УДК 519.6

А. А. БОСОВ, А. В. ГОРБОВА (ДИИТ), Н. В. ХАЛИПОВА (Академия таможенной службы Украины)

ОБОСНОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

Введение: Сформирована задача о ранце в терминах функций множества и приведен эвристический алгоритм. **Цель:** доказательство того, что эвристический алгоритм является необходимым условием. Некоторые факты из работы [2]. Показана эквивалентность предела последовательности по Э. Борелю и сходимостью по мере. Доказана теорема о необходимости максимума функции множества. **Ситуации достаточности алгоритма:** Приведены три ситуации, когда эвристический алгоритм является достаточным. **Контрпример:** Приведен контрпример из работы [1] и дано добавление в эвристический алгоритм, что позволяет получать решение задачи о ранце. **Векторная оптимизация:** С задачей о ранце завязывается задача векторной оптимизации инвестирования мероприятий. **Выводы:** Предложен алгоритм решения задачи о ранце и для аддитивных функций алгоритм определения Парето решения задачи векторной оптимизации по двум показателям. **Приложение:** Приведена программа в среде Maple решения задачи о ранце.

Ключевые слова: задача о ранце, функции множества, векторная оптимизация, задача инвестирования

Введение

Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ перечень предметов, для каждого ω_i сопоставляется да числа $p_i=p(\omega_i)$, ценность предмета ω_i и $m_i=m(\omega_i)$ – масса (вес) предмета ω_i.

Необходимо найти такой перечень предметов $A\subseteq\Omega$, чтобы

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega), \qquad (1)$$

было бы максимальным и выполнялось условие

$$M(A)=\sum_{\omega\in A}m(\omega)\le\bar{M}, \qquad (2)$$

где $\bar{M}$ – максимальная масса предметов, которая может быть помещена в ранце.

В работе [1] приводится алгоритм:

Для каждого предмета $\omega_i\in\Omega$ вычисляется $\lambda_i=\dfrac{p(\omega_i)}{m(\omega_i)}$.

1. Множество Ω упорядочиваем согласно правилу
 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge...\ge\lambda_n$;
2. $F:=0$; $A:=\{\}$;
3. $M_0=\bar{M}$;
4. for i from 1 to n do
5. if $M_0\ge\bar{M}$ then
6. $A:=A\,\text{union}\{\omega_i\}$; $M_0:=M_0-m_i$; $F:=F+p_i$;
7. end if
8. End do
9. Print (A,F).

Данному алгоритму в работе [1] предпосылается: «Разумным кажется вкладывать в ранец те предметы, для которых удельная стоимость максимальна».

Целью данной работы является доказательство того, что предполагаемое утверждение не только «разумно», но представляет собой необходимое условие решения задачи о ранце.

Некоторые факты из работы [2]

Ради замкнутости изложения приводим некоторые факты из работы [2].

Полагаем $\Xi(\Omega)$ – алгебра подмножеств множества Ω, а отображение $\Xi(\Omega)\xrightarrow{F}R$, определяем как функцию множества $F(A)$ для любого $A\in\Xi(\Omega)$. Среди функций множества определенных на $\Xi(\Omega)$ выбираю функцию $\mu(A)$ со следующими свойствами:

1. $\mu(A)\ge0$, $\forall A\in\Xi(\Omega)$.
2. Если $\mu(A)=0$, то $A=\{\}$;
3. $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\bigcap B)$;
4. Если B является пределом любой последовательности множеств $\{B_n\}$, $n=1,2,...$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(B)$.

Таким образом, определенную функцию множества $\mu(A)$ будем называть мерой на алгебре $\Xi(\Omega)$.

Свойство 4. функции $\mu(A)$ можно записать следующим образом

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B\Delta B_n)=0\,, \qquad (3)$$

где Δ - операция симметрической разности двух множеств.

Соотношение (3) можно положить в основу определения предела последовательности множеств.

Имеет место

Теорема 1. Если B_n предел по Борелю последовательности $\{B_n\}$, а B – предел в смысле (3), то из существования предела B_n следует существование B и из существования B следует существование предела, B_n и они совпадают.

Данная теорема позволяет отказаться от весьма громоздкого определения предела по Борелю, а пользоваться соотношение (3).

Определение 1. Под производной от функции множества $F(A)$ по мере $\mu(A)$ на последовательности $\{B_n\}$ будем понимать предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(A\Delta B_n)-F(A)}{\mu(A\Delta B_n)-\mu(A)}=a$$

и записывать в виде

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B}\triangleq a\,.$$

Естественно, возникает вопрос: «Когда существует данная производная?».

Ответом на данный вопрос является требование, чтобы функция $F(A)$ была бы непрерывной, то есть для любой последовательности $\{A_n\}$ сходящиеся к A имеет место

$$\lim_{n\to\infty}F(A_n)=F(A)\,.$$

Если $\{B_n\}$ сходится к множеству B. Тогда для непрерывной функции $F(A)$ производная по мере равна

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B}=\frac{F(A\Delta B)-F(A)}{\mu(A\Delta B)-\mu(A)}\,. \qquad (4)$$

Теорема 2. Если на множестве A функция $F(A)$ принимает максимальное значение, то с необходимостью имеет место

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{\omega\}\subset A}\geq 0\,.$$

Доказательство. Пусть на A функция $F(A_n)$ принимает максимальное значение, тогда

$$F(A\Delta B_n)-F(A)\leq 0\,.$$

Не ограничивая общности рассмотрения, считываем что множества B_n начиная с некоторого номера принадлежит множеству A, тогда

$$\mu(A\Delta B_n)-\mu(A)=\mu(A)-\mu(B_n)-$$

$$-2\mu(A\bigcap B_n)-\mu(A)=-\mu(B_n)\,,$$

и потому отношение

$$\frac{F(A\Delta B_n)-F(A)}{\mu(A\Delta B_n)-\mu(A)}\geq 0\,.$$

Вычислив предел при $n\to\infty$ получаем доказательство теоремы 2.

Введем функцию Лагранжа

$$L(A)=P(A)+t\left(\bar{M}-M(A)\right),$$

производная, которой по мере $\mu(A)$ существует и задача (1), (2) сводится к максимизации $L(A)$,что в силу теоремы 2 дает

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{\omega\}\subset A}=p(\omega)-tm(\omega)\geq 0\,.$$

Откуда получаем, что множество A состоит из таких $\omega\in\Omega$, при которых $\dfrac{p(\omega)}{m(\omega)}\geq t$.

А множитель Лагранжа tпринимает минимально возможное таким, чтобы выполнялось соотношение (2). Полученный результат, позволяет эвристический алгоритм решения задачи о ранце считать необходимым и тем самым и слово «эвристический» можно отбросить.

Ситуации достаточности алгоритма

Не ограничивая общности рассмотрения будем считать, что нумерация предметов во множестве Ω такова, что имеет место:

$$p(\omega_1)\geq p(\omega_2)\geq\ldots\geq p(\omega_n)\,.$$

Укажем некоторые ситуации, когда предложенный алгоритм является, не только необходим, но и достаточным.

c1: Пусть $m(\omega_i)=\text{const}$, $i=\overline{1,n}$.

c2: Если $m(\omega_1)\geq m(\omega_2)\geq\ldots\geq m(\omega_n)$, этого достаточно.

c3: Если при некотором t имеет место

$$\sum_{\omega\in A_t}m(\omega)=\overline{M(A)}\,. \qquad (5)$$

Первые две ситуации c1 и c2 очевидны. Рассмотрим ситуацию c3. В этой ситуации, множество A_t представляет собой

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega; {p(\omega)}\big/{m(\omega)} \geq t \right\}.$$

Пусть существует такое $\omega_0 \notin A_t$, что можно заменить $\tilde{\omega} \notin A_t$, на ω_0 и соотношение (5) не будет нарушено. Но так как $p(\tilde{\omega}) \geq p(\omega_0)$, то значение P для измененного A_t будет меньше $P(A_t)$, что и доказывает достаточность (5).

Контрпример

В работе [1] приводится контрпример, когда Ω состоит из двух предметов $\{\omega_1, \omega_2\}$ и $m(\omega_1) = 200$, $p(\omega_1) = 190$, $m(\omega_2) = 1$, $p(\omega_2) = 5$, а емкость ранца $\overline{M(A)} = 200$.

Чтобы учесть и такую ситуацию, предлагается приведенный алгоритм пополнить следующим:

п1: Вычисляем

$$\overline{P} = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega).$$

п2: Удаляем последовательно из Ω такие предметы, у которых $p(\omega)$ минимальна, до тех пор пока $M(A)$ не станет меньше или равным $\overline{M(A)}$.

п3: Если $L_{\text{opt}} = A_t \subseteq \Omega$, $L1_{\text{opt}}$ – множество, построенное по приведенному алгоритму, то тогда выбираем такое множество L_{opt} или $L1_{\text{opt}}$, у которого P максимально.

Таким образом, алгоритм позволяет находить решение в задаче о ранце.

Векторная оптимизация

Заметим, что с задачей о ранце (1), (2) можно связать задачу о векторной оптимизации в виде

$$\begin{pmatrix} P(A) \\ -M(A) \end{pmatrix} \to \max$$

при условии $A \in \Xi(\Omega)$.

Решение данной задачи сводится к построению множества A_t определяемого следующим образом

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega; {p(\omega)}\big/{m(\omega)} \geq t \right\}.$$

Тогда $P(A_t)$ и $M(A_t)$ получаем как некоторые функции параметра $t \geq 0$, в пространстве функционалов зависимости P от M качественный характер имеет вид:

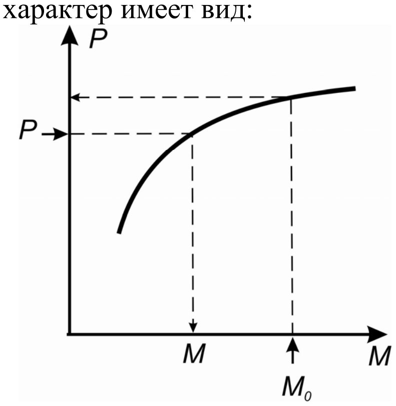

Рис. 1. Качественная зависимость P от M

И по заданному M_0 определяем максимально возможное P. Если зададимся P, то находим минимально необходимую вместимость ранца (рис. 1).

В заключение отметим, что при условии, когда $P(A)$ и $M(A)$ являются аддиативными функциями, то предложенный алгоритм с необходимостью определяет Парето решение соответствующей задачи векторной оптимизации.

Выводы

Доказано необходимость эвристического алгоритма и дано его усовершенствование решения задачи о ранце. Для аддитивных функций предложен алгоритм определения Парето решения задачи векторной оптимизации по двум показателям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лазарев, А. А. Теория расписаний, задачи и алгоритмы [Текст] / А. А. Лазарев, Е. Р. Гафаров. – М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 222.
2. Босов, А. А. Функции множества и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Вид. дім «Андрій», 2007. – 182 с.

Поступила в редколлегию 05.11.2012.
Принята к печати 23.11.2012.

ПРОГРАММА В СРЕДЕ MAPLE РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

(Рациональное инвестирование)

> **restart:with(linalg):with(plots):**
n:=12;Число предметов(число мероприятий).

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined
```

$$n := 12$$

> **Mr:=534;**Вместимость ранца(Распологаемые финансы).

$$Mr := 534$$

> **m:=[52,56,65,54,75,50,70,84,60,52,65,67];**Массы предметов(затраты по мероприятиям).

$$m := [52, 56, 65, 54, 75, 50, 70, 84, 60, 52, 65, 67]$$

> **p:=[164,163,165,165,191,160,182,184,164,165,167,168];**Ценность предметов(прибыль от мероприятий).

$$p := [164, 163, 165, 165, 191, 160, 182, 184, 164, 165, 167, 168]$$

> **t:=[seq(p[i]/m[i],i=1..n)];**

$$t := \left[\frac{41}{13}, \frac{163}{56}, \frac{33}{13}, \frac{55}{18}, \frac{191}{75}, \frac{16}{5}, \frac{13}{5}, \frac{46}{21}, \frac{41}{15}, \frac{165}{52}, \frac{167}{65}, \frac{168}{67}\right]$$

> **ttmin:=sort(t,`>`);**

$$ttmin := \left[\frac{16}{5}, \frac{165}{52}, \frac{41}{13}, \frac{55}{18}, \frac{163}{56}, \frac{41}{15}, \frac{13}{5}, \frac{167}{65}, \frac{191}{75}, \frac{33}{13}, \frac{168}{67}, \frac{46}{21}\right]$$

> **W:=[]:for i from 1 to n do for j from 1 to n do if ttmin[i]=t[j] then W:=[op(W),w[j]] end if: end do: end do;print(W);**

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8]$$

>
PP:=array(1..n,[]);MM:=array(1..n,[]);LL:=array(1..n,[]);LLL:=array(1..n,[]);

$$PP := \text{array}(1 .. 12, [\ ])$$

$$MM := \text{array}(1 .. 12, [\ ])$$

$$LL := \text{array}(1 .. 12, [\ ])$$

$$LLL := \text{array}(1 .. 12, [\ ])$$

> **k:=0:L:=[]:LL:=[]:P:=0:M:=0:for z in W do k:=k+1: L:=[op(L),z]:P:=P+p[op(1,z)]:M:=M+m[op(1,z)]:print(L,`P=`,P,`M=`,M):PP[k]:=P: MM[k]:=M:LL:=[op(LL),L] end do:**

$$[w_6], P=, 160, M=, 50$$

$$[w_6, w_{10}], P=, 325, M=, 102$$

$$[w_6, w_{10}, w_1], P=, 489, M=, 154$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4], P=, 654, M=, 208$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2], P=, 817, M=, 264$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9], P=, 981, M=, 324$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7], P=, 1163, M=, 394$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}], P=, 1330, M=, 459$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5], P=, 1521, M=, 534$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3], P=, 1686, M=, 599$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}], P=, 1854, M=, 666$$

$$[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], P=, 2038, M=, 750$$

```
>
> for ii from 1 to n do if Mr>=MM[ii] then
Mopt:=MM[ii]:Popt:=PP[ii]:Lopt:=LL[ii] end if:  end do;
> print(`Lopt=`,Lopt,`Popt=`,Popt,`Mopt=`,Mopt);
```

$$Lopt=, [w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5], Popt=, 1521, Mopt=, 534$$

```
> P1:=array(1..n,[]);M1:=array(1..n,[]);
```

$$P1 := \mathrm{array}(1 .. 12, [\ ])$$

$$M1 := \mathrm{array}(1 .. 12, [\ ])$$

```
> LLL:=[LL[n]]:i2:=1:P1[i2]:=P:M1[i2]:=M:for i from 1 to n-1 do
fmin:=10000:k:=0:for j from 1 to n do k:=k+1: if L[j]<>h then if
fmin>=p[op(1,L[j])] then fmin:=p[op(1,L[j])]:jmin:=op(1,L[j]):jj:=k:  end if:
end if: end do;print(fmin,m[jmin]):L[jj]:=h:LLL:=[op(LLL),L]:i2:=i2+1:M:=M-
m[jmin]:P:=P-p[jmin]:print(L,P,M);P1[i2]:=P:M1[i2]:=M:  end do:
```

$$160, 50$$

$$[h, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], 1878, 700$$

$$163, 56$$

$$[h, w_{10}, w_1, w_4, h, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], 1715, 644$$

$$164, 60$$

$$[h, w_{10}, w_1, w_4, h, h, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], 1551, 584$$

$$164, 52$$

$$[h, w_{10}, h, w_4, h, h, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], 1387, 532$$

$$165, 65$$

$$[h, w_{10}, h, w_4, h, h, w_7, w_{11}, w_5, h, w_{12}, w_8], 1222, 467$$

$$165, 54$$

$$[h, w_{10}, h, h, h, h, w_7, w_{11}, w_5, h, w_{12}, w_8], 1057, 413$$

$$165, 52$$

$$[h, h, h, h, h, h, w_7, w_{11}, w_5, h, w_{12}, w_8], 892, 361$$

$$167, 65$$

$$[h, h, h, h, h, h, w_7, h, w_5, h, w_{12}, w_8], 725, 296$$

$$168, 67$$

$$[h, h, h, h, h, h, w_7, h, w_5, h, h, w_8], 557, 229$$

$$182, 70$$

$$[h, h, h, h, h, h, h, h, w_5, h, h, w_8], 375, 159$$

$$184, 84$$

$$[h, h, h, h, h, h, h, h, w_5, h, h, h], 191, 75$$

```
> for kk from n by -1 to 1 do if Mr>=M1[kk] then
M1opt:=M1[kk]:P1opt:=P1[kk]:L1opt:=LLL[kk]:  end if:  end
do;print(`L1opt=`,L1opt,`P1opt=`,P1opt,`M1opt=`,M1opt);
```

$$L1opt=, [h, w_{10}, h, w_4, h, h, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8], P1opt=, 1387, M1opt=, 532$$

```
> if P1opt>Popt then print(`L1opt=`,L1opt,`P1opt=`,P1opt,`M1opt=`,M1opt) else
print(`Lopt=`,Lopt,`Popt=`,Popt,`Mopt=`,Mopt): end if:
```

$$Lopt=, [w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5], Popt=, 1521, Mopt=, 534$$

```
>
```

А. А. БОСОВ, А. В. ГОРБОВА, Н. В. ХАЛІПОВА (ДІІТ)

ОБҐРУНТУВАННЯ ЕВРИСТИЧНОГО АЛГОРИТМУ В ЗАДАЧІ ПРО РАНЦІ

Вступ: Сформована завдання про ранці в термінах функцій множини і приведений евристичний алгоритм. **Мета:** доказ того, що евристичний алгоритм є необхідною умовою. Деякі факти з роботи [2]. Показана еквівалентність границі послідовності по Е. Борелю і збіжністю по мірі. Доведено теорему про необхідність максимуму функції безлічі. **Ситуації достатності алгоритму:** Наведено три ситуації, коли евристичний алгоритм є достатнім. Контрприклад: Наведено контр прийме з роботи [1] і дано додавання в евристичний алгоритм, що дозволяє отримувати рішення задачі про ранці. **Векторна оптимізація:** Із завданням про ранці зав'язується завдання векторної оптимізації інвестування заходів. **Висновки:** запропоновано алгоритм рішення задачі про ранці і для адитивних функцій алгоритм визначення Парето рішення задачі векторної оптимізації за двома показниками. **Додаток:** наведена програма в середовищі Maple рішення задачі про ранці.

Ключові слова: задача про ранці, функції множини, векторна оптимізація, завдання інвестування

A. A. BOSOV, A. V. GORBOVA, N. V. KHALIPOVA (DIIT)

RATIONALE ЭVRYSTYCHESKOHO ALGORITHM IN THE PROBLEM AT SATCHELS

Introduction: Formed knapsack problem in terms of set functions and is a heuristic algorithm. The goal: to prove that the heuristic algorithm is essential. Some facts from [2]. The equivalence of the limit order to E.Borelyu and convergence in measure. The theorem about the need to set a maximum of function. **The situation is quite the algorithm:** We present three cases where a heuristic algorithm is sufficient. **Counterexample:** An Rear take from [1], and given the addition heuristic algorithm, which allows to obtain the solution of the knapsack problem. **Vector optimization:** With the knapsack problem is tied vector optimization of investment activities. **Conclusions:** The proposed algorithm for solving the knapsack problem and for additive functions algorithm for Pareto solutions of vector optimization for the two indicators. **Appendix:** an agenda for the Maple solutions knapsack problem.

Keywords: knapsack problem, set functions, vector optimization, the task of investing