayushkina – Senior Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Малышенко Ольга Владимировна – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, molga81@list.ru.

Olga V. Malyshenko – Senior Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.