КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ КАК ПРАКТИЧЕСКАЯ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Сергей И. Сергеев
Национальный институт образования, Минск, Беларусь
Э-почта: sergeevsedu@gmail.com

Мария А. Урбан
Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
Э-почта: maria.urban62@gmail.com

Абстракт

В исследовании рассматриваются методические аспекты конструирования интерактивной динамической визуализации в математическом образовании. Конструирование дидактически эффективной визуализации является самостоятельной педагогической задачей, продиктованной интенсивным развитием мультимедиа. Задачей, объективно носящей комплексный характер, поскольку содержательный и инструментальный компоненты компьютерной визуализации в существенной степени взаимозависимы.
На примере нескольких специально спроектированных апплетов определяются факторы, позволяющие динамической визуализации сыграть ключевую роль в формировании концептуального понимания учащимися сложных математических понятий и предложений. К таким факторам в первую очередь следует отнести реализацию динамической связи между двумя разными репрезентациями одного и того же математического объекта, а также между различными объектами. Выявить особенности этих связей, часто неочевидные, в ряде случаев можно с помощью введения в состав апплета вспомогательных визуальных элементов. Их конструктивные характеристики проектируются на основе дидактического анализа проблемы, для решения которой создается апплет. Принципиальным моментом является то, что эти визуальные элементы, как правило, удается эффективно реализовать только с помощью компьютерных технологий и сами по себе они являются методическим «изобретением» разработчиков.
Ключевые слова: *компьютерная визуализация, интерактивная динамическая визуализация, математический апплет.*

Введение

Более трех десятилетий визуализация в математике и в математическом образовании находится в центре внимания широкого педагогического сообщества (Gilbert, 2008; Giaquinto, 2007; Hitt, 2002; Mancosu, 2005). Это, в частности, нашло отражение в ряде учебных пособий, основанных на когнитивно-визуальном подходе, созданных, например, Carter (2009); Needham (2000). Причем, если во втором случае речь идет о комплексном анализе, то в первом – о теории групп, дисциплине, как известно, оперирующей чрезвычайно абстрактными понятиями.

Очевидно, что интерес к визуализации главным образом стимулирован развитием компьютерных технологий, которые не только кардинально расширили ее применение в математических исследованиях, но и в целом оказали существенное влияние на характер профессиональной деятельности математиков. Так, уже в 2007 г. около 67% математиков использовали при проведении исследований системы компьютерной алгебры (Lavicza, 2007). Характерно, что эти системы в последние годы были в значительной степени усилены именно за счет динамической визуализации. Все это позволило ряду исследователей прийти к выводу о том, что «с динамическими средствами математика может стать наукой экспериментальной (и она уже стала таковой в некоторых своих теоретических разделах), наукой, в которой деятельность, связанная с экспериментом и наблюдением, так же важна, как логика и доказательство» (Hoyles, Lagrange & Noss, 2006, p.264, перевод с англ.яз. авторов). В связи с этим Hoyles and Lagrange (2010) поднимают важный вопрос об организации экспериментальной деятельности учащихся в процессе обучения математике, о роли и условиях эффективности динамических репрезентаций в этой деятельности.

В 2010 г. вышел в свет том научных исследований в New ICMI Study Series, посвященных цифровым технологиям в образовании (Hoyles & Lagrange, 2010). В качестве главного рассматривался вопрос о том, каким образом могут быть сконструированы технологические среды обучения, способные значительным образом стимулировать математическое мышление учащихся. Учитывая центральную роль компьютерной визуализации в этом процессе, конструирование дидактически эффективной динамической визуализации выступает в качестве актуальной педагогической задачей.

Методология исследования

Целью исследования являлось выявление факторов, позволяющих динамической визуализации сыграть важную роль в формировании концептуального понимания учащимися сложных математических понятий. Для исследования были отобраны три вида учебных заданий, традиционно вызывающих трудности у значительного большинства учащихся. Эти задания представляют собой три принципиально разные дидактические ситуации с точки зрения использования привычных средств обучения: для решения первой задачи учитель может использовать на занятии сюжетный рисунок, для второй - схематический чертеж, для третьей – материальный объект. При выборе заданий также учитывалась возможность проведения исследования на примере разных возрастных групп учащихся (начальная, средняя и старшая школа).

На основе дидактического анализа каждого из трех видов заданий были определены методические идеи, на базе которых проектировалась динамическая визуализация в составе математических апплетов. В процессе разработки апплетов проводились учебные занятия с учащимися, интервью, консультации с учителями, в ходе которых корректировалась конструкция апплетов. С помощью сравнительного анализа дидактических возможностей традиционных средств обучения и их компьютерных «аналогов» были определены некоторые значимые факторы, влияющие на дидактическую эффективность компьютерной визуализации.

Динамическая визуализация и сюжетный рисунок

Рассматривая функции доказательств в математическом образовании De Villiers (1990) выделил две основные: верифицирующую и объяснительную. Учитель, безусловно, должен стараться выбирать такие доказательства, объяснительная функция которых выражена ярче. Это же относиться и к объяснению решений задач. Роль, которую при этом может сыграть динамическая визуализация, проанализируем на примере следующей задачи из стандартного учебника математики для 6-го класса

PROBLEMS
OF EDUCATION
IN THE 21st CENTURY
Volume 49, 2012

Задача. Сколько полных оборотов сделало колесо велосипеда, если сам велосипед проехал расстояние в 13 метров? Радиус колеса равен 0,5 метра.

Опыт показывает, что для учащихся 11-12 лет эта задача является довольно сложной – чрезвычайно редко она решается ими самостоятельно. Учителя признают, что даже пользуясь изображением велосипеда, трудно «доступно» объяснить решение задачи. Поэтому на практике чаще всего они просто предлагают учащимся записать решение, отдельно объясняя каждый его пункт, а в дальнейшем решать задачи этого типа по схеме предложенного решения:

1. За один оборот колеса велосипед проходит расстояние равное длине окружности колеса.

2. Длина окружности колеса вычисляется по формуле 2 R. В нашем случае она равна   метрам, то есть приближенно 3,14 метра.

3. Разделим 13 м на 3.14 м. Получается приблизительно 4.14. Это значит, что в отрезок длины 13 целиком «входят» четыре отрезка длины 3,14 м. Ответ: колесо велосипеда совершит 4 полных оборота.

Такое, аналитическое по сути, решение не вызывает удовлетворение у большинства учащихся – в лучшем случае оно воспринимается как формальный алгоритм решения задач определенного типа. Между тем, сама задача заслуживает серьёзного внимания, поскольку является одной из немногих задач для учащихся этого возраста, на примере которой можно показать реальную, а не надуманную, как это часто бывает, связь математики с действительностью. Решение задачи дает, например, ответ на вопрос, каким образом бортовой компьютер автомобиля «догадывается» о том, какое расстояние проезжает автомобиль: компьютер просто считает число совершенных оборотов колеса, а затем «переводит» его в пройденное расстояние. Кроме того, эта задача имеет значительную ценность в плане пропедевтики ряда сложных математических и физических понятий. В силу этих причин становится актуальным проектирование компьютерного инструмента, с помощью которого можно было бы достичь не формального, а осознанного понимания учащимися решения рассматриваемой задачи - то, что Thurston (1990) называет «подлинным пониманием» (real understanding).

Созданию визуализации должен предшествовать анализ проблемы, которую с помощью визуализации предстоит решить. На его основе строится основная идея визуализации, а также конструируются необходимые инструменты и определяются их характеристики. Для нашей задачи анализ включает два пункта, главным из которых является второй:

1. Прежде всего, нужно объяснить, что означает выражение: «велосипед проехал расстояние в 13 метров». Во всех задачах на движение, решавшихся учащимися ранее, их учили пренебрегать размерами велосипеда и рисовать его в виде маленького кружка. В этой же задаче велосипед нельзя считать материальной точкой, учитывая, что его размеры вполне соизмеримы с пройденным расстоянием. Поэтому встает вопрос, как следует измерять пройденное велосипедом расстояние.

2. Ключевым вопросом является определение методического подхода к построению визуализации, с помощью которой можно было бы объяснить утверждение: «за один оборот колеса велосипед проходит расстояние, равное длине окружности колеса». Это объективно сложное утверждение практически никогда не воспринимается учащимися в словесной формулировке, особенно на слух, поскольку им приходится мысленно представить взаимоотношения сразу трех объектов, два из которых к тому же динамичны. Сама по себе визуализация движения велосипеда не дает ключа к решению.

Для объяснения задачи разработана визуализация в составе апплета (рис.1-2), основная идея которой состоит в «разматывании» окружности колеса в ходе движения. Причем учащийся делает это самостоятельно с помощью слайдера (рис.2). Для этого нам пришлось ввести вспомогательный визуальный элемент – «ленту» тонкого слоя краски.

Визуальный эффект «разматывания» представляет на самом деле важную математическую конструкцию - отображение окружности на промежуток. Отметим, что «обратное» отображение – «наматывание» прямой на окружность имеет ключевое значение для формирования концептуального понимания понятия «тригонометрическая функция числового аргумента». На примере задачи можно исследовать сложное движение, включая траектории движения точки в разных системах отсчета. Добавим, что и для определения пройденного велосипедом расстояния использовалась компьютерная анимация.

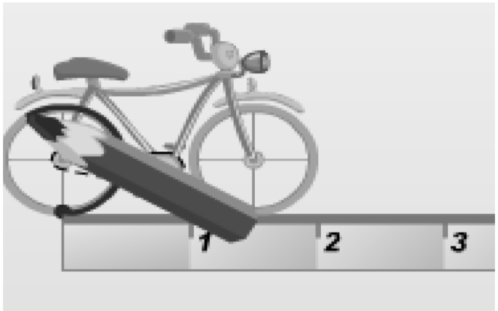

Рисунок 1. Вспомогательный визуальный элемент.

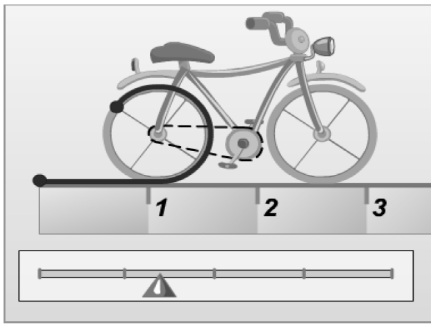

Рисунок 2. «Разматывание» колеса с помощью слайдера.

Динамическая визуализация и схематический чертеж

Трудности построения по графику заданной функции графика ее производной можно объяснить сопутствующими вычислительными трудностями: необходимо построить достаточно много точек графика производной, для построения каждой из которых требуется измерить угол наклона соответствующей касательной и вычислить его тангенс. Подобные задания можно отнести к классу «нетехнологичных», если в нашем распоряжении только карандаш, чертеж и угольник: объем непродуктивной деятельности очевидным образом нивелирует дидактическую ценность задания. Однако это же задание может вполне быть педагогически эффективным, если с помощью цифровых технологий дать возможность учащимся сосредоточиться на концептуальных, визуальных по своей природе, аспектах понятия «производная». С этой целью сконструирован апплет «Построение графика производной» (рис.3).

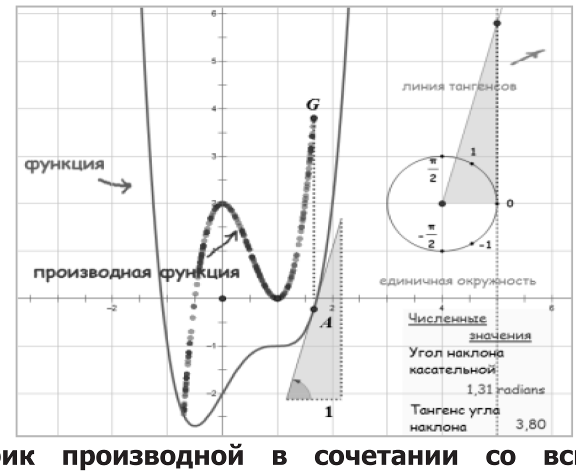

Рисунок 3. График производной в сочетании со вспомогательным визуальным элементом.

Одно из преимуществ динамической визуализации перед статической состоит в том, что она дает возможность рассмотреть в динамике генезис нового математического объекта. В нашем случае – графика производной, который строится интерактивно по графику заданной функции. Свойства нового математического объекта – производной, определенным образом зависят от свойств порождающего объекта – функции. Визуальным инструментом построения является вспомогательный прямоугольный треугольник, динамически связанный с выбранной точкой графика. Учащийся двигает точку графика функции и наблюдает построение соответствующей точки графика новой функции – производной. Поскольку график производной строится динамически, то у учащегося есть возможность непосредственно связать свойства обеих функций, например, при построении точек графика производной функции в окрестностях точек экстремумов или перегибов заданной функции. Поэтому задания, созданные на основе апплета, носят преимущественно качественный характер и связаны с объяснением свойств графика производной в зависимости от свойств графика исходной функции.

Очень важно, что получена возможность осуществлять неаналитическое, без необходимости выполнения трудоемких вычислений, построение графика производной, что просто невозможно сделать без участия цифровых технологий. Все это дает возможность сосредоточить внимание учащихся на концептуальных, визуальных по своей природе, аспектах понятия «производная». Опыт применения апплета на практике показал, что хотя имеется опция отображения на экране двух дополнительных областей: единичной окружности с линией тангенсов и численных значений (рис.3), учащиеся практически никогда не пользуются последней. Оптимальной конфигурацией является наличие на экране двух динамически связанных геометрических репрезентаций.

Динамическая визуализация и материальный объект

Часто динамическая визуализация может строиться на разнообразных культурных артефактах, до сих пор применяемых в школьном обучении математике (абак, палетка и др.). Однако имеет ли она в этом случае существенное преимущество по сравнению с «оригиналом»? Поверхностный взгляд на проблему может подтолкнуть учителя к выводу о том, что применение компьютерных инструментов по своим дидактическим возможностям аналогично применению традиционной модели культурного артефакта. Результаты бесед с учителями позволили нам сделать вывод о том, что подобная оценка эффективности компьютерных инструментов учителями часто связана с тем, что они используют новое дидактическое средство с разнообразными и нетривиальными возможностями, применяя прежнюю традиционную и привычную методику работы.

Сравнительный анализ выполним на примере одного из популярных дидактических средств, которое в различных интерпретациях используется в начальном обучении математике – позиционного абака. Прототипом этого пособия является известный культурный артефакт – абак, или «счетная доска». Методика использования позиционного абака интересует многих современных ученых, занимающихся вопросами визуализации математического учебного материла в начальной школе (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Дрозд, Столяр, 1988). Сравним традиционный абак с его компьютерным «аналогом» с точки зрения возможностей решения ключевой проблемы формирования понятия числа у маленького ребенка, связанной со сложностью понимания идеи «замены» десяти единиц одного разряда только одной единицей последующего разряда.

Традиционный абак имеет одно, но существенное преимущество перед его компьютерным «аналогом»: ребенок может иметь специфические тактильные ощущения, нанизывая косточки на спицы абака. Однако возможности представления всех «превращений» числа в динамике с избытком компенсируют это неизбежное ограничение компьютерной визуализации:

1. На традиционном абаке ребенок не видит, как скоро разряд «заполнится», он вынужден постоянно сопровождать практические действия счетом. Компьютерный абак освобождает ребенка от необходимости вести механический счет, т.к. визуальный сигнал информирует его о том, что разряд уже «заполнен».

2. На традиционном абаке не получается убедительно показать идею «превращения» разрядов, т.к. сама операция замены десяти единиц младшего разряда одной единицей старшего разряда (и наоборот) раздроблена на столь мелкие и долгие по времени этапы, что целостность восприятия идеи в целом нарушается - по М.Вергтеймеру (1987) нет возможности «симультанно», целостно охватить сразу весь процесс. По нашим экспериментальным замерам, в некоторых случаях на подобную замену у ребенка уходило до 10 минут учебного времени. Компьютерный абак по своим визуальным возможностям близок к весьма привлекательной для маленького ребенка «сказочной» анимации: превращения происходят мгновенно, и идея замены десяти единиц младшего разряда фиксируется в четком и целостном ментальном образе.

3. Для иллюстрации случаев вычислений с переходом через разрядную единицу на традиционном абаке сложно показать идею, которая на бытовой школьной лексике часто формулируется как «три пишу, один запоминаю». Ведь даже если использовать косточки разных цветов, невозможно предугадать, где начнется столбик из косточек другого цвета - тот самый десяток, который мы будем заменять одной косточкой, обозначающей единицу старшего разряда. Компьютерный абак показывает в динамике, как десяток косточек, предназначенный для замены, визуально «вырастает» вместе с выполнением практической операции сложения (рис.4).

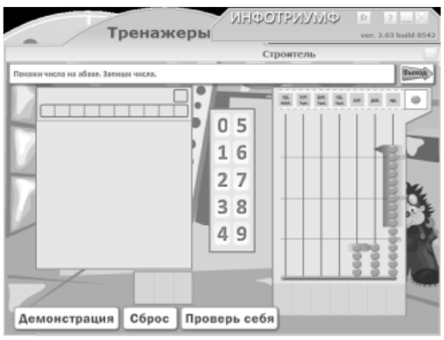

Рисунок 4. Выделение десятка на компьютерном абаке.

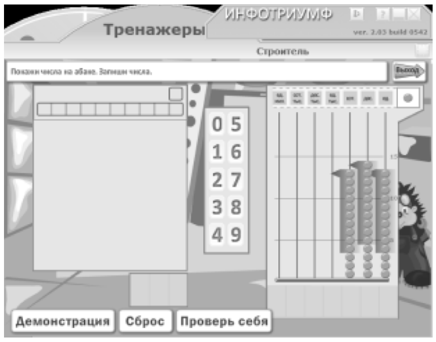

Рисунок 5. Нестандартное задание на компьютерном абаке.

4. Традиционный абак является средством обучения, которое зависит от используемого учебного метода и позволяет реализовать достаточно ограниченный набор дидактических заданий. Компьютерный абак является новым дидактическим средством, потенциал которого позволяет конструировать нетривиальные задания и в целом оказывает серьезное влияние на изменение методики обучения младших школьников. Например, на компьютерном абаке можно предложить ребенку «фантастическую» модель числа и попросить его «навести в ней порядок» (рис.5).

Обсуждение результатов

Приведенные примеры динамической визуализации показывают, что с ее помощью можно в значительной степени повысить качество понимания абстрактных математических понятий за счет визуализации существенных характеристик, связей и отношений, которые невозможно либо крайне затруднительно показать традиционными дидактическими средствами.

PROBLEMS
OF EDUCATION
IN THE 21st CENTURY
Volume 49, 2012

Разработанный для старших классов школы апплет помогает сформировать понятие производной как функции, свойства которой зависят от свойств порождающей функции. График производной строится динамически. При этом у данной визуализации нет реального, физически существующего в традиционной системе средств обучения аналога. Апплет, предназначенный для средних классов школы, включает визуализацию процесса движения физического объекта на качественно ином уровне, чем это возможно осуществить с помощью наблюдения за реально движущимся объектом. Визуализация идеи «разматывания» обода колеса принципиально влияет на понимание учащимися идеи, лежащей в основе решения текстовой арифметической задачи, имеющей значение не только в математическом, но и в более широком социальном контексте.

Апплет, сконструированный для начального курса математики, интересен тем, что является, по сути, компьютерным аналогом известного культурного артефакта – абака, который до сих пор применяется в качестве средства изучения нумерации чисел и арифметических действий. Тем не менее возможности данного апплета позволяют получить значительно больший дидактический эффект за счет визуализации процесса замены разрядных единиц и конструирования нетривиальных дидактических заданий.

Как известно, сама по себе динамическая визуализация априори не гарантирует преимущества в дидактическом аспекте перед статическими изображениями, поэтому решение о ее разработке и применении должно быть методически обосновано. Эффективная динамическая визуализация может помочь сформировать адекватную ментальную модель исследуемого понятия или процесса. Взаимодействуя с динамической визуализацией учащийся может понять, каким образом «устроена» некая математическая конструкция, определить существенные связи между ее элементами и в итоге осмыслить лежащие в ее основе математические идеи и понятия.

Заключение

Следствием обогащения традиционной системы средств обучения новыми компьютерными инструментами является наметившаяся в настоящее время тенденция к переосмыслению и обновлению методики обучения математике. Основным фактором, влияющим на этот процесс, можно признать дидактические возможности компьютерной визуализации. В рамках исследования спроектированы три апплета с целью определения факторов, позволяющих динамической визуализации сыграть ключевую роль в формировании концептуального понимания учащимися сложных математических понятий и предложений. Сравнительный анализ дидактических возможностей традиционных средств обучения и созданных апплетов выявил некоторые значимые факторы, влияющие на дидактическую эффективность компьютерной визуализации. К ним можно отнести:

- дидактический анализ проблемы, для решения которой создается визуализация, на основе которого формулируется методическая идея; последняя должна быть направлена на быстрое и, по возможности, целостное «схватывание» учащимися существенных сторон изучаемых математических понятий;
- конструирование специальных вспомогательных визуальных элементов и визуальных эффектов, с помощью которых можно выявить особенности связи, в том числе динамической, между репрезентациями математических объектов; конструктивные характеристики визуальных элементов проектируются на основе дидактического анализа с учетом возможностей предполагаемой среды разработки;
- создание возможностей конструирования новых, нетривиальных дидактических заданий, позволяющих ученику исследовать изучаемое понятие в условиях самостоятельного поиска и учебного экспериментирования.

В учебной практике компьютерные инструменты могут выступать как в качестве дополнительных средств обучения, визуализирующих отдельные элементы знаний, так и в качестве доминантных, существенно влияющих на все остальные компоненты методической системы. В любом случае у преподавателя появляется возможность конструирования принципиально новых, часто нетривиальных, дидактических заданий с использованием компьютерной визуализации.

Литература

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, *second revised edition* (pp. 746-805). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Carter, N. (2009). *Visual Group Theory.* Mathematical Association of America (MAA*).*

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Gilbert, J. K., Nakhleh, M. & Reiner, M. (Eds.). (2008). *Visualization: Theory and Practice in Science Education*. Dordrecht: Springer.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics. An epistemological study.* Oxford: Oxford University Press.

Hitt, F. (Ed.) (2002). *Representations and mathematics visualization.* Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México: Cinvestav-IPN.

Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*: *The 17th ICMI Study.* New York, NY: Springer.

Hoyles, C., Lagrange J. B., & Noss, R. (2006). Developing and evaluating alternative technological infrastructures for learning mathematics. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds), *New Mathematics Educations Research and Practice*. Rotterdam: Sense Publishers.

Lavicza, Z. (2008, March). The examination of technology use in university-level mathematics teaching. *Proceedings of the Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of International Commission on Mathematical Instruction*. Rome, Italy.

Mancosu, P., Jorgensen, K. F., & Pedersen, S. A. (Eds.). (2005). *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dordrecht: Springer.

Needham, T. (2000). *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the AMS, 37*, 844-850.

Вертгеймер, М. (1987). *Продуктивное мышление* (С. Ф. Горбова, В. П. Зинченко, пер.). Москва: Прогресс (оригинальная работа опубликована в 1945).

Дрозд, В. Л., Столяр, А. А. (Ред.). (1988). *Методика начального обучения математике: учеб. пособие.* Минск: Вышэйшая школа.

Summary

COMPUTER VIZUALIZATION IN MATHEMATICS EDUCATION AS A PRACTICAL EDUCATIONAL TASK

Sergey Sergeev
National Institute of Education, Republic of Belarus

Maria Urban
Belarusian State Pedagogical University, Republic of Belarus

The appearance of up-to-date computer technologies extended the application of visualization in mathematics itself as well as in mathematics education drastically. In a number of recent studies the problem of design of technological tools, capable of fostering the students' mathematical thinking has been discussed hotly. Taking into consideration the primary importance of dynamic visualization (DV) in educational multimedia it is necessary to state that the creation of didactically efficient DV becomes an independent and the urgent educational task.

Methodically grounded realization of dynamic connection between representations of mathematical objects, design of auxiliary visual elements and effects, as well as highlighting of significant objects and relations are prerequisites of potential DV efficacy. While interacting with DV a student can realize how a certain mathematical construction is "built", detect essential connections between its elements, and in the long term comprehend the underlying mathematical ideas and concepts.

The key advantage of DV in comparison with static vizualization is in the fact that DV gives the opportunity to have a good look at a genesis of a new mathematical object in its dynamics, and to explore the connections between graphical representations without necessity to perform labor-consuming calculations, which gives the possibility to concentrate students' attention on conceptual aspects of a studied mathematical objects.

In teaching DV can be used both as an additional tutorial visualizing some elements of knowledge and as a dominant one influencing significantly all the other components of a methodological system. The latter can include for example software "analogue" of the physically existing artefact – positional abacus. In any case the teacher acquires the opportunity to create new in their essence, often nontrivial didactical tasks with DV employment.

Key words: computer technologies, mathematics education, visualization.

Advised by Yuriy Pelekh, International University of Economics and Humanities named after Academician Stepan Demianchuk, Ukraine

Received: *September 27, 2012*   Accepted: *November 19, 2012*

Sergey Sergeev	PhD., Senior Researcher, National Institute of Education, 16 Korolia Street, 220004 Minsk, Republic of Belarus. E-mail: sergeevsedu@gmail.com Website: http://www.adu.by
Maria Urban	PhD., Associate Professor, Belarusian State Pedagogical University, 18 Sovetskaya Street, Minsk, Republic of Belarus. E-mail: maria.urban62@gmail.com Website: http://www.bspu.unibel.by