МАТЕМАТИКА

УДК 519.248: 519.6

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ

В. А. Чекменев., Т. Д. Чекменева

MULTICRITERIAL OPTIMIZATION FOR QUEUEING SYSTEMS WITH REFUSALS OPERATING AT COMPETITIVE INPUT FLOWS

V. A. Chekmenev, T. D. Chekmeneva

В статье рассматривается подход к оптимизации функционирования систем обслуживания, основанный на принципах устойчивости, выгодности и справедливости при распределении заявок на обслуживание от разных клиентов. Ставится задача многокритериальной оптимизации, для решения которой применяются методы теории игр. Получены аналитические решения для ряда систем обслуживания с отказами.

The article describes an approach to optimizing of the functioning of queueing systems based on the principles of sustainability, profitability and equity in the allocation of support requests from different clients. The main goal is multicriterial optimization by methods of the theory of games. Analytical solutions for some of queueing systems with refusals have been obtained.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, многокритериальная оптимизация, теория игр.

Keywords: queueing systems, multicriterial optimization, theory of games.

Введение

При исследовании информационных систем различного назначения и их оптимизации традиционно руководствуются принципом однозначности цели, т. е. качество функционирования рассматриваемой системы описывается только одной целевой функцией. Однако существование конкуренции между входящими потоками информации, наличие неопределенностей, порождаемых стохастической природой поступающих в систему потоков, неполнотой знаний о состоянии каналов передачи, наличием нескольких целевых функций и т. п. требует новых подходов к исследованию и оптимизации таких систем. При этом основными чертами оптимальности следует считать интуитивные представления об устойчивости, выгодности и справедливости принимаемых решений для всех пользователей информационной или обслуживающей системы [1].

В данной работе даётся постановка и аналитическое решение задачи анализа и оптимизации ряда математических моделей информационных систем, описываемых системами массового обслуживания (СМО) с отказами, с точки зрения новых подходов, предложенных в нашей работе «Оптимизация управления СМО с конкурирующими потоками» [2].

Постановки задач для разных типов систем отличаются числом каналов (рассматриваются двух- и многоканальные системы), а также законами распределения времени обслуживания (экспоненциальным и произвольным с известными первыми моментами). Общим для всех задач является предположение о входящих потоках, которые образуются разными пользователями. Приведем общую часть постановки задачи оптимизации распределения заявок по каналам обслуживания с точки зрения минимизации числа отказов.

Постановка задачи. Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с отказами с m (в общем случае), параллельно функционирующими обслуживающими приборами (каналами). На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i (i=1,…,n). Будем считать, что требования (заявки) каждого потока генерируются отдельным лицом (пользователем) A_i (i=1,…,n). Пользователь A_i направляет свои требования на каждый обслуживающий прибор с определённой вероятностью x_{ij} (j – номер прибора). Задача оптимизации состоит в определении оптимального распределения $(x_1^*,\ldots, x_n^*)$ заявок для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания. В качестве показателей эффективности L_i распределения заявок по приборам берётся среднее число отказов в обслуживании за единицу времени для каждого пользователя A_i (i=1,…,n), которое очевидно зависит от выбора всех пользователей, т. е. $L_i = L_i(x_1,\ldots,x_n)$. Таким образом, получаем задачу оптимизации, которая формулируется как задача теории игр.

Так как пользователи формируют свои потоки независимо друг от друга и каждый стремится минимизировать число отказов в обслуживании, то задачу оптимизации можно сформулировать в виде бескоалиционной игры n лиц:

$$\Gamma = \langle\, I, \{X_i\}_{i\in I}, \{L_i\}_{i\in I} \,\rangle,$$

где I – множество игроков (пользователей),

$$X_i = \left\{ x_i = (x_{i1},\ldots, x_{im}) : x_{ij} \in [0,1], \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \right\}$$

– множество стратегий i-го игрока, $i = 1,\ldots,n$;

$X = \prod_{1}^{n}[0,1]$ – множество стратегий всех игроков,

$L_i(x_1,\ldots,x_n)$ – функция потерь i-го игрока, $x_i \in X_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Оптимальное решение бескоалиционной игры определяется в виде ситуации равновесия. Ситуация $x^* = (x_1^*,\ldots, x_n^*)$ называется равновесной, если ни один из игроков не заинтересован отклониться от нее, т. е. для любых $i \in I$ и $x_i \in X_i$ справедливо:

$$L_i(x_1^*,..., x_i^*,..., x_n^*) \leq$$
$$\leq L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*),\ i = 1,...n.$$

Для нахождения ситуации равновесия можно использовать необходимые и достаточные условия экстремума в предположении, что точка равновесия является внутренней точкой множества стратегий, и функции потерь $L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*)$ непрерывно дифференцируемы по $x_i \in X_i$.

Рассмотрим задачу оптимизации шире, опираясь на вышеуказанные представления об устойчивости, выгодности и справедливости оптимальных решений. Очевидно, что ситуация равновесия характеризует устойчивость принимаемых решений. Свойства выгодности принимаемого решения отражают его оптимальность по Парето. Справедливость понимается как равенство функций потерь игроков в ситуации равновесия. Для рассматриваемых СМО это эквивалентно равенству интенсивностей λ_i входящих потоков ($i \in I$).

Ситуация $x^* = (x_1^*,..., x_n^*)$ называется Парето-оптимальной, если не существует другой ситуации x: $x \in X = \prod_1^n [0,1]$, для которой имеет место векторное неравенство $L_i(x^*) \geq L_i(x)$, $i=1,...,n$. Для поиска Парето-оптимальной ситуации можно воспользоваться следующим утверждением [3].

Утверждение. Если для некоторых $\alpha_i > 0, i \in I, x^* \in X$ имеет место равенство:

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x^*)\ , \qquad (1)$$

то ситуация x^* оптимальна по Парето.

Для определения оптимальности по Парето (в предположении, что все $\alpha_i > 0, i \in I$ равны между собой) составляется функция

$L(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x) = \alpha \sum_{i=1}^n L_i(x)$ и определяется её минимум. Далее показывается, что полученная ситуация равновесия является также Парето-оптимальной.

Данной постановке задачи удовлетворяют многоканальные марковские и полумарковские СМО с отказами, рассмотренные ниже.

1. Марковские СМО с отказами

Постановка задачи [4, с. 333 – 334]. Рассмотрим m -канальную СМО (с m параллельно функционирующими обслуживающими приборами) с отказами. Пусть на вход системы поступают n независимых простейших потоков заявок интенсивности λ_i ($i = 1,…, n$). Время обслуживания заявки на каждом приборе есть случайная величина, подчиненная показательному распределению с параметрами μ_j ($j = 1,…,m$). В качестве показателя эффективности распределения заявок по приборам выберем среднее число отказов в обслуживании за единицу времени для каждого пользователя:

$$L_i(x_1,..., x_n) = \lambda_i \sum_{j=1}^m x_{ij} P_j(x_1,..., x_n), \quad i = 1,..., n,$$

где $x_i = (x_{i1},…,x_{im})$ – вектор вероятностей распределения заявок i-го пользователя по m приборам, $P_j(x_1,…,x_n)$ – стационарные вероятности того, что занят j-й прибор ($j = 1,…, m$).

На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по полиномиальной схеме образуется m простейших потоков к обслуживающим приборам с интенсивностями $\Lambda_j = \Sigma\lambda_i x_{ij}$ ($j = 1,…, m$). Это позволяет провести декомпозицию СМО на m однолинейных марковских СМО. Опираясь на известные результаты для однолинейных СМО с отказами, получим выражения для вероятностей состояний $P_j(x_1,…,x_n)$:

$$P_j(x_1,..., x_n) = \Lambda_j / (\mu_j + \Lambda_j),\ j = 1,..., m,$$

откуда

$$L_i(x_1,..., x_n) = \lambda_i \sum_{j=1}^m x_{ij} \Lambda_j / (\mu_j + \Lambda_j), \quad i = 1,..., n,$$

Ставится задача: найти оптимальное распределение $(x_1^*,..., x_n^*)$ заявок по каналам для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания. Рассмотрим задачу оптимизации СМО, опираясь на представления устойчивости, выгодности, справедливости.

Оптимизация. Ситуация равновесия $x^* = (x_1^*,..., x_n^*)$ определяется из следующих условий:

1) $$\frac{\partial L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*)}{\partial x_{ij}} \Big|_{x_i^*} = 0; \qquad (2)$$
$$j = 1,..., m; \quad i = 1,..., n;$$

2) матрица Гессе функции $L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*)$, в которой производные

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1^*,..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,..., x_n^*)}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} \times$$

x ($j, k = 1,…,m$; $i = 1,…,n$) (3)

найдены при условии $\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1,..., n$, – положительно определена;

3) $$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1,..., n, \qquad (4)$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,..., n, \quad j = 1,..., m.$$

Для нахождения ситуации равновесия (т. е. минимизации функций L_i при наличии ограничений) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для функций Лагранжа вида:

$$Z_i(x_1,..., x_n) = L_i(x_1,..., x_n) -$$
$$- \beta_i(\sum x_{ij} - 1) \quad (i = 1,..., n),$$

где β_i – множители Лагранжа, условия (2)-(4) приводят к системе:

$$\frac{\partial Z_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*)}{\partial x_{ij}}=0,$$

$$j=1,...,m,\quad i=1,...,n,$$

$$\frac{\partial Z_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*)}{\partial \beta_i}=0,\quad i=1,...,n.$$

Для рассматриваемой СМО эти условия представляют собой систему нелинейных уравнений по переменным x_{ij}, β_i ($i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m$):

$$\left[\frac{\Lambda_j^2+\mu_j\Lambda_j+x_{ij}\lambda_i\mu_j}{(\mu_j+\Lambda_j)^2}\right]=\frac{\beta_i}{\lambda_i},\tag{5}$$

$$j=1,...,m,\quad i=1,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}-1=0,\quad i=1,...,n.\tag{5′}$$

Суммируя уравнения (5) по $i = 1,\ldots,n$, получим систему уравнений в виде:

$$\frac{n\Lambda_j^2+(n+1)\Lambda_j\mu_j}{(\mu_j+\Lambda_j)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\lambda_i},\quad j=1,...,m,\tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1,\quad i=1,...,n.$$

Так как левые части уравнений (6) равны одному и тому же числу, то систему можно переписать в виде:

$$\frac{n\Lambda_1^2+(n+1)\Lambda_1\mu_1}{(\mu_1+\Lambda_1)^2}=$$

$$=\frac{n\Lambda_j^2+(n+1)\Lambda_j\mu_j}{(\mu_j+\Lambda_j)^2},\quad j=2,...,m,\tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1,\quad i=1,...,n.$$

После преобразований система (7) принимает вид:

$$C_{0j}\Lambda_j^2+C_{1j}\Lambda_j+C_{2j}=0,\qquad j=2,...,m,\tag{8}$$

где коэффициенты C_{0j}, C_{1j}, C_{2j} являются функциями от Λ_1:

$$C_{0j}=n\mu_1^2+(n-1)\Lambda_1\mu_1,\quad j=2,...,m,$$

$$C_{1j}=(n+1)\mu_1^2\mu_j-(n-1)\Lambda_1^2\mu_j,\quad j=2,...,m,$$

$$C_{2j}=-\mu_j^2[n\Lambda_1^2+(n+1)\Lambda_1\mu_1,\quad j=2,...,m.$$

Решая квадратные уравнения системы (8) и учитывая, что интенсивности Λ_j неотрицательны, получим:

$$\Lambda_j=\frac{-C_{1j}+\sqrt{C_{1j}^2-4C_{0j}C_{2j}}}{2C_{0j}},\tag{9}$$

$$j=2,...,m.$$

Просуммируем выражения (9) по $j = 2,\ldots, m$. С учетом очевидного равенства $\sum_{j=1}^{m}\Lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ получим уравнение относительно Λ_1:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\Lambda_1+\sum_{j=2}^{m}\frac{-C_{1j}+\sqrt{C_{1j}^2-4C_{0j}C_{2j}}}{2C_{0j}}.$$

Подставляя в это уравнение выражения для C_{0j}, C_{1j}, C_{2j}, найдем:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\Lambda_1+\sum_{j=2}^{m}\mu_j\frac{\Lambda_1}{\mu_1},$$

откуда получаем единственное решение:

$$\Lambda_1=\mu_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}.\tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), можно найти все Λ_j ($j = 2,\ldots, m$), которые равны между собой и равны Λ_1.

Для определения ситуации равновесия выразим x_{ij} из системы (5) через неизвестные коэффициенты β_i ($i = 1,\ldots, n$):

$$x_{ij}=\beta_i\frac{(\mu_j+\Lambda_j)^2}{\lambda_i^2\mu_j}-\frac{(\mu_j+\Lambda_j)\Lambda_j}{\lambda_i\mu_j},\tag{11}$$

$$i=1,...,n,\quad j=1,...,m$$

и, подставляя их в (5′), получим систему:

$$\frac{\beta_i}{\lambda_i^2}\sum_{j=1}^{m}\frac{(\mu_j+\Lambda_j)^2}{\mu_j}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{(\mu_j+\Lambda_j)\Lambda_j}{\mu_j}=1,\quad i=1,...,n,$$

из которой с учетом (10) найдем:

$$\beta_i=\frac{\lambda_i^2\mu}{(\mu+\lambda)^2}+\frac{\lambda_i\lambda}{\mu+\lambda},$$

$$i=1,...,n,\quad \lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad \mu=\sum_{j=1}^{m}\mu_j.$$

Выражения, полученные для β_i ($i = 1,\ldots, n$) и Λ_j ($j = 1,\ldots,m$), подставляем в (11), откуда получаем координаты ситуации равновесия:

$$x_{ij}=\frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j},\quad j=1,...,m,\quad i=1,...,n.\tag{12}$$

Чтобы убедиться, что решение (12) представляет собой ситуацию равновесия, проверим выполнение условий (3). Для каждой функции $L_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*)$ (i = 1,…, n) найдем вторые производные и, подставляя в них значения (12), получим:

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_{ij}^2}=\frac{\mu_j\Lambda_j(\mu_j+\Lambda_j-x_{ij}\lambda_i)}{(\mu_j+\Lambda_j)^3}=$$

$$=\frac{\lambda(\mu+\lambda-\lambda_i)}{\mu(\mu+\lambda)}>0,\quad j=1,...,m,$$

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_{ij}\partial x_{ik}}=0,\quad j,k=1,...,m,\quad j\neq k.$$

Очевидно, матрица Гессе положительно определена, следовательно, решение (12) является ситуацией равновесия. При этом значения целевых функций $L_i(x_1^*,...,x_n^*)$ равны:

$$L_i(x_1^*,...,x_n^*)=\frac{\lambda_i\sum\lambda_i}{\sum\lambda_i+\sum\mu_i},\quad i=1,...,n.$$

Рассмотрим теперь оптимальность с точки зрения выгодности решения для всех пользователей. Для рассматриваемой СМО покажем, что найденная ситуация равновесия $x^*=(x_1^*,…, x_n^*)$ является также и Парето-оптимальной. Опираясь на утверждение (1) и полагая все $\alpha_i>0, i\in I$ равными между собой, рассмотрим функцию $L(x)=\sum\alpha L_i(x_1,...,x_n),\ x\in X.$

Покажем, что функция $L(x)$ достигает минимума в точке $x^*=(x_1^*,…, x_n^*)$, где x_{ij}^* определены по формуле (12). Это соответствует выполнению равенства (1).

Так как $x_{i1}=1-\sum_{j=2}^m x_{ij}\ (i=1,...n)$, то

$$\Lambda_1=\sum_{i=1}^n(1-\sum_{j=2}^m x_{ij})\lambda_i;$$

$$\Lambda_j=\sum_{i=1}^n x_{ij}\lambda_i,\quad j=2,...,m;$$

$$L_i(x_1,...,x_n)=$$
$$=\lambda_i\left[(1-\sum_{j=2}^m x_{ij})\frac{\Lambda_1}{\mu_1+\Lambda_1}+\sum_{j=2}^m x_{ij}\frac{\Lambda_j}{\mu_j+\Lambda_j}\right],$$
$$i=1,...,n;$$

$$L(x)=\alpha\sum_{i=1}^n\left[\lambda_i(1-\sum_{j=2}^m x_{ij})\frac{\Lambda_1}{\mu_1+\Lambda_1}\right]+$$
$$+\alpha\sum_{i=1}^n\left[\lambda_i\sum_{j=2}^m x_{ij}\frac{\Lambda_j}{\mu_j+\Lambda_j}\right].$$

Для нахождения минимума функции $L(x)$ воспользуемся необходимыми условиями экстремума и получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}}=\alpha\lambda_i\left[\frac{\Lambda_j(2\mu_j+\Lambda_j)}{(\mu_j+\Lambda_j)^2}-\frac{\Lambda_1(2\mu_1+\Lambda_1)}{(\mu_1+\Lambda_1)^2}\right]=0,$$
$$j=2,..m;\quad i=1,...,n,$$

которая приводится к уравнениям вида:

$$\mu_1^2\Lambda_j^2+2\mu_1^2\mu_j\Lambda_j-\Lambda_1\mu_j^2(2\mu_1+\Lambda_1)=0,\quad j=2,...,m.$$

Решение полученных квадатных уравнений относительно Λ_j запишется в виде:

$$\Lambda_j=-\mu_j+\sqrt{\mu_j^2+\frac{\Lambda_1\mu_j^2(2\mu_1+\Lambda_1)}{\mu_1^2}}=\frac{\mu_j\Lambda_1}{\mu_1},\quad j=2,...,m.$$

Суммируя полученные решения по j = 1,…, m, найдем:

$$\sum_{j=1}^m\Lambda_j=\sum_{j=2}^m\frac{\mu_j\Lambda_1}{\mu_1}+\Lambda_1\quad\text{или}\quad\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{j=1}^m\frac{\mu_j\Lambda_1}{\mu_1},$$

откуда $\Lambda_1=\dfrac{\mu_1\sum_{i=1}^n\lambda_i}{\sum_{j=1}^m\mu_j}=\dfrac{\mu_1\lambda}{\mu}.$

Тогда $\Lambda_j=\dfrac{\mu_j\Lambda_1}{\mu_1}=\dfrac{\mu_j\lambda}{\mu},\quad j=1,...,m.$ Зная Λ_j (j = 1,…, m), можем определить координаты точки экстремума из системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i x_{ij}=\Lambda_j,\quad j=1,...,m,$$

решение которой получаем в виде:

$$x_{ij}=\frac{\mu_j}{\mu},\quad i=1,...,n,\quad j=1,...,m.$$

Видим, что данное решение совпадает с координатами точки равновесия. Таким образом, ситуация равновесия является Парето-оптимальной.

Чавстный случай. В частном случае m = 2 (двулинейной СМО) пользователь A_i направляет свои требования на 1-й прибор с вероятностью x_i ($0\le x_i\le 1$), на второй – с вероятностью ($1-x_i$). Время обслуживания требования на каждом приборе подчиняется показательному распределению с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Среднее число отказов в обслуживании заявок каждого клиента за единицу времени:

$$L_i(x_1,...,x_n)=\lambda_i x_i P_1(x_1,...,x_n)+$$
$$+\lambda_i(1-x_i)P_2(x_1,...,x_n)\quad(i=1,...,n),$$

P_1 и P_2 – стационарные вероятности того, что занят первый или второй прибор соответственно.

Так как образуется два простейших потока к обслуживающим приборам с интенсивностями

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ и } \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - x_i),$$

то функция потерь каждого игрока принимает вид:

$$L_i(x_1,...,x_n) = \lambda_i x_i \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + \Lambda_1} +$$

$$+ \lambda_i (1 - x_i) \frac{\Lambda_2}{\mu_2 + \Lambda_2} \quad (i = 1,...,n).$$

Ситуация равновесия также определяется из условий (2)-(4), где $x_{i1} = x_i, x_{i2} = 1 - x_i, i = 1,...,n$. В результате получается система нелинейных уравнений:

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 + \mu_1} - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 + \mu_2} +$$

$$+ \lambda_i \left[\frac{\mu_1 x_i}{(\Lambda_1 + \mu_1)^2} - \frac{\mu_2 (1 - x_i)}{(\Lambda_2 + \mu_2)^2} \right] = 0, \qquad (13)$$

$i = 1,..., n,$

которая сводится к одному уравнению относительно переменной Λ_1:

$$a \Lambda_1^3 + b \Lambda_1^2 + c \Lambda_1 + d = 0,$$

где

$$a = (1 - n)(\mu_1 + \mu_2),$$

$$b = (n - 1)\lambda\mu_1 - \lambda(\mu_1 + \mu_2) + \\ + n(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_1 + \lambda),$$

$$c = (n + 1)\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) + \\ + (1 - n)\lambda^2\mu_1 + 2n\lambda\mu_1^2,$$

$$d = -\lambda\mu_1^2(\mu_2 + n\mu_2 + n\lambda).$$

Действительным решением данного уравнения является:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \text{ (тогда } \Lambda_2 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\text{).}$$

Подставляя полученные значения Λ_1 и Λ_2 в (13), найдем:

$$x_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \; i = 1,...,n.$$

Данное решение совпадает с решением (12), полученным в общем случае. Проверка выполнения условий (3)

$$\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} = 2\lambda_i^2 \left[\frac{\mu_1 \left(\sum_{k \neq i} \lambda_k x_k + \mu_1 \right)}{(\Lambda_1 + \mu_1)^3} + \frac{\mu_2 \left(\sum_{k \neq i} \lambda_k (1 - x_k) + \mu_2 \right)}{(\Lambda_2 + \mu_2)^3} \right] > 0$$

подтверждает, что каждая функция L_i строго выпукла по «своей» переменной x_i. Следовательно, найденное решение является единственным и представляет собой ситуацию равновесия. То есть каждый пользователь посылает заявку на первый прибор с одной и той же вероятностью $\mu_1 / (\mu_1 + \mu_2)$, а на второй прибор – с вероятностью $\mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$.

При этом

$$L_i(x_1^*,...,x_n^*) = \lambda_i \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \mu_1 + \mu_2 \right), \quad i = 1,...,n.$$

Также можно показать, что данное решение является Парето-оптимальным. Опираясь на утверждение (1) и полагая все $\alpha_i > 0, i \in I$ равными между собой, рассмотрим функцию:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \alpha \left[\frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1 + \mu_1} + \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_2 + \mu_2} \right].$$

Матрица Гессе H данной функции положительно полуопределена, так как для любого $x \in X$ и любого ненулевого вектора y размерности n квадратичная форма

$$\langle Hy, y \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j = 2\alpha \left[\frac{\mu_1^2}{(\Lambda_1 + \mu_1)^3} + \frac{\mu_2^2}{(\Lambda_2 + \mu_2)^3} \right] \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j y_i y_j =$$

$$= 2\alpha \left[\frac{\mu_1^2}{(\Lambda_1 + \mu_1)^3} + \frac{\mu_2^2}{(\Lambda_2 + \mu_2)^3} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right)^2 \geq 0.$$

Следовательно, функция $L(x)$ выпукла на множестве $X = \prod_{1}^{n} [0,1]$, а её минимум определяется из системы уравнений: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,..., n.$ Данная система сводится к одному уравнению:

$$\frac{\mu_1^2}{(\Lambda_1 + \mu_1)^2} - \frac{\mu_2^2}{(\Lambda_2 + \mu_2)^2} = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Такие значения Λ_1 и Λ_2 получаются при $x_i = \mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$, $i = 1,\ldots,n$, представляющими собой координаты ситуации равновесия. Таким образом, ситуация равновесия является Парето-оптимальной.

2. Полумарковские СМО с отказами

Постановка задачи. Рассмотрим СМО с m параллельно функционирующими приборами. На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i ($i = 1,\ldots, n$). Пользователь A_i с вероятностью x_{ij} ($0 \le x_{ij} \le 1$, $\Sigma\, x_{ij} = 1$) направляет свои требования на j-й прибор. Время обслуживания требования на каждом приборе есть случайная величина с произвольным законом распределения с известным первым моментом τ_j ($j = 1,\ldots, m$).

В результате объединения простейших потоков по полиномиальной схеме и декомпозиции получаем следующее выражение для среднего числа отказов в обслуживании за единицу времени, характеризующего эффективность распределения заявок по приборам для каждого пользователя:

$$L_i(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \frac{\Lambda_j \tau_j}{1+\Lambda_j\tau_j}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Ставится задача: найти оптимальное распределение ($x_1^*,\ldots, x_n^*$) заявок по каналам для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания.

Оптимизация. Ситуация равновесия $x^* = (x_1^*,\ldots, x_n^*)$ определяется из условий (2)-(4). Для нахождения ситуации равновесия воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для функций Лагранжа вида

$$Z_i(x_1,\ldots,x_n) = L_i(x_1,\ldots,x_n) - \beta_i\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - 1\Big), \quad i = 1,\ldots,n,$$

где β_i – множители Лагранжа, условия (2)-(4) приводят к системе нелинейных уравнений по переменным x_{ij}, β_i ($i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots, m$):

$$\left[\frac{\Lambda_j^2\tau_j^2 + \Lambda_j\tau_j + x_{ij}\lambda_i\tau_j}{(1+\Lambda_j\tau_j)^2}\right] = \frac{\beta_i}{\lambda_i}, \tag{14}$$

$$j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - 1 = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{14′}$$

Решая данную систему по аналогии с системой (5) п. 1, получим:

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \Bigg/ \tau_1 \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\tau_j}; \tag{15}$$

и затем:

$$x_{ij} = \left(\tau_j \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\tau_j}\right)^{-1}, \quad j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{16}$$

Чтобы убедиться, что решение (16) представляет собой ситуацию равновесия, проверим выполнение условий (2)-(4). Для каждой функции L_i ($x_1^*,\ldots, x_{i-1}^*$, x_i, $x_{i+1}^*,\ldots, x_n^*$), $i = 1,\ldots, n$, найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_{ij}^2} =$$

$$= \frac{\Lambda_j\tau_j(1+\Lambda_j\tau_j - x_{ij}\lambda_i\tau_j)}{(1+\Lambda_j\tau_j)^3} > 0, \; j = 1,\ldots,m,$$

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_{ij}\partial x_{ik}} = 0,$$

$$j,k = 1,\ldots,m, \quad j \ne k.$$

Очевидно, матрица Гессе положительно определена, следовательно, решение (16) является ситуацией равновесия. Потери каждого игрока в ситуации ($x_1^*,\ldots, x_n^*$) равны:

$$L_i(x_1^*,\ldots,x_n^*) = \lambda_i \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \sum_{j=1}^{m}\mu_j\right), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Аналогично п.1 для рассматриваемой СМО можно показать, что ситуация равновесия (16) является Парето-оптимальной.

Частный случай. Рассмотрим СМО с двумя параллельно функционирующими приборами. На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i ($i = 1,\ldots,n$). Пользователь A_i с вероятностью x_i ($0 \le x_i \le 1$) направляет свои требования на 1-й прибор, а с вероятностью ($1 - x_i$) – на второй. Время обслуживания требований на каждом приборе суть случайная величина с произвольным распределением с известными первыми моментами τ_1 и τ_2 соответственно. Среднее число отказов в обслуживании за единицу времени (функции потерь игроков A_i):

$$L_i(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_i x_i \frac{\Lambda_1\tau_1}{(1+\Lambda_1\tau_1)} +$$

$$+ \lambda_i(1-x_i)\frac{\Lambda_2\tau_2}{(1+\Lambda_2\tau_2)}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Ставится задача: найти оптимальное распределение ($x_1^*,\ldots, x_n^*$) заявок для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания.

Оптимизация. Для определения ситуации равновесия снова воспользуемся условиями (2)-(4) при $x_{i1} = x_i$, $x_{i2} = 1 - x_i$, $i = 1,\ldots,n$, которые приводят к системе нелинейных уравнений по переменным ($x_1,\ldots, x_n$):

$$\frac{\Lambda_1\tau_1}{1+\Lambda_1\tau_1} - \frac{\Lambda_2\tau_2}{1+\Lambda_2\tau_2} +$$

$$+ \lambda_i\left[\frac{\tau_1 x_i}{(1+\tau_1\lambda_1)^2} - \frac{\tau_2(1-x_i)}{(1+\Lambda_2\tau_2)^2}\right] = 0,$$

$$i = 1,\ldots, n.$$

Данную систему можно свести к уравнению *относительно одной переменной Λ_1. Представляя уравнения системы в виде:*

$$\lambda_i x_i = \frac{\lambda_i \tau_2 (1+\Lambda_1\tau_1)^2 + (1+\Lambda_1\tau_1)(1+\Lambda_2\tau_2)[\Lambda_2\tau_2(1+\Lambda_1\tau_1) - \Lambda_1\tau_1(1+\Lambda_2\tau_2)]}{\tau_1(1+\Lambda_2\tau_2)^2 + \tau_2(1+\Lambda_1\tau_1)^2} \qquad (17)$$

и суммируя их по $i = 1,\ldots, n$, получим одно уравнение относительно неизвестного Λ_1 ($\Lambda_2 = \lambda - \Lambda_1$):

$$a\Lambda_1^3 + b\Lambda_1^2 + c\Lambda_1 + d = 0,$$

где

$$a = \frac{(1-n)(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1\tau_2},$$

$$b = (n-1)\frac{\lambda}{\tau_1} - \frac{\lambda(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1\tau_2} + \frac{n(\tau_1+\tau_2)(\tau_1-\tau_2+\lambda\tau_1\tau_2)}{\tau_1^2\tau_2^2},$$

$$c = \frac{(1-n)\lambda^2}{\tau_1} + \frac{2n\lambda}{\tau_1^2} + \frac{(n+1)(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1^2\tau_2^2},$$

$$d = -\frac{\lambda(1+n+n\lambda\tau_2)}{\tau_1^2\tau_2}.$$

Действительным решением данного уравнения является: $\Lambda_1 = \dfrac{\lambda\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ (тогда $\Lambda_2 = \dfrac{\lambda\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$).

Подставляя полученные значения Λ_1 и Λ_2 в (17), найдем:

$$x_i = \frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}, \qquad i = 1,\ldots,n. \qquad (18)$$

Нетрудно показать, что данное решение действительно является ситуацией равновесия. Проверяя выполнение условий (3), получим:

$$\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} = 2\lambda_i^2 \left[\frac{\tau_1\left(1+\tau_1\sum\limits_{k\neq i}\lambda_k x_k\right)}{\left(1+\Lambda_1\tau_1\right)^3} + \frac{\tau_2\left(1+\tau_2\sum\limits_{k\neq i}\lambda_k(1-x_k)\right)}{\left(1+\Lambda_2\tau_2\right)^3} \right] > 0.$$

Это означает, что L_i строго выпукла по «своей» переменной x_i. Следовательно, найденное решение является единственным и представляет собой ситуацию равновесия. Таким образом, каждый пользователь посылает заявку на первый прибор с одной и той же вероятностью, равной $\tau_2/(\tau_1+\tau_2)$, а на второй прибор – с вероятностью $\tau_1/(\tau_1+\tau_2)$. При этом значения функций L_i равны:

$$L_i = \lambda_i\tau_1\tau_2\sum\lambda_i / (\tau_1+\tau_2+\tau_1\tau_2\sum\lambda_i) \quad i = 1,\ldots,n.$$

Покажем, что найденная ситуация равновесия (18) является также и Парето-оптимальной. Рассмотрим функцию

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_i(x) = \alpha\sum_{i=1}^{n}L_i(x) = \alpha\left[\frac{\Lambda_1^2\tau_1}{1+\Lambda_1\tau_1} + \frac{\Lambda_2^2\tau_2}{1+\Lambda_2\tau_2}\right]$$

и найдём её минимум. Так как для любого $x \in X$ и любого ненулевого вектора y размерности n квадратичная форма:

$$<Hy, y>=$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}y_i y_j = 2\alpha\left[\frac{\tau_1}{(1+\Lambda_1\tau_1)^3} + \frac{\tau_2}{(1+\Lambda_2\tau\ )^3}\right]\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j y_i y_j =$$

$$= 2\alpha\left[\frac{\tau_1}{(1+\Lambda_1\tau_1)^3} + \frac{\tau_2}{(1+\Lambda_2\tau_2)^3}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right)^2 \geq 0,$$

то функция $L(x)$ выпукла на множестве:

$$X = \prod_{1}^{n}[0,1],$$

а ее минимум определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\alpha\lambda_i\left[\frac{1}{(1+\Lambda_1\tau_1)^2} - \frac{1}{(1+\Lambda_2\tau_2)^2}\right] = 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Данная система сводится к одному уравнению:

$$\frac{1}{(1+\Lambda_1\tau_1)^2} - \frac{1}{(1+\Lambda_2\tau_2)^2} = 0$$

решением которого является:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda\tau_2}{\tau_1+\tau_2}, \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda\tau_1}{\tau_1+\tau_2}.$$

Такие значения $\Lambda_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$

и $\Lambda_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(1-x_i)$

получаются при $x_i = \dfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$, $i = 1,\ldots,n$, представляющими собой координаты ситуации равновесия (18). Таким образом, ситуация равновесия является Парето-оптимальной.

Литература

1. Воробьев, Н. Н. Теория игр / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
2. Чекменев, В. А. Оптимизация управляемых СМО с конкурирующими потоками / В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева // Проблемы теоретической кибернетики. – Горький, 1988.
3. Вилкас, Э. И. Оптимальность в играх и решениях / Э. И. Вилкас. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
4. Чекменев В. А. Анализ и оптимизация систем связи, функционирующих в условиях конкуренции / В. А. Чекменев, М. В. Сарычев // Информ. технол. и матем. моделирование: мат. Всерос. науч.-практ. конфер. – Томск: Твердыня, 2002. – 368 с.

Информация об авторах:

Чекменев Владимир Алексеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики математического факультета КемГУ, 8-923-612-48-90, chtd42@eandex.ru.
Vladimir A. Chekmenev – Candidate of Technical Science, Associate professor, Assistant Professor at the Department of Automation of Studies and Technical Cybernetics, Kemerovo Stsate University.

Чекменева Татьяна Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент кафедры общей и региональной экономики экономического факультета КемГУ, 8-923-612-4890, chtd42@yandex.ru.
Tatyana D. Chekmeneva – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Assistant Professor at the Department of General and Regional Economics, Kemerovo State University.