ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

НЕТРАДИЦІЙНІ ВИДИ ТРАНСПОРТУ

УДК [629.4 + 625.144.5.]–048.35

Б. М. ТОВТ[1*]

[1*]Каф. «Теоретична механіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (063) 739 13 17, ел. пошта tovt@ua.fm

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТОПОЛОГІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ РУХОМОГО СКЛАДУ ТА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ЗАЛІЗНИЦЬ З УРАХУВАННЯМ КОМПЛЕКСНИХ ОБМЕЖЕНЬ НА МІЦНІСТЬ

Мета. Головна мета статті полягає в розвитку наукових основ теорії топологічної оптимізації конструкцій у частині розв’язання складних задач оптимізації конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць. **Методика.** Математичне програмування й математичне моделювання як інструменти постановки задач топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць. **Результати.** Виконано ґрунтовний огляд і аналіз сучасного стану теорії топологічної оптимізації конструкцій. Наведено класичну варіаційну та скінченно-елементну постановки задач топологічної оптимізації. Розглянуто ідею та особливості реалізації SIMP-методу для їх розв’язання. Подано постановку задачі топологічної оптимізації у вигляді мінімізації маси конструкції з урахуванням обмежень на напруження. Детально розглянуто низку проблем, що виникають у разі введення таких обмежень до задачі оптимізації. **Наукова новизна.** Наукова новизна статті полягає в розвитку теорії оптимального проектування конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць шляхом запропонування постановки задачі топологічної оптимізації, адаптованої до вирішення означених задач. **Практична значимість.** Практична значимість дослідження полягає в адаптації існуючих постановок задач топологічної оптимізації до задач залізничного машинобудування.

Ключові слова: топологічна оптимізація; МСЕ; SIMP-метод; обмеження на напруження; утомна міцність; мінімум ваги

Вступ

Топологічна оптимізація конструкцій є концептуальним інструментом проектування й удосконалення конструкцій, який потребує пост-обробки й детального аналізу отриманих результатів.

Топологічна оптимізація, як окрема галузь наукових досліджень, бере свій початок зі статті талановитого австралійського винахідника Мічела [16], що була опублікована в 1904 р. У [16] вперше були отримані оптимальні критерії для розподілу матеріалу в рамах.

У 1960 р. на другій конференції Американської спілки цивільних інженерів з електронних обчислень Шміт запропоновував свою революційну ідею проектування тіл і систем з мінімальною вартістю за допомогою методів математичного програмування [22]. Ідея Шміта досить швидко знайшла застосування в теорії оптимізації розмірів і форми конструкцій, а пізніше була використана і для задач топологічної оптимізації [15].

Числові методи математичного програмування в топологічній оптимізації інтенсивно досліджуються з кінця 80-х років [3]. Аналіз, виконаний у [20], показує, що для вирішення задач числової скінченно-елементної топологічної оптимізації використовуються такі методи математичного програмування:

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

– градієнтні методи, серед яких найбільшого поширення набули методи послідовного лінійного програмування, послідовного квадратичного програмування, випуклої лінеаризації, а також метод рухомих асимптот [2];

– неградієнтні методи, серед яких на сьогодні прийнято виділяти дві популярні групи алгоритмів: генетичні [10] та еволюційні [26];

– методи, що базуються на критеріях оптимальності (евристичні методи) [23].

Зараз градієнтні методи мають найбільше поширення серед сучасного оптимізаційного програмного забезпечення, до якого слід віднести такі всесвітньо відомі та визнані продукти, як Altair HyperWorks OptiStruct, Dassault Systems Simulia ABAQUS, ANSYS та ін. Серед великої кількості градієнтних методів можна виділити метод рухомих асимптот, запропонований Сванбергом у [25], оскільки алгоритм цього методу становить основу обчислювальних модулів сучасних оптимізаційних комплексів. Ідея методу рухомих асимптот базується на спеціальному типі випуклої апроксимації цільової функції та функцій, що задають обмеження [8, 25].

Мета

Головна мета статті полягає в розвитку наукових основ теорії топологічної оптимізації конструкцій у частині розв'язання складних задач оптимізації конструкцій рухомого складу й спеціальної техніки залізниць.

Методика

Математичне програмування та математичне моделювання як інструменти постановки задачі топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць.

Результати

Класична постановка задачі топологічної оптимізації. Основна ідея топологічної оптимізації конструкцій полягає у отриманні оптимального розподілу матеріалу в наперед визначеній області. Причому суть класичної постановки задачі – мінімізації піддатливості (максимізації жорсткості) конструкції при обмеженнях на її об'єм або вагу [5].

Розглянемо деяку область проектування Ω (рис. 1) у просторі R^2 або R^3, що є частиною твердого деформованого тіла. У розрахунковій області визначимо масові (об'ємні) сили f, розподілені навантаження t і граничні умови на ділянці Γ_u. Задачу оптимального проектування визначимо як задачу оптимального пошуку (вибору) тензора жорсткості $E_{ijkl}(x)$, який є змінним у межах області Ω.

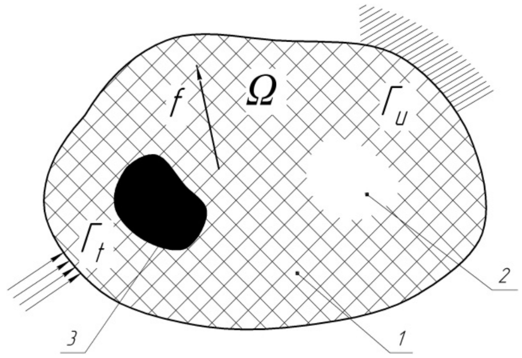

Рис. 1. Узагальнена задача проектування форми у вигляді пошуку оптимального розподілу матеріалу у двовимірній області:
1 – точка проектування; *2* – точка з відсутнім матеріалом; *3* – точка із закріпленим матеріалом

Подаючи енергетичну білінійну форму (можливу роботу внутрішніх силових факторів для пружного тіла у стані рівноваги u, а також для довільного можливого переміщення v) у вигляді

$$a(u,v)=\int_{\Omega} E_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(v)d\Omega,$$

де лінеаризовані деформації $\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, і силову лінійну форму у вигляді:

$$l(u)=\int_{\Omega} fud\Omega+\int_{\Gamma_t} tuds,$$

задача мінімізації піддатливості (максимізації жорсткості) буде мати такий вигляд:

$$\min_{u\in U,E} l(u) \qquad (1)$$

за умови $\underset{E\in E_{ad}}{a_E}(u,v)=l(v),\ \forall\ v\in U$ – рівняння рівноваги, записане у варіаційній формі, де U – простір кінематично допустимих полів переміщень; t – розподілені навантаження за ділян-

© Б. М. Товт, 2013

кою $\Gamma_t \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$ границі області; E_{ad} – множина допустимих тензорів жорсткості для даної задачі проектування.

Індекс E вказує на те, що білінійна форма a_E залежить від змінних проектування.

Скінченно-елементна постановка задачі топологічної оптимізації. Область проектування Ω поділяється на N скінченних елементів. Кожному скінченному елементу відповідає змінна проектування $\rho_e(x) \in (0,1]$, де $e = 1,...,N$, для представлення так званої відносної густини матеріалу [4]. Ці змінні проектування створюють вектор $\vec{\rho} \in R^N$. Глобальна матриця жорсткості конструкції $\vec{K}(\rho_e) \in R^{d \times d}$ залежить від змінних проектування, де d – число степенів вільності. Якщо вектор зовнішніх навантажень $\vec{f} \in R^d$, вектор переміщень $\vec{u} \in R^d$, то основне рівняння рівноваги матиме вигляд

$$\vec{K}(\rho_e)\vec{u} = \vec{f}. \tag{2}$$

Вважаючи, що матеріал має лінійні пружні властивості, тензори деформацій і напружень можуть бути записані через кінематичне рівняння й рівняння стану відповідно

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}_{i,j} + \vec{u}_{j,i}\right), \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = \vec{D}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{4}$$

де $\vec{D}$ – матриця стану, що залежить від коефіцієнта Пуассона μ і модуля Юнга $\vec{E}_0$.

На сьогодні найпоширенішим вживаним методом, який застосовується для розв'язання задач топологічної оптимізації конструкцій, є SIMP-метод, у основу якого закладено поняття твердої ізотропної мікроструктури (або матеріалу) зі штрафом (**S**olid **I**sotropic **M**icrostructure (or **M**aterial) with **P**enalization). Основна ідея цього підходу була запропонована Бендсо у [4], у той час як термін «SIMP» був вперше запропонований Розвані у [21], пізніше ставши загальновживаним.

Ідея SIMP-методу полягає в заміні цілих дискретно змінюваних змінних проектування неперервними змінними, для яких після означеної заміни задається певна форма штрафу, що приводить оптимальний проект до дискретного, так званого 0–1 розв'язку [4, 5, 8], тобто оптимальний проект конструкції має містити лише області з матеріалом – «1» і без нього – «0». Значення штучної функції густини $\rho_e(x)$, які лежать всередині проміжку $(0,1]$, мають штрафуватися.

Властивості матеріалу для кожного скінченного елемента виражаються за допомогою штрафного модуля Юнга $\vec{E}_e$ таким чином:

$$\vec{E}_e = \rho_e^p \vec{E}_0, \tag{5}$$

де $\vec{E}_0$ – модуль Юнга для твердого ізотропного матеріалу; p – параметр штрафу, який має бути більшим за 1 для того, що проміжні значення густини $0 < \rho < 1$ штрафувалися [4]. Згідно з [5] параметр штрафу p рекомендовано обирати більшим, ніж 3 ($p \ge 3$) для того, щоб проміжні значення функції густини в результуючому оптимальному проекті не з'являлися. Таким чином, функція штрафу в SIMP-методі реалізується без допомоги будь-яких явних штрафних схем.

При використанні штрафного модуля Юнга $\vec{E}_e$ глобальна матриця жорсткості буде мати явну залежність від змінних проектування, відносної густини кожного скінченного елемента:

$$\vec{K}(\vec{\rho}) = \sum_{e=1}^{N} \rho_e^p k_0, \tag{6}$$

де k_0 – матриця жорсткості скінченного елемента, для якої використовується модуль Юнга твердого ізотропного матеріалу E_0.

Мінімізація піддатливості (максимізації жорсткості) конструкції для заданого її об'єму або ваги еквівалентна мінімізації енергії деформації конструкції у стані рівноваги. Отже, скінченно-елементна постановка задачі топологічної оптимізації матиме вигляд

$$\min C(u) = \vec{u}^T \vec{K}\vec{u} \tag{7}$$

за умови $\vec{K}\vec{u} = \vec{f}$, причому $m(\vec{\rho}) = \sum_{e=1}^{N} \rho_e \le m_0$, $0 < \rho_{\min} \le \rho_e \le 1$,

де C – піддатливість конструкції; $\vec{u}$ – глобальний вектор переміщень; $\vec{K}$ – глобальна мат-

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

риця жорсткості; $\vec{f}$ – глобальний вектор зовнішніх навантажень; m_0 – обмеження на максимальну масу конструкції; $\rho_{\min}$ – мінімальна відносна густина (як правило, встановлюється $O\left(10^{-3}\right)$ [5]).

Постановка задачі топологічної оптимізації конструкції з урахуванням обмежень на напруження. На відміну від класичної задачі мінімізації піддатливості конструкції при обмеженнях на її об'єм або вагу, більш реальною постановкою задачі топологічної оптимізації слід вважати задачу мінімізації маси конструкції з урахуванням обмежень на напруження, яка матиме такий вигляд:

$$\min m\left(\vec{\rho}\right)=\sum_{e=1}^{N}\rho_e \qquad (8)$$

за умов

$$\vec{K}\vec{u}=\vec{f},$$

$$\frac{F\left(\sigma_e\right)}{\left[\sigma\right]}\le 1,$$

$$0<\rho_{\min}\le\rho_e\le 1,$$

де $F\left(\sigma_e\right)$ – функція, що характеризує розподіл напружень у скінченних елементах за областю проектування; $\left[\sigma\right]$ – значення допустимого напруження для заданого матеріалу, з якого виготовлена конструкція.

Для ізотропних матеріалів найчастіше використовується критерій Мізеса для отримання значень еквівалентних напружень σ_{vM} :

$$\sigma_{vM}^2=\frac{1}{2}\Big[\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2+\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2+ +\left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2\Big]+3\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right).$$

Проблема сингулярності напружень. Введення обмежень на напруження породжує певні труднощі. Зазвичай у задачах топологічної оптимізації конструкцій спостерігаються проблеми зі збіжністю, зумовлені так званою сингулярністю напружень [14].

Проблема сингулярності напружень у задачах топологічної оптимізації конструкцій вперше була виявлена під час проектування ферм. У роботі [7] було показано, що n-вимірний простір допустимих проектів конструкції містить вироджені підпростори розмірності, меншої за n. Більше того, глобальний оптимальний проект конструкції часто належить одному з таких вироджених підпросторів [11, 14]. Алгоритми нелінійного програмування не в змозі ідентифікувати подібні області та збігаються до локальних оптимальний проектів конструкції.

Для вирішення проблеми сингулярності обмеження на напруження піддаються релаксації задля вилучення вироджених підпросторів із простору допустимих проектів і, як результат, для того, щоб методами нелінійного програмування можна було отримати глобальний оптимум задачі. Для задач топологічної оптимізації рамних і фермових конструкцій було запропоновано релаксаційні методи, зокрема метод ε-релаксації та гладеньких обвідних функцій (smooth envelope functions, SEF). Пізніше ці методи були адаптовані до задач проектування континуальних конструкцій [13].

Ідея ε-методу полягає в тому, що традиційний вигляд обмежень на допустимі напруження

$$\left(\sigma_{vM}-\left[\sigma\right]\right)\rho_e\le 0$$

замінюється шляхом зміни нижньої границі на малу величину $\varepsilon>0$. Таким чином, обмеження на напруження буде мати вигляд

$$\left(\sigma_{vM}-\left[\sigma\right]\right)\rho_e\le\varepsilon.$$

ε-релаксація обмежень на напруження дозволяє набувати відносній густині матеріалу ρ_e досить малих значень, проте більших за нуль, таким чином видаляючи вироджені області. У роботі [24] було показано, що навіть якщо за допомогою ε-релаксації глобальний оптимум задачі може бути отриманий, це не гарантує, що розв'язок вихідної задачі з нерелаксованими обмеженнями на напруження буде збігатися до глобального оптимуму.

Критерій допустимих напружень у задачах топологічної оптимізації конструкцій. Наступна складність, яка виникає при введенні обмежень на напруження до задач топологічної оптимізації конструкцій, пов'язана з локальним характером обмежень на напруження. У континуальній постановці задачі обмеження на на-

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

пруження мають розглядатися для кожної точки матеріалу. У дискретній постановці (наприклад, скінченно-елементній) число точок матеріалу є скінченним, проте все одно занадто великим, як для практичної реалізації. Існує декілька способів введення обмежень на напруження до задачі топологічної оптимізації конструкцій.

Один із найпростіших способів полягає в контролюванні величини напружень у заданих вузлах кожного скінченного елемента. Цей спосіб відомий під назвою метод локальних обмежень і використовувався у [19]. Метод локальних обмежень потребує великої кількості обчислень, адже до задачі топологічної оптимізації вводиться кількість обмежень на напруження, порівнянна з кількістю скінченних елементів. Зменшення кількості обчислень можливе за рахунок обчислення чутливостей тільки для активних обмежень.

Інший підхід полягає у зведенні всіх локальних обмежень на напруження до одного глобального обмеження. Цей підхід відомий під назвою метод глобального обмеження і використовувався у [9]. Як об’єднувальна функція застосовується функція p-норми:

$$\sigma_{PN} = \left[\sum_{e=1}^{n} \left(\frac{F(\sigma_e)}{[\sigma]} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \qquad (9)$$

або функція Крейссельмера–Штайнхаузера (Kreisselmeier-Steinhauser function, KS-function) [18]:

$$\sigma_{KS} = \frac{1}{p} \ln \left[\sum_{e=1}^{n} \exp\left(p \frac{F(\sigma_e)}{[\sigma]} \right) \right]. \qquad (10)$$

Обидві функції (8) і (9) гладкі та диференційовні. Параметр p контролює рівень гладкості.

Недоліком методу глобальних обмежень є значно гірший контроль за рівнем локальних напружень порівняно з методом локальних обмежень. До переваг методу глобальних обмежень слід віднести скорочення обсягу обчислювальних операцій, що виконуються у процесі оптимального проектування.

Третій підхід передбачає групування скінченних елементів у блоки й використання окремої об’єднувальної функції для кожного блока. Такий спосіб отримав назву методу блочно-об’єднаних обмежень і був застосований у [17].

У цьому методі для кожного блока відповідне йому обмеження на напруження може бути записане у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \max\left(\frac{F(\sigma_e)}{[\sigma]} \right). \qquad (11)$$

У разі використання методу блочно-об’єднаних обмежень кількість обмежень значно зменшується порівняно з методом локальних обмежень при відносному збереженні контролю за рівнем локальних напружень. Недоліком цього методу є те, що функція (10) не є диференційовною.

На завершення слід сказати про новий підхід, запропонований у [11]. Він має назву методу кластерів. Згідно з цим підходом скінченні елементи, що мають сумірний рівень напружень, об’єднуються разом у так звані кластери за певним правилом (метод рівнів напружень або метод розподілених напружень).

Фільтр для змінних проектування. Обмеження на напруження суттєво нелінійно залежать від проекту. На рівень напружень надмірно впливає зміна відносної густини матеріалу ρ_e у сусідніх областях, і це явище посилюється в критичних областях з великими градієнтами напружень (концентраціями напружень), наприклад у гострих кутах. Ця проблема отримала назву проблеми залежності розв’язку від скінченно-елементної сітки (mesh-dependency problem) [5, 11, 13] Таким чином, постановка задачі топологічної оптимізації конструкцій та алгоритм її вирішення мають уникати проблем зі збіжністю.

Для коректної постановки задачі топологічної оптимізації запропонований і пізніше доведений метод фільтрування густини [6]. Фільтровані змінні густини ρ_e створюються шляхом взяття середнього зваженого від сусідніх змінних проектування x_j. Фільтр змінних проектування записується так:

$$\rho_e(\vec{x}) = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} w_j x_j}{\sum_{j \in \Omega_e} w_j}, \qquad (12)$$

де Ω_e – множина (для скінченного елемента e), що містить усі елементи j, що лежать всере-

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

дині кола радіусом r_o, виміряного між центрами тяжіння сусідніх елементів (рис. 2); w_j – середньозважений коефіцієнт.

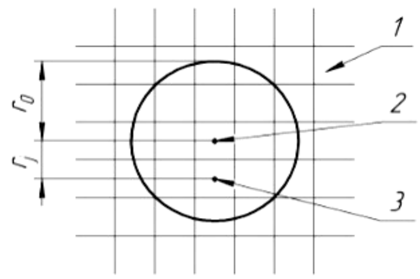

Рис. 2. Візуалізація фільтру змінних проектування:
1 – скінченно-елементна сітка;
2 – змінна проектування e ; *3* – змінна проектування j

Середньозважений коефіцієнт визначається [6] таким чином:

$$w_j = \frac{r_0 - r_j}{r_0}.$$

Зауважимо, що вага дорівнює нулю для усіх змінних проектування, що перебувають зовні множини Ω_e. З точки зору реалізації, вагова матриця $\vec{W}$ увійде до функції відносної густини матеріалу таким чином:

$$\rho_e\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n_e} W_{ej} x_j .$$

Постановка задачі топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу залізниць та спеціальної техніки залізниць з урахуванням обмежень на міцність. Для більшості задач оптимізації рухомого складу та спеціальної техніки залізниць класична постановка задачі топологічної оптимізації є неприйнятною, оскільки створення найбільш жорсткої конструкції при обмеженнях лише на її об’єм або вагу не є доцільним.

Важливою для залізничного машинобудування є проблема створення тримальних конструкцій найменшої маси при виконанні обмежень на міцність.

Міцність конструкцій локомотивів, моторвагонного рухомого складу, вагонів і колійних машин оцінюється за двома критеріями: допустимих напружень і коефіцієнтів запасу утомної міцності [1]. Оцінка міцності виконується як на стадії проектування, так і на етапі випробувань дослідних зразків.

Щодо критерію допустимих напружень, то вище детально було розглянуто постановку задачі топологічної оптимізації конструкцій з урахуванням обмежень на напруження (8). Запишемо (8) таким чином:

$$\left(P_1\right) \quad \begin{cases} \min\limits_{x} \sum\limits_{e=1}^{n} m_e \rho_e\left(\vec{x}\right), \\ s.t. \begin{cases} \dfrac{\sigma_i^s\left(\vec{x}\right)}{\left[\sigma^s\right]} \le 1, i = 1,..., n_i , \\ e < x_e < 1, e = 1,..., n_e , \end{cases} \end{cases} \qquad (13)$$

де $\sigma_i^s\left(\vec{x}\right)$ – значення напруження для i-го обмеження на напруження; $\left[\sigma^s\right]$ – значення допустимого напруження для заданого матеріалу, з якого виготовлена конструкція.

Проект конструкції, отриманий за допомогою постановки задачі (13), $\left(P_1\right)$ може відповідати вимогам обмежень за допустимими напруженнями, проте це не гарантується, як було зазначено в [21]. За необхідності до постановки задачі (13) можуть бути додатково введені обмеження на піддатливість, переміщення чи власні частоти. У [11] виконано порівняння задач з різними постановками, описаними вище, а також зроблено висновок, що вирішення задачі топологічної оптимізації конструкції можливо розпочинати одразу з уведення обмежень на допустимі напруження у вигляді (13).

Що стосується введення оцінки утомної міцності конструкції до задач топологічної оптимізації, то це питання зараз розвивається і досліджується [11, 12]. На основі огляду й аналізу сучасного стану теорії топологічного проектування конструкцій, що був виконаний вище, не виявлено достатньої кількості публікацій, присвячених цій проблемі стосовно до задач проектування й удосконалення залізничної техніки. Таким чином, розгляд задачі топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць з урахуванням комплексних обмежень на міцність є актуальним науково-технічним питанням.

У [12] запропоновано постановку задачі топологічної оптимізації з урахуванням обмежень на утомну міцність наводити в такому вигляді:

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

$$(P_2)\quad \begin{cases} \min\limits_{x} \sum\limits_{e=1}^{n} m_e \rho_e(\vec{x}), \\ s.t. \begin{cases} \dfrac{\sigma_i^s(\vec{x})}{\left[\sigma^s\right]} \le 1,\ i = 1,...,n_i, \\ \dfrac{\sigma_j^f(\vec{x})}{\left[\sigma^f\right]} \le 1,\ j = 1,...,n_j, \\ e < x_e < 1,\ e = 1,...,n_e, \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

де $\sigma_j^f(\vec{x})$ – значення утомного напруження для j-го обмеження на утомні напруження; $\left[\sigma^f\right]$ – значення допустимого утомного напруження для заданого матеріалу, з якого виготовлена конструкція, обране таким чином, щоб накопичене пошкодження D було меншим, ніж допустиме $[D]$ для встановлених умов навантаження протягом повної розрахункової довговічності.

Постановку задачі топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу та спеціальної техніки залізниць з урахуванням комплексних обмежень на міцність пропонується виконувати у вигляді (P_2).

Наукова новизна та практична значимість

Наукова новизна статті полягає в розвитку теорії оптимального проектування конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць шляхом запропонування постановки задачі топологічної оптимізації, адаптованої до вирішення означених задач.

Практична значимість дослідження полягає в адаптації існуючих постановок задач топологічної оптимізації до задач залізничного машинобудування.

Висновки

У статті розглянуто основні етапи створення теорії топологічної оптимізації конструкцій, наведено класичну варіаційну та скінченно-елементну постановки задачі топологічної оптимізації. Розглянуто ідею та особливості реалізації SIMP-методу для її розв’язання.

Наведено постановку задачі топологічної оптимізації у вигляді мінімізації маси конструкції з урахуванням обмежень на напруження. Детально розглянуто низку проблем, що виникають при введенні таких обмежень до задачі оптимізації. Зокрема, надано опис і методи вирішення проблеми сингулярності напружень, а також проблеми залежності від скінченно-елементної сітки (фільтр для змінних проектування). Також розглянуто методи введення обмежень на напруження до задач топологічної оптимізації – методи локальних обмежень, глобального обмеження, блочно-об’єднаних і кластерних обмежень.

Таким чином, огляд і аналіз сучасного стану теорії топологічного проектування конструкцій, виконаний у статті, показав, що цей науковий напрямок є актуальним і активно розвивається останнім часом.

Саме тому залучення такого сучасного інструменту проектування, як топологічна оптимізація, до розв’язання задач створення й удосконалення конструкцій рухомого складу і спеціальної техніки залізниць є актуальною проблемою.

У статті запропонована постановка задачі топологічної оптимізації конструкцій рухомого складу та спеціальної техніки залізниць з урахуванням комплексних обмежень на міцність, що включають обмеження за критеріями допустимих напружень і критеріями утомної міцності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кострица, С. А. Чисельна реалізація методів математичного програмування у задачах оптимального проектування механічних конструкцій / С. А. Кострица, Б. М. Товт // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д., 2009. – Вип. 30. – С. 150−154.
2. Allaire, G. Shape optimization by the homogenization method / G. Allaire. – New York : Springer, 2002. – 471 p.
3. Bendsoe, M. P. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method / M. P. Bendsoe, N. Kikuchi // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1988. − № 71. – P. 197−224.
4. Bendsoe, M. P. Optimal shape design as a material distribution / M. P. Bendsoe // Structure Optimization. – 1989. – № 1. – P. 193–202.
5. Bendsoe, M. P. Topology Optimization: Theory, Methods and Application / M. P. Bendsoe, O. Sigmund. – Heidelberg : Springer, 2003. – 370 p.
6. Bruns, T. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms /

© Б. М. Товт, 2013

T. Bruns, D. Tortorelli // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2001. – № 190 (26–27). – P. 3443–3459.

7. Cheng, G. D. Study on topology optimization with stress constraints / G. D. Cheng, Z. Jiang // Engineering Optimization. – 1992. – № 20 (2). – P. 129–148.
8. Christensen, P. W. An introduction to Structural Optimization / P. W. Christensen, A. Klarbring. – London : Springer, 2009. – 211 p.
9. Guilherme, C. E. M. Topology optimization of continuum structures with ε-relaxed stress constraints / C. E. M. Guilherme, J. S. O. Fonseca // ABCM Symp. Series in Solid Mechanics. – 2007. – № 1. – P. 239–250.
10. Hajela, P. Genetic algorithms in truss topology optimization / P. Hajela, E. Lee // Intern. J. Solids Structure. – 1992. – № 32. – P. 3341–3357.
11. Holmberg, E. Stress constrained topology optimization / E. Holmberg, Bo Torstenfelt, A. Klarbring // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2013. – № 48 (1). – P. 33–47.
12. Holmberg, E. Fatigue constrained topology optimization / E. Holmberg, B. Torstenfelt, A. Klarbring // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2013. – *preprint*.
13. Le, C. Stress-based topology optimization for continua / C. Le, J. Norato, T. Bruns, C. Ha // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2010. – № 41. – P. 605–620.
14. Lee, E. Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading / E. Lee, K. A. James, J. R. R. A. Martins // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2012. – № 46 (5). – P. 647–661.
15. Lewinski, T. Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization II: three-side polygonal supports / T. Lewinski, G. I. N. Rozvany // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2007. – № 33. – P. 337–350.
16. Michell, A. G. M. The limits of economy of material in frame structures / A. G. M. Michell // Philosophical Magazine. – 1904. – № 8. – P. 589–597.
17. Paris, J. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures / J. Paris, F. Navarrina, I. Colominas // Advances in Engineering Software. – 2010. – № 41 (3) – P. 433–441.
18. Paris, J. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints / J. Paris, F. Navarrina, I. Colominas // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2009. – № 39. – P. 419–437.
19. Pereira, J. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints / J. Pereira, E. Francello, C. Barcellos // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2004. – № 26 (1). – P. 50–66.
20. Rozvany, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics / G. I. N. Rozvany // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2001. – № 21. – P. 90–108.
21. Rozvany, G. I. N. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints / G. I. N. Rozvany // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 1996. – № 11 (3). – P. 213–217.
22. Schmit, L. A. Structural design by systematic synthesis / L. A. Schmit // Proc. of the second ASCE Conf. on Electronic Computation. – Pittsburgh : ASCE, 1960. – P. 105–122.
23. Spillers, W. R. Structural Optimization / W. R. Spillers, K. M. MacBain. – London : Springer, 2009. – 302 p.
24. Stolpe, M. On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization / M. Stolpe, K. Svanberg // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2001. – № 21 (2). – P. 140–151.
25. Svanberg, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization / K. Svanberg // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1987. – № 24. – P. 359–373.
26. Xie, Y. M. Evolutionary structural optimization / Y. M. Xie, G. P. Steven. – London : Springer, 1997. – 540 p.

© Б. М. Товт, 2013

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2013, вип. 5 (47)

Б. Н. ТОВТ[1*]

[1*]Каф. «Теоретическая механика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (063) 739 13 17, эл. почта tovt@ua.fm

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ С УЧЕТОМ КОМПЛЕКСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ

Цель. Главная цель статьи заключается в развитии научных основ теории топологической оптимизации конструкций в части решения сложных задач оптимизации конструкций подвижного состава и специальной техники железных дорог. **Методика.** Математическое программирование и математическое моделирование как инструменты создания постановки задач топологической оптимизации конструкций подвижного состава и специальной техники железных дорог. **Результаты.** Выполнен основательный обзор и анализ современного состояния теории топологической оптимизации конструкций. Приведены классическая вариационная и конечно-элементная постановки задач топологической оптимизации. Рассмотрена идея и особенности реализации SIMP-метода для их решения. Приведена постановка задачи топологической оптимизации в виде минимизации массы конструкции с учетом ограничений по напряжениям. Детально рассмотрен ряд проблем, возникающих при введении подобных ограничений в задачу оптимизации. **Научная новизна**. Научная новизна заключается в развитии теории оптимального проектирования конструкций подвижного состава и специальной техники железных дорог путем создания постановки задачи топологической оптимизации, адаптированной к решению упомянутых задач. **Практическая значимость.** Практическая значимость исследования состоит в адаптации существующих постановок задач топологической оптимизации к задачам железнодорожного машиностроения.

Ключевые слова: топологическая оптимизация; МКЭ; SIMP-метод; ограничения на напряжения; усталостная прочность; минимум веса

B. M. TOVT[1*]

[1*]Dep. «Theoretical Mechanics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (063) 739 13 17, e-mail tovt@ua.fm.

COMPLEX STRENGTH-CONSTRAINED TOPOLOGY STRUCTURAL OPTIMIZATION PROBLEM STATEMENT FOR ROLLING STOCK AND SPECIAL EQUIPMENT OF RAILWAY

Purpose. The main paper purpose is the development of the topology structural optimization scientific basis regarding to the complicated optimization problems of rolling stock and special railway equipment structures. **Methodology.** Mathematical programming and mathematical modeling are the creating tools for the topology structural optimization problem statement for the rolling stock and special railway equipment. **Findings.** The fundamental review and analysis of the topology structural optimization modern state is executed. The classical variation problem statement and FE-statement of the topology optimization problem are in the paper. The stress-constrained structure mass minimization problem statement is considered. The stress-constrained topology optimization problems have some difficulties, which are considered in the paper in detail. The strength condition by the fatigue strength safety factor criterion is transformed to the strength condition by the allowable stresses criterion. **Originality.** Scientific novelty is the development of the optimal design theory adapted to solving the rolling stock and special railway equipment structures problems. **Practical value.** Practical importance of the research is the adaptation of the existing topology structural optimization problem statements to the railway engineering industry problems.

Keywords: topology optimization; FEM; SIMP-method; stress constraints; fatigue strength; weight minimum

© Б. М. Товт, 2013

REFERENCES

1. Kostrytsia S.A., Tovt B.M. Chyselna realizatsiia metodiv matematychnoho prohramuvannia u zadachakh optymalnoho proektuvannia mekhanichnykh konstruktsiy [The numerical implementation of mathematical programming in problems of optimal design in mechanical structures]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznichnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University named after Academician V. Lazaryan], 2009, issue 30, pp. 150-154.
2. Allaire G. Shape optimization by the homogenization method. New York, Springer Publ., 2002. 471 p.
3. Bendsoe M.P., Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1988, no. 71, pp. 197-224.
4. Bendsoe M.P. Optimal shape design as a material distribution. *Structure Optimization*, 1989, no. 1, pp. 193-202.
5. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Application. Heidelberg, Springer Publ., 2003. 370 p.
6. Bruns T., Tortorelli D. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, no. 190 (26-27), pp. 3443-3459.
7. Cheng G.D., Z. Jiang. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, 1992, no. 20 (2), pp. 129-148.
8. Christensen P.W., Klarbring A. An introduction to Structural Optimization. London, Springer Publ., 2009. 211 p.
9. Guilherme C.E.M., J.S.O. Fonseca Topology optimization of continuum structures with ε-relaxed stress constraints. *ABCM Symposium Series in Solid Mechanics*, 2007, no. 1, pp. 239-250.
10. Hajela P., Lee E. Genetic algorithms in truss topology optimization. *International Journal Solids Structure*, 1992, no. 32, pp. 3341-3357.
11. Holmberg E., Torstenfelt B., Klarbring A. Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, no. 48 (1), pp. 33-47.
12. Holmberg E., Torstenfelt Bo., Klarbring A. Fatigue constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, *preprint*.
13. Le C., Norato J., Bruns T. Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, no. 41, pp. 605-620.
14. Lee E., James K. A., Martins J. R. R. A. Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, no. 46 (5), pp. 647-661.
15. Lewinski T., Rozvany G.I.N. Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization II: three-side polygonal supports. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, no. 33, pp. 337-350.
16. Michell A.G.M. The limits of economy of material in frame structures. *Philosophical Magazine*, 1904, no. 8, pp. 589-597.
17. Paris J., Navarrina F., Colominas I. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures. *Advances in Engineering Software*, 2010, no. 41 (3), pp. 433-441.
18. Paris J., Navarrina F., Colominas I. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, no. 39, pp. 419-437.
19. Pereira J., Francello E., Barcellos C. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, no. 26 (1), pp. 50-66.
20. Rozvany G.I.N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, no. 21, pp. 90-108.
21. Rozvany G.I.N. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1996, no. 11 (3), pp. 213-217.
22. Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis. Proc. of the second ASCE Conf. on electronic computation. Pittsburgh, 1960, pp. 105-122.
23. Spillers W.R., MacBain K.M. Structural Optimization. London, Springer Publ., 2009. 302 p.
24. Stolpe M., Svanberg K. On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, no. 21 (2), pp. 140-151.
25. Svanberg K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, no. 24, pp. 359-373.
26. Xie Y.M., Steven G.P. Evolutionary structural optimization. London, Springer Publ., 1997. 540 p.

Стаття рекомендована до публікації д.т.н., проф. С. В. Ракшою (Україна); к.т.н. М. Е . Хожилом (Україна)

Надійшла до редколегії 06.08.2013
Прийнята до друку 30.08.2013

© Б. М. Товт, 2013