

## ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОСУ БАГАТОШАРОВИХ ПОКРИТТІВ

В роботі розглянуто вплив фізико-механічних властивостей матеріалів на знос контактуючих пар. В роботі представлені результати теоретичного моделювання зносу, коли поверхневий шар складається з декількох шарів з різними характеристиками, які можливо отримати при відновленні деталей. На підставі теоретичних моделей наведені приклади зносу контактуючих двох тіл, кожне з яких має багатошарову будову покриття.

*Ключові слова:* шаруваті покриття, знос, моделювання, властивості покриття

### Вступ, постановка проблеми

Вивчення зносу пар, що труться, представляє великий інтерес, як з погляду практичної експлуатації, так і в теоретичному плані. У роботі [1] представлений значний матеріал, що стосується тертя і зносу різних матеріалів. У найзагальнішому виді єдиного закону зносу пар, що труться, не виявлено. Проте вказані чинники, що найбільше впливають на знос.

У локальному плані на знос впливають такі чинники:

- 1) відносна швидкість тіл, що труться ( $u$ );
- 2) тиск в області контакту ( $p$ );
- 3) фізико-механічні властивості матеріалів;
- 4) мікрогеометрія в області контакту тіл, що труться;
- 5) наявність у зоні контакту та умови змащування.

До фізико-механічних властивостей матеріалів поверхневого шару, що суттєво впливають на зносостійкість, необхідно віднести такі пружні та пластичні властивості, як (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, межа текучості).

У роботі [2] частково розглянуті подібні завдання з поверхневими шарами однорідними по глибині. Особливий інтерес представляє ситуація, коли поверхневий шар складається з декількох шарів з різними характеристиками, які можливо отримати при відновленні деталей. Дана робота є логічним продовженням роботи [3].

Метою даної роботи є розробка кількісних методів розрахунку зносу тіл, що труться, які мають шарувату структуру із заданими механічними властивостями.

У цій роботі найдетальніше розглянута ситуація, коли пара, що треться, є підшипником ковзання з тонкими пружними покриттями одного з контактуючих тіл.

### 1. Рівняння поверхні зносу

Припускаємо, що поверхня зносу досить гладка і диференціюється по просторових координатах і часі.

Нехай  $F(x, y, z, t) = 0$  представляє поверхню зносу у момент часу  $t$ . У достатньо близький момент часу  $t + \Delta t$  маємо  $F(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) = 0$ .

Розкладаючи дану залежність в ряд в околиці  $t$  і враховуючи  $F(x(t), y(t), z(t), t) = 0$ , отримуємо

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(t + \Delta t) - x(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y(t + \Delta t) - y(t)) + \frac{\partial F}{\partial z}(z(t + \Delta t) - z(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + 0(\Delta t) = 0.$$

Поділивши на  $\Delta t$  і спрямовуючи  $\Delta t$  до нуля приходимо до наступного рівняння, якому задовольняє поверхня зносу

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot v_z = 0. \quad (1)$$

У цьому рівнянні всі частинні похідні обчислені для моменту часу  $t$ .

Ввівши вектор швидкості  $v = (v_x, v_y, v_z)$ , з якою рухається точка на поверхні зносу, рівнянню (1) можна надати вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \langle v, \nabla F \rangle = 0,$$

де  $\nabla F$  - градієнт в точці поверхні  $(x(t), y(t), z(t))$ ;

$\langle v, \nabla F \rangle$  - скалярний добуток відповідних векторів.

Оскільки  $\nabla F$  паралельний вектору нормалі, то вважаючи, що довжина вектора градієнта

$|\nabla F| \neq 0$ , отримуємо

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_N \cdot |\nabla F| = 0 \quad (2)$$

де  $v_N$  - проекція вектора швидкості на нормаль поверхні зносу.

На рис. 1 представлено розташування поверхні зносу у момент часу  $t$  і  $t + \Delta t$ . Якщо

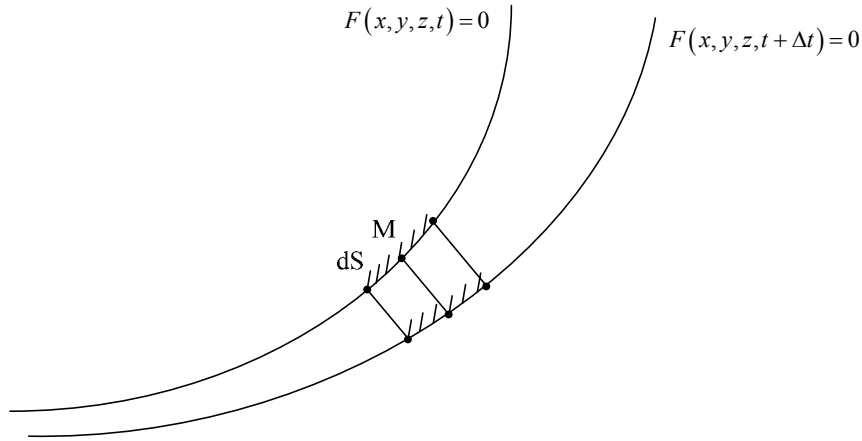


Рис. 1 Поверхні зносу

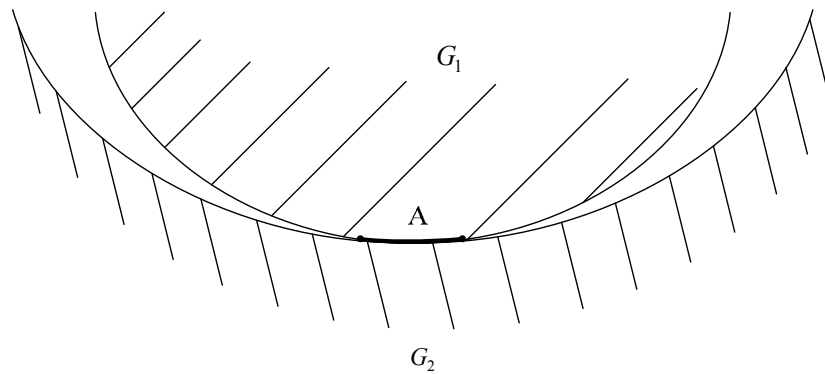


Рис. 2  $G_1$  і  $G_2$  два контактуючих тіл

## 2. Рівняння зносу пари тіл тертя

Нехай  $F_1(x, y, z, t) = 0$  і  $F_2(x, y, z, t) = 0$  поверхні двох контактуючих тіл (рис. 2).

Тоді область  $A$  безліч точок, які задовольняють рівнянню  $F_1 = 0$  і  $F_2 = 0$  буде областю контакту двох тіл  $G_1$  і  $G_2$ . Дана безліч точок  $A$  очевидно задовольнятиме і наступній системі рівнянь типу (2)

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial t} + v_1 \cdot |\nabla F_1| = 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} + v_2 \cdot |\nabla F_2| = 0. \end{cases} \quad (3)$$

У цій системі диференціальних рівнянь  $v_1$  і

$dS$  - площа в околиці точки  $M$ , тоді об'єм зносу за час  $\Delta t$  можна представити у вигляді

$$\Delta V = v_N \Delta t \cdot dS.$$

Звідки витікає, що  $v_N$  є лінійним зносом і залежить від розташування точки  $M$  і властивостей тіла в цій точці.

$v_2$  є лінійними швидкостями зносу відповідно тіл  $G_1$  і  $G_2$ .

Очевидно, що  $v_1$  і  $v_2$  залежать не тільки від точок  $M$  області контакту  $A$ , але і від відносної швидкості руху тіл  $G_1$  і  $G_2$ , а також від тиску  $P$  в цих точках, тобто

$$\begin{cases} v_1 = v_1(u, p, M); \\ v_2 = v_2(u, p, M), \end{cases} \quad (4)$$

де  $M \in A$ .

До системи диференціальних рівнянь (3) необхідно приєднати початкові умови

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, 0) = f_1(x, y, z); \\ F_2(x, y, z, 0) = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (5)$$

і врахувати навантаження  $Q(t)$ , що притискує одне тіло до іншого.

Нехай вектор  $\vec{l}$  одиничної довжини, що визначає напрям притискуючої сили  $Q(t)$ , а  $\vec{N}$  - вектор нормалі до поверхні  $F_1$ , тоді

$$\int_{A(t)} p \cos \varphi dS = Q(t), \quad (6)$$

де  $\cos \varphi = \langle \vec{l}, \vec{N} \rangle$ , тобто  $\varphi$  - кут між векторами  $\vec{l}$  і  $\vec{N}$ .

$A(t)$  - область контакту у момент часу  $t$ .

Початкова область контакту  $A(0)$  визначається з рішення системи рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0; \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Таким чином, в отриманих співвідношеннях повинні задаватися навантаження  $Q(t)$  і швидкість відносного руху  $u(t)$ .

Надалі викладений підхід розглядатимемо у разі, коли тіла  $G_1$  і  $G_2$  мають багат шарові покриття, що піддаються зносу. Зауважимо, що зносостійкість у даних покриттів різні і спільно з  $Q(t)$  і  $u(t)$  визначають ресурс (час) роботи деталей до граничного зносу.

### 3. Наведемо деякі приклади

Розглянемо приклади зносу контактуючих двох тіл, кожне з яких має багат шарове покриття. Процес зносу досліджується в плоскому варіанті і, як правило, при постійному навантаженні.

#### 3.1. Знос двох плоских смуг

Нехай тіло  $G_1$  має багат шарове покриття товщиною  $h_1$ , а тіло  $G_2$  - покриття товщиною  $h_2$  (рис. 3). Рух тіла  $G_1$  відносно  $G_2$  проходить уздовж осі  $z$ , перпендикулярної площини представленого рисунка.

Позначимо через  $y_1$  сумарну товщину покриттів, тоді у будь-який момент часу умова контакту приймає вигляд

$$y_1(t) = h_1(t) + h_2(t). \quad (8)$$

Рівняння поверхні зносу тіла буде наступним

$$y(t) = y_1(t) - h_1(t)$$

або

$$F_1 = y(t) - y_1(t) + h_1(t) = 0,$$

а для тіла  $G_2$  маємо

$$F_2 = y - h_2(t) = 0.$$

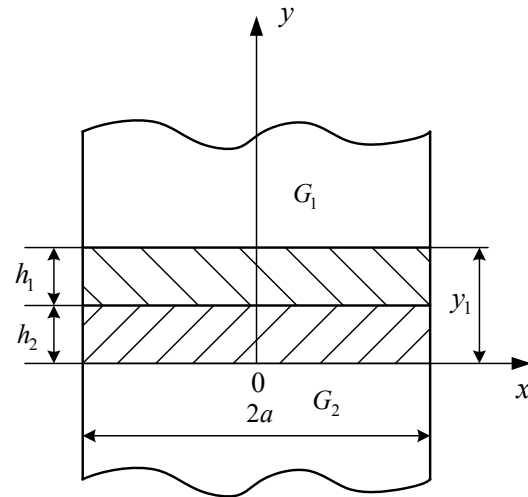


Рис. 3 Контактна взаємодія двох смуг шириною  $2a$

Очевидно, що з врахуванням (8) рівняння поверхні  $F_1$  тотожно співпадає з рівнянням  $F_2$ . Тоді для поверхні  $F_2$  отримуємо

$$-\frac{dh_2}{dt} - v_2 = 0,$$

оскільки лінійна швидкість зносу другого тіла протилежна градієнту  $\nabla F_2 = (0; 1)$ .

Що стосується тіла  $G_1$ , то його шар зменшуватиметься відповідно до рівняння

$$\frac{dh_1}{dt} = -v_1,$$

а саме тіло  $G_1$ , як єдине ціле занурюватиметься з швидкістю

$$\frac{dy_1}{dt} = -(v_1 + v_2).$$

Звідки отримуємо, що товщина двох шарів визначатиметься швидкостями зносу кожного шару окремо.

У даному розгляді істотним є те, що тіло  $G_2$  нерухоме і з ним пов'язана система координат, а тіло  $G_1$  піддається не тільки зносу, але і перенесенню, як єдиного цілого. Цей момент повинен враховуватися в системі рівнянь (3) і його можна визначити, як умова контакту. Оскільки

в даному випадку площа контакту постійна, то із співвідношення (6) отримуємо тиск

$$P = \frac{Q(t)}{2a}$$

і тоді лінійні швидкості зносу будуть наступними

$$v_1 = \alpha_1 \frac{P^{m_1}}{B_1}; \quad v_2 = \alpha_2 \frac{P^{m_2}}{B_2},$$

де  $m_1, m_2$  - показники нелінійності по відношенню до тиску;

$B_1, B_2$  - опори зносу відповідних шарів, які є функціями товщини шарів;

$\alpha_1, \alpha_2$  - коефіцієнти, залежні від відносної швидкості і мікрогеометрії поверхні тертя.

Розглянемо детальніше знос поверхневого шару тіла  $G_2$ . Диференціальне рівняння, що визначає зміну товщини  $h_2$  має вигляд

$$\frac{dh_2}{dt} = -v_2 = -\frac{\alpha_2 P^{m_2}}{B_2}.$$

Величина опору зносу  $B_2$  залежить від локальних властивостей покриття і області контакту, тобто  $B_2$  визначатиметься співвідношенням

$$B_2 = \int_{-a}^a r_2(x, y) dx,$$

де  $r_2(x, y)$  - локальний опір, а  $(x, y)$  - точка поверхні контакту.

Оскільки покриття тіла  $G_2$  є шарами, то  $r_2$  від  $x$  не залежить, а залежить тільки від  $y = h_2$ . Тоді

$$B_2 = r_2(h_2) \cdot 2a,$$

Тому диференціальне рівняння для  $h_2$  буде наступним

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{\alpha_2 P^{m_2}}{2a \cdot r_2(h_2)}.$$

У разі, коли навантаження постійне  $Q(t) = Q_0$ , то для кожного шару покриття права частина диференціального рівняння буде постійною і тоді рішення задачі Коші для цього рівняння за початкової умови  $h_2(0) = h_{20}$  представитиме кусково-лінійну функцію (рис. 4).

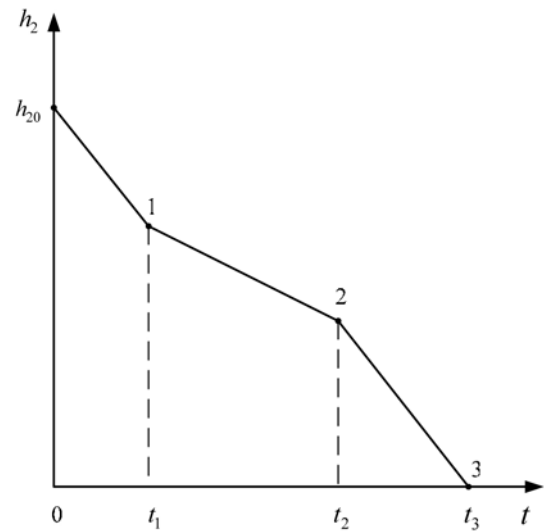


Рис. 4. Якісна залежність зносу тришарового покриття  $G_2$

На рис. 4 час  $t_1$  - час зносу самого верхнього шару покриття,  $t_2 - t_1$  - час зносу наступного шару покриття,  $t_3 - t_2$  - час зносу останнього шару покриття при тришаровому покритті, а  $t_3$  - сумарний час зносу всього покриття.

Аналогічним чином, вирішуючи задачу Коші для багатошарового покриття тіла  $G_1$ , отримуємо залежність  $h_1(t)$  і тоді термін служби пари визначиться із співвідношення

$$\min\{h_1(t), h_2(t)\} = 0.$$

При чисельному рішенні зручно привести початкові диференціальні рівняння до безрозмірного вигляду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = -\tilde{v}_1(\tilde{h}_1); \\ \frac{d\tilde{h}_2}{d\tau} = -\tilde{v}_2(\tilde{h}_2); \end{cases} \quad (9)$$

за початкових умов

$$\tilde{h}_1(0) = h_{10}; \quad \tilde{h}_2(0) = h_{20}, \quad (10)$$

де  $\tau = v_0 \cdot t$ ;  $\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{v_0}$ ;  $\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{v_0}$ ;  $\tilde{h}_i = \frac{h_i}{h_0}$ ;  $i = \overline{1, 2}$ .

У якості  $v_0$  можна узяти

$$v_0 = \frac{\alpha_0 P^m}{2a \cdot r_0 \cdot h_0};$$

де  $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ;  $m = \max\{m_1, m_2\}$ ;  $r_0$  - базовий опір зносу,  $h_0 = \max\{h_{10}, h_{20}\}$ .

Так, наприклад, якщо початкова товщина багат шарового покриття тіла  $G_1$  більша, ніж тіла  $G_2$ , то  $\tilde{h}_1(0)$  буде рівне 1, а  $\tilde{h}_2$  буде рівне  $\frac{h_{20}}{h_0} < 1$ .

Випишемо представлення функцій  $r_1(h_1)$  і  $r_2(h_2)$  через функцію Хевісайда  $H(t)$ . Розглянемо тришарове покриття тіла  $G_2$ , рахуючи шари від тіла  $G_2$ . Нехай  $[y_{20}, y_{21}]$  представляє покриття першого шару,  $[y_{21}, y_{22}]$  - другий шар,  $[y_{22}, h_{20}]$  - третій шар (рис. 5).

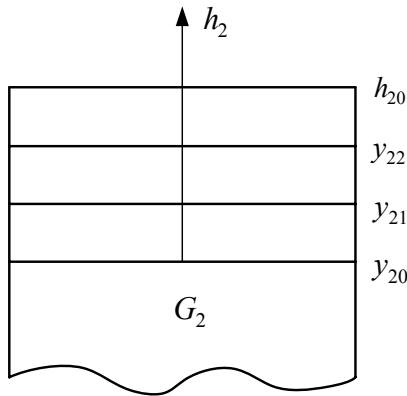


Рис. 5. Тришарове покриття тіла  $G_2$

Опір зносу покриття тіла  $G_2$  можна представити у вигляді

$$r_2(h_2) = \begin{cases} r_{23}, & \text{якщо } h_2 \geq y_{22}; \\ r_{22}, & \text{якщо } y_{21} \leq h_2 < y_{22}; \\ r_{21}, & \text{якщо } y_{20} \leq h_2 < y_{21}. \end{cases}$$

Це визначення через функцію Хевісайда може бути записане у вигляді

$$r_2(h_2) = r_{23} \cdot H(h_2 - y_{22}) + r_{22} (H(y_{22} - h_2) - H(y_{21} - h_2)) + r_{21} (H(y_{21} - h_2) - H(y_{20} - h_2)).$$

Якщо є більш, ніж три шари покриття, тоді в загальному вигляді

$$r_2(h_2) = r_{2n} H(h_2 - y_{2n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} r_{2i} (H(y_{2i} - h_2) - H(y_{2i-1} - h_2)),$$

де  $n$  - число шарів покриття.

Аналогічним чином записується опір зносу багат шарового покриття тіла  $G_1$ :

$$r_1(h_1) = r_{1n} H(h_1 - y_{1n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} r_{1i} (H(y_{1i} - h_1) - H(y_{1i-1} - h_1)),$$

де  $y_{1i}$  - відлічуються від тіла  $G_1$  (рис. 6).

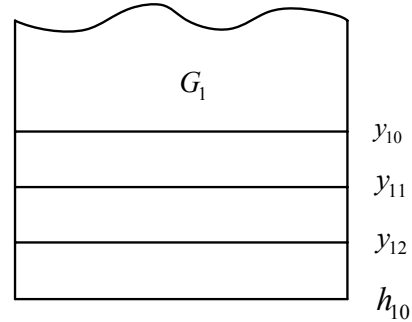


Рис. 6. Тришарове покриття тіла  $G_1$

Чисельна інтеграція системи (9) за початкових умов (10) реалізуватимемо в пакеті символічних обчислень [4], використовуючи метод Рунге-Кутта четвертого порядку [5].

### 3.2. Знос двох плоских смуг з урахуванням взаємного впливу

У роботі [1] приводиться огляд різних підходів побудови моделі зносу поверхонь, що труться. Так, наприклад, по Холу кількість зношеної речовини, що доводиться на одиницю шляху ковзання дорівнює

$$W = z \frac{q}{HB},$$

де  $z$  - вірогідність видалення атома з поверхні ковзання;

$q$  - навантаження;

$HB$  - твердість матеріалу.

Д. Аргард формулює більш детально дану залежність і пропонує формулу

$$W = K \frac{q}{3\sigma_T},$$

де  $\sigma_T$  - межа текучості;

$K$  - змінюється в межах від  $10^{-2}$  до  $10^{-7}$ .

Проте, в цих формулах відображені механічні властивості тільки одного контактуючого тіла.

Пропонується швидкість зносу будь-якого тіла визначати від властивостей контактуючих тіл, тобто вважаємо, що швидкість зносу будь-якого тіла зворотнопропорційна опору зносу цього тіла і прямопропорційна опору зносу іншого тіла.

При цьому припущенні система рівнянь (9) буде наступною

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = -\tilde{v}_1(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2); \\ \frac{d\tilde{h}_2}{d\tau} = -\tilde{v}_2(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \end{cases} \quad (11)$$

за початкових умов (10).

### 3.3. Знос підшипника ковзання

На рис. 7 представлений підшипник ковзання, у якого вал  $G_1$  радіусом  $R_1$  покритий багат шаровим покриттям товщиною  $h_1$ , а кільце (втулка)  $G_2$  має багат шарове покриття сумарною товщиною  $h_2$  і радіус втулки рівний  $R_2$ .

Нехай вал  $G_1$  обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Нехай у момент часу  $t$  вісь валу має координати  $(0_1, y_1)$ , тоді поверхня покриття валу буде наступною

$$F_1 = x^2 + (y - y_1)^2 - (R_1 + h_1)^2 = 0.$$

У цьому співвідношенні  $y_1$  і  $h_1$  є функціями часу. Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = 2(y - y_1(t)) \frac{dy_1}{dt} - 2(R_1 + h_1(t)) \frac{dh_1}{dt};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2(y - y_1(t)).$$

Модуль градієнта  $\nabla F$  буде рівний

$$|\nabla F_1| = 2\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2} = 2(R_1 + h_1)$$

і тоді отримуємо наступне рівняння зміни поверхні  $F_1$  і руху тіла  $G_1$ , як єдиного цілого

$$(y - y_1(t)) \frac{dy_1}{dt} - (R_1 + h_1(t)) \frac{dh_1}{dt} +$$

$$\begin{aligned} |\nabla F_2| &= 2\sqrt{\left(x + (R_2 - h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 + \left(y + (R_2 - h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2} = \\ &= 2\sqrt{x^2 + 2x(R_2 - h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + (R_2 - h_2)^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 + y^2 + 2y(R_2 - h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + (R_2 - h_2)^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2} = \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2(R_2 - h_2) \left(x \frac{\partial h_2}{\partial x} + y \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) + (R_2 - h_2)^2 \left(\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2\right)} = \\ &= 2(R_2 - h_2) \sqrt{1 + \frac{2}{R_2 - h_2} \left(x \frac{\partial h_2}{\partial x} + y \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$+v_{1N}(R_1 + h_1(t)) = 0 \quad (12)$$

де  $v_{1N} = \bar{v}_{1N} + \underline{v}_{1N}$ ,

$\bar{v}_{1N}$  - швидкість зменшення  $h_1$ ;

$\underline{v}_{1N}$  - швидкість руху тіла  $G_1$  з урахуванням зносу шаруватого покриття втулки.

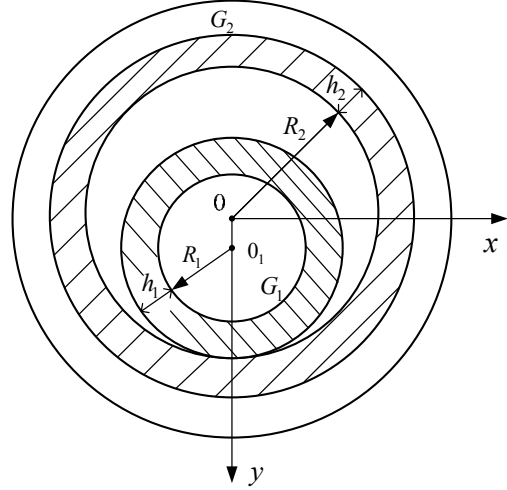


Рис. 7 Підшипник ковзання

Що стосується поверхні  $F_2$  покриття втулки, то у будь-який момент часу вона є

$$F_2 = x^2 + y^2 - (R_2 - h_2(x, y, t))^2 = 0.$$

Частинні похідні цієї поверхні будуть наступними

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 2(R_2 - h_2(x, y, t)) \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial t};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + 2(R_2 - h_2(x, y, t)) \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y + 2(R_2 - h_2(x, y, t)) \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial y}.$$

Обчислимо модуль градієнта  $\nabla F_2$ .

Тоді отримуємо рівняння, якому задовольняє  $h_2(x, y, t)$

$$\frac{\partial h_2(x, y, t)}{\partial t} + v_{2N} \sqrt{1 + \frac{2}{R_2 - h_2} \left( x \frac{\partial h_2}{\partial x} + y \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2} = 0. \quad (13)$$

Враховуючи, що швидкість обертання валу  $G_1$  достатньо велика в порівнянні з швидкістю зносу покриття тіла  $G_1$  вважаємо

$$\frac{dh_1}{dt} = -\bar{v}_{1N} \quad (14)$$

і тоді рівняння (12) набуває вигляд

$$(y - y_1(t)) \frac{dy_1}{dt} - (R_1 - h_1) \cdot \bar{v}_{1N} = 0. \quad (15)$$

Таким чином, рівняння (13)-(15) складають систему для функцій  $y_1(t)$ ,  $h_1(t)$  і  $h_2(x, y, t)$ .

Введемо полярну систему координат, узявши за полярну вісь - вісь  $y$  і кут  $\varphi$ , що відлічується від осі  $y$  проти годинникової стрілки, тоді

$$\varphi = \arctg \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

що дозволяє спростити рівняння (13), оскільки

$$x \frac{\partial h_2}{\partial x} = x \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$y \frac{\partial h_2}{\partial y} = y \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{-xy}{x^2 + y^2};$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ &= \left( \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{1}{(R_2 - h_2)^2}. \end{aligned}$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння (13) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2(y, \varphi, t)}{\partial t} + \\ + v_{2N} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial h_2(y, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{1}{(R_2 - h_2)^2}} = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

Нехтуючи деформацією шарів при навантаженні  $Q(t)$  отримаємо, що контакт між покриттями тіл  $G_1$  і  $G_2$  буде в межах  $\varphi \in [-\varphi_0(t), \varphi_0(t)]$ , де  $[-\varphi_0(t), \varphi_0(t)]$  розчин

кута, що визначає площадку контакту. Причому це буде дуга кола з центром в точці  $O_1$  і радіусу  $R_1 + h_1(t)$  (рис. 8).

Полярні координати точок контакту задовольняють наступному рівнянню

$$y^2 - 2yy_1 \cos \varphi + y_1^2 = (R_1 + h_1)^2.$$

З цього рівняння знаходимо  $y(\varphi)$  і тоді

$$h_2(y(\varphi), \varphi, t) = R_2 + h_2(0) - y(\varphi),$$

а опір зносу в точці з координатами  $(y(\varphi), \varphi)$  складе

$$r_2(\varphi) = r_2(h_2(y(\varphi), \varphi, t)) = r_2(R_2 + h_2(0) - y(\varphi)).$$

Опір зносу всієї площадки контакту буде

$$R_2(\varphi_0(t)) = \int_{-\varphi_0(t)}^{\varphi_0(t)} r_2(\varphi) d\varphi.$$

Відмітимо, що при  $\varphi > \varphi_0(t)$  знос покриття вкладиша відсутній і рівняння (16) необхідно розглядати тільки, коли  $|\varphi| \leq \varphi_0(t)$ , а враховуючи симетрію, можна обмежитися  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0(t)$ . Крім того, у будь-який момент часу повинне виконуватися співвідношення

$$y_1(t) = R_2 - R_1 - (h_1(t) + h_2(0, t)),$$

яке необхідно розглядати, як умова контакту двох тіл  $G_1$  і  $G_2$  при  $\varphi = 0$ .

Якщо  $\varphi \neq 0$ , то має місце

$$\begin{aligned} (R_2 - h_2) \cos \varphi - \\ - \sqrt{(R_2 + h_1)^2 - (R_2 - h_2)^2 \sin^2 \varphi} = y_1, \end{aligned}$$

для  $\varphi \in [-\varphi_0(t), \varphi_0(t)]$ , або

$$\begin{aligned} (R_2 - h_2)^2 - 2y_1(R_2 - h_2) \cos \varphi + y_1^2 = \\ = (R_1 + h_1)^2. \quad (17) \end{aligned}$$

Якщо позначити через  $P(\varphi, t)$  тиск в області контакту, то умова рівноваги буде наступною

$$\int_{-\varphi_0(t)}^{\varphi_0(t)} P(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi = Q(t),$$

де  $Q(t)$  - навантаження, що стискає контактуючі тіла.

$$\int_{-\varphi_0(t)}^{\varphi_0(t)} P(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (19) \quad (18)$$

Дане співвідношення через парність  $P(\varphi, t)$  по  $\varphi$  виконуватиметься автоматично.

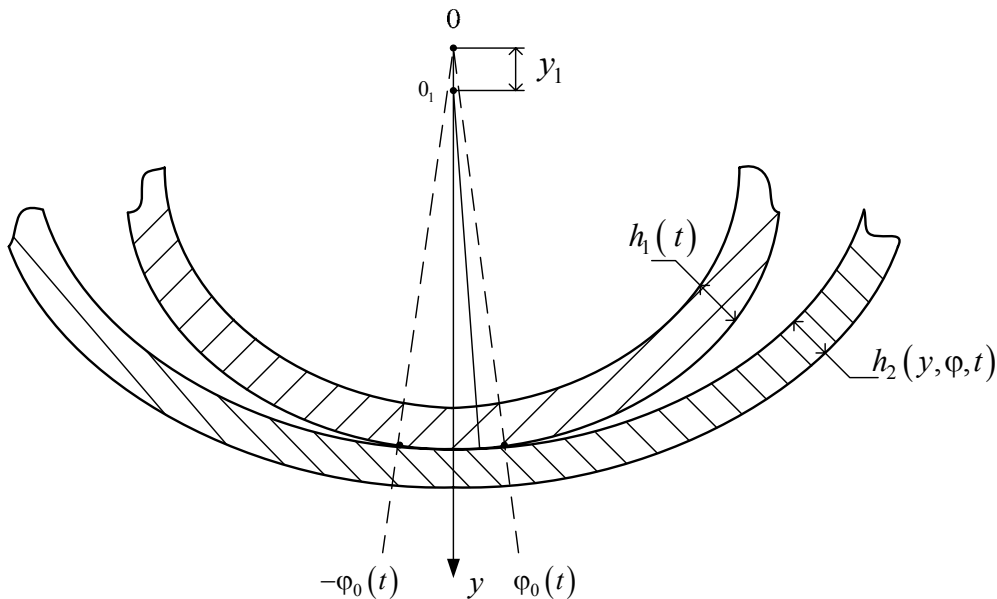


Рис. 8. Контакт валу з вкладишем у момент часу  $t$

Таким чином, для різних умов контакту представлені моделі зносу з врахуванням шаруватості відновлювального покриття однієї або обох контактуючих деталей. Розроблені моделі в перспективі дозволять раціонально підбирати товщину та кількість шарів при умові відповідних можливостей відновлювальних технологій.

### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Крагельский, Н. В. Трение и износ [Текст] / Н. В. Крагельский. - М.: Машиностроение, 1968. - 480 с.
2. Галахов, М. А. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения [Текст] / М. А. Галахов, П. П. Усов. - М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. литер. 1990. - 280 с.
3. Артемчук, В. В. Моделирование износа многослойного покрытия. Міжнародний науковий журнал «Проблеми трибології» [Текст] / В. В. Артемчук. - № 2, 2011. - С. 59-65.
4. Прохоров, Г. В. Пакет символьних вычислений Maple V [Текст] / Г. В. Прохоров, М. А. Леде-нев, В. В. Колбеев. - М.: Компания «Петит», 1997. - 200 с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст] / Н. С. Бахвалов. - М.: Наука, 1975.

Надійшла до редколегії 09.12.2011.  
Прийнята до друку 12.12.2011.

В. В. АРТЕМЧУК (ДІПТ)

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗНОСА СЛОИСТЫХ ПОКРЫТИЙ

В работе рассмотрено влияние физико-механических свойств материалов на износ контактирующих пар. В работе представлены результаты теоретического моделирования износа, когда поверхностный слой состоит из нескольких слоев с различными характеристиками, которые возможно получить при восстановлении деталей. На основании теоретических моделей приведены примеры износа контактирующих двух тел, каждое из которых имеет многослойное строение покрытия.

*Ключевые слова:* слоистые покрытия, износ, моделирование, свойства покрытия



V. V. ARTEMCHUK (DIIT)

## **TEORETICHESIKE ASPECTS OF MODELING WEAR LAYERED COATING**

In this paper we examine the effect of physico-mechanical properties of materials on the wear of the contacting pairs. The results of theoretical modeling of wear and tear, when the surface layer is composed of several layers with different characteristics, which may get in the recovery of parts. Based on theoretical models are examples of wear and tear contact of two bodies, each of which has a multilayer structure of the coating.

*Keywords: layered coatings, wear simulation, the properties of the coating*