

EĞİLME VE BURULMAYA MARUZ BİR ELİPTİK HALKA SEKTÖRÜNDE İÇ GERİLME DAĞILIMI

Yaşar PALA

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Bölümü, Görükle/Bursa

ÖZET

Bu çalışmada, kesiti iç içe (confocal) elipslerden müteşekkil bir toroidal halka sektörünün pür burulma problemi ele alınarak iç gerilme dağılımı elde edilmektedir. Analiz için Göhner metodu kullanılmaktadır. Elde edilen sonuçlar, pür eğilmeye maruz hal için elde olunan sonuçlarla süperpoze edilmek suretiyle eğilme ve burulma şeklinde bileşik yüklemeye maruz bir dirsek elemandaki gerilme dağılımı elde edilmeye çalışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler : Gerilme, Dağılımı, Toroid, Eğrisel, Halka, Eleman

STRESS DISTRIBUTION IN A TOROIDAL RING SECTOR SUBJECTED TO BENDING AND TWISTING

ABSTRACT

In this study, stress analysis in a toroidal ring sector with an elliptical cross section composed of two confocal ellipses is considered. Göhner's method is used in the analysis. The results obtained for the case of pure torsion is superposed with those corresponding to pure bending in order to reach to the case of combined loading.

Key Words: Toroidal, Ring, Sector, Stress, Distribution

1. GİRİŞ

Eğri tüplerin safi eğilme problemi çok sayıdaki bilim adamının dikkatini çekmiş ve geniş olarak von Karman (1911), Thuloup (1928), Reissner (1959) ve Clark and Reissner (1951) tarafından incelenmiştir. En son olarak Pala (1996) farklı bir yaklaşım üzerine kurulup Göhner metodunu (1930) kullanarak benzer bir problemi kesitin eliptik olması farkıyla ele almıştır.

Böyle bir analiz, ovalleşme etkisinin analitik bir tarzda probleme katılmasını sağlar. Safi eğilme üzerine çok sayıda makale mevcut olmasına rağmen literatürde eğri tüplerin bileşik yükleme haline dair makale mevcut değildir.

Bu makale, aynı anda eğilme ve burulmaya maruz kesiti iç içe elipslerden müteşekkil toroidal halka şeklindeki bir tüpteki iç gerilme dağılımının elde

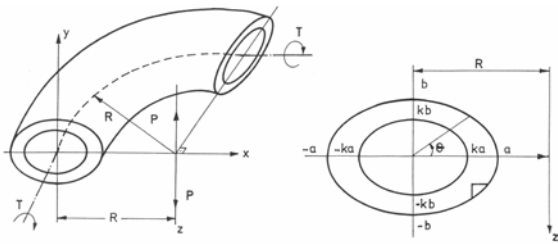
edilmesine hasredilmektedir. İlk halka parçasının safi burulma problemi ele alınmaktadır. İkinci olarak, Pala (1996) tarafından safi eğilme için verilen sonuçlar mevcut problem için değiştirilmektedir. Üçüncü merhalede, karşılaşılan denklemlerin tümü lineer ve ikinci mertebeden olduklarından sonuçlar süperpoze edilmektedir.

Kesitin eliptik kabul edilmesinin bir sebebi de eğilme ve burulmaya maruz toroidal sektörün boğaz kısmının yaklaşık olarak eliptik bir kesit şeklini alacağı ve genel halde elde edilen sonuçların bu bölge için daha uygun düşeceği beklentisidir. Deneysel ölçüm sonucunda elipslerin esas eksen uzunlukları belirlenerek metodun analitik sonuçları içerisinde değerlendirilebilir.

Analiz, analitik hesaplama zorlukları dolayısıyla üçüncü mertebeye düzeltmelerle sona erdirilmektedir.

2. ANALİZ

Şekil 1'de görüldüğü gibi halkanın merkezinden geçen ve halka düzlemine dik olan eksen boyunca iki eşit ve zıt yönlü P kuvvetinin etkisine maruz olan bir halka sektörü ele alalım. Bu kuvvetler halkanın her kesitinde aynı bir $M = PR$ momenti hasil eder. Kesit boyutları Şekil 1. b'de gösterilmektedir. Daha sonra açıklanacak sebepten dolayı iç elipsin asal eksen uzunlukları dış elipsin asal eksen uzunluklarının k katı seçilmektedir. Burulma halinde yalnız $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmelerinin sıfırdan farklı olduklarını kabul edeceğiz. Buna göre denge denklemlerinden,



(a) (b)

Şekil 1. Safi burulmaya maruz toroidal halka sektörü

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

elde ederiz. Şekil 1.b'den,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{\theta z} \cos \theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tau_{r\theta} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2)$$

buluruz. Bunları gerilme tamlık denklemlerine yerleştirip $\oplus = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 0$ olduğunu hatırlayarak,

$$\frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} = 0 \quad (3b)$$

elde ederiz. Diğer,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \oplus}{\partial r^2} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \oplus}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \oplus}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \oplus}{\partial r \partial z} = 0$$

şeklindeki dört adet tamlık denklemi özdeş olarak sağlanmaktadır. Buna göre problemimiz, (1) ve (3) denklemlerinin sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasına indirgenmektedir. (1) denklemleri,

$$\tau_{r\theta} = \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5)$$

halinde sağlanır (Timoshenko and Goodier, 1951). Burada G rijitlik modülü ve R , halka yarıçapıdır. (5) denklemlerini (3) tamlık denklemlerinde yerine koyarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

denklemleri elde olunur (Pala, 1996). (6) denklemleri parantez içindeki ifadenin r ve z den bağımsız ve dolayısıyla bir sabit olması gerektiğini telkin etmektedir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2c = 0 \quad (7)$$

Burada c , bir sabittir. Şimdi bu denklemde,

$$\xi = R - r, \quad \zeta = z \quad (8)$$

vazederek,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2c = 0 \quad (9)$$

elde ederiz.

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{R}} = 1 + \frac{\xi}{R} + \frac{\xi^2}{R^2} + \dots \quad (10)$$

eşitliği ile birlikte

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (11)$$

olduğunu varsayıp bu ifadelerle (1) denkleminin müracaat ederek

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \zeta^2} + 2c = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} = 0 \quad (12b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{3\xi}{R^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} = 0 \quad (12c)$$

denklemlerini elde ederiz. ϕ sınırda sıfır olduğundan $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ler de sınırda sıfırdır.

Yeni değişkenler cinsinden gerilmeler,

$$\tau_{r\theta} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (13)$$

ya da,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} = 1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots \quad (14)$$

açılımını dikkate alarak,

$$\tau_{r\theta} = G \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \left[1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots \right] \quad (15)$$

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left[1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots \right]$$

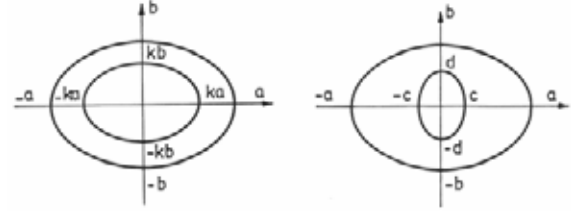
şeklinde elde olunur.

Şimdi sadece (12a) denklemini dikkate alarak gerilmeler için ilk yaklaşım olarak,

$$\left(\tau_{r\theta}\right)_0 = G \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta}, \quad \left(\tau_{\theta z}\right)_0 = G \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \quad (16)$$

elde ederiz. Aynı şekilde ikinci ve üçüncü yaklaşımlar için de,

$$\left(\tau_{r\theta}\right)_1 = G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right] \quad (17)$$



(a) (b)
Şekil 2. Eliptik kesit boyutları

$$\left(\tau_{\theta z}\right)_1 = G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right]$$

ve

$$\left(\tau_{r\theta}\right)_2 = G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} \right] \quad (18)$$

$$\left(\tau_{\theta z}\right)_2 = G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right]$$

elde ederiz (Timoshenko and Goodier, 1951).

2. 1. Eliptik Kesit

ϕ nin yüzeyde sıfır olması dolayısıyla sınır eğrilerinin denklemlerinden müteşekkil şekilde bir gerilme fonksiyonu düşünebiliriz.

$$\phi_0 = -k \left(b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2 \right) \left(d^2 \xi^2 + c^2 \zeta^2 - c^2 d^2 \right) \quad (19)$$

Burada a, b ve c, d ikilileri elipslerin asal eksen uzunluklarıdır. Ancak, (12) denklemlerinin yapısı böyle bir formun kullanılmasına müsade etmemektedir. Zira, denklemlerin ikinci mertebeden olmaları dolayısıyla başlangıçta sabit olduğu kabul edilen k'nın ξ ve ζ değişkenlerine bağlı olması gibi bir çelişkiyle karşılaşırız. Bunun için sadece yüzeyde sıfır olan,

$$\phi_0 = k \left(b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2 \right) \quad (20)$$

şeklinde bir fonksiyon seçelim. Bu ifadenin (12a) denkleminde yerine konulması

$$k = -\frac{c}{a^2 + b^2} \quad (21)$$

verir. Buna göre,

$$\phi_0 = \frac{-c}{a^2 + b^2} \left(b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2 \right) \quad (22)$$

fonksiyonu yüzeyde istenen şartı sağlar.

Şimdi,

$$\frac{\xi^2}{(ak)^2} + \frac{\zeta^2}{(bk)^2} = 1 \quad (23)$$

elipsini dikkate alalım. Burada k bir sabittir. Bu eğri, dış sınıra geometrik olarak benzer aynı eksenli bir elipsdir. (22) denkleminde gözleneceği üzere ϕ_0 fonksiyonu bu eğri üzerinde de sabittir ve dolayısıyla birden küçük k'lar için bu elips, dolu kesit için bir gerilme çizgisidir. Bu çizginin herhangi bir noktasında kayma gerilmesi, çizginin teğeti doğrultusundadır. Şimdi, bu gerilme çizgisinden toroidal bir yüzey geçirecek olursak, bu yüzey üzerine hiç bir gerilme etkimez. Bilahare, bu yüzeyle sınırlanmış malzemenin milin dış kısmındaki gerilme yayılımını değiştirmeksizin kaldırıldığını düşünebiliriz. Sonuç olarak, (22) gerilme fonksiyonu, eliptik delik ihtiva eden bir mile de uygulanabilir. Bu arada varılan sınırlamaya dikkat etmek gerekir. Metod, mesela Şekil 2. b' deki gibi konumlandırılmış iki elips hali için geçerli değildir.

Şimdi, (22) denklemini (16) denklemlerinde kullanarak

$$(\tau_{r\theta})_0 = \frac{-2Ga^2c}{(a^2 + b^2)} \zeta \quad (24a)$$

$$(\tau_{\theta z})_0 = \frac{-2Gb^2c}{(a^2 + b^2)} \xi \quad (24b)$$

elde ederiz. Buna karşılık burulma momenti

$$\begin{aligned} (M_t)_o &= - \iint_D (\tau_{r\theta} \zeta + \tau_{\theta z} \xi) d\xi d\zeta \\ &= \frac{(1-k^4) \Pi a^3 b^3 Gc}{(a^2 + b^2)} \end{aligned} \quad (25)$$

şeklindedir. Buradan c sabitini çekerek

$$c = \frac{(M_t)_o (a^2 + b^2)}{\Pi G a^3 b^3 (1-k^4)} \quad (26)$$

elde ederiz.

Verilen aynı bir dönme miktarı ($d\theta/ds$) için içi boş mildeki gerilmeler dolu toroiddekinin aynı olur. Fakat moment, (25) ifadesinden tedkik edilebileceği üzere $(1-k^4)$ oranında azalır. Yani, $M_t \rightarrow M_t/(1-k^4)$ ile değiştirilmelidir. Buna göre

$$\phi_0 = c [b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2] \quad (27)$$

denklemini eliptik delik hali için de geçerlidir. Burada c, (26) denklemini ile verilmektedir.

Şimdi, ϕ_0 fonksiyonu ile (12b) denklemine müracaat ederek

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} = \frac{6cb^2}{R} \xi \quad (28)$$

elde ederiz. (28) denklemini ve $\phi_1 = 0$ sınır şartını sağlayan çözüm

$$\phi_1 = m_2 \xi [b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2] \quad (29)$$

şeklindedir. (28) denkleminde yerine koyarak

$$\phi_1 = \frac{-3cb^2}{R(3b^2 + a^2)(a^2 + b^2)} [b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2] \xi \quad (30)$$

elde ederiz.

Şimdi, gerilme bileşenleri için bu ikinci yaklaşımı (17) denklemlerinde yerine koyarak

$$(\tau_{r\theta})_1 = \frac{-2a^2 Gc}{R(a^2 + b^2)} \left[(R + 2\xi) + \frac{3b^2 \xi}{(3b^2 + a^2)} \right] \zeta \quad (31)$$

$$(\tau_{\theta z})_1 = \frac{-2Gcb^2}{R(a^2 + b^2)} \left[(R + 2\xi) \xi + \frac{3}{2(3b^2 + a^2)} (3b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2) \right] \quad (32)$$

buluruz. Bu gerilmeler kullanılarak moment,

$$\begin{aligned}
 (M_1)_1 &= \iint (\tau_{r\theta}\zeta + \tau_{\theta\zeta}) d r d \theta \\
 &= \frac{-2a^2 Gc}{(a^2 + b^2)} \left[\nu_1 \iint \zeta^2 d\zeta d\xi + \nu_2 \iint \xi \zeta^2 d\zeta d\xi \right] \\
 &\quad + \frac{-2b^2 Gc}{R(a^2 + b^2)} \left[\nu_3 \iint \xi^2 d\zeta d\xi + \nu_4 \iint \xi^3 d\zeta d\xi + \nu_5 \iint \zeta^2 \xi d\zeta d\xi + \nu_6 \iint \xi d\zeta d\xi \right] \\
 &= \frac{-2a^3 b Gc}{R(a^2 + b^2)(1 - k^4)} \left(\frac{\pi}{4} b^2 \nu_1 + \frac{4}{15} a b^2 \nu_2 \right) \\
 &\quad + \frac{2b^3 a Gc}{R(a^2 + b^2)(1 - k^4)} \left[\frac{\pi}{4} a^2 \nu_3 + \frac{8}{15} a^3 \nu_4 + \frac{4}{15} b^2 a \nu_5 + \frac{4}{3} a \nu_6 \right]
 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= 1, \quad \nu_2 = \frac{2}{R} + \frac{3b^2}{R(3b^2 + a^2)}, \quad \nu_3 = R \\
 \nu_4 &= 2 + \frac{9b^2}{2(3b^2 + a^2)}, \quad \nu_5 = \frac{3a^2}{2(3b^2 + a^2)}, \quad \nu_6 = \frac{3a^2 b^2}{2(3b^2 + a^2)}
 \end{aligned}$$

dır.

Üçüncü yaklaşımı elde edebilmek için ϕ_1 in (30)'deki ifadesini (12c) denkleminde yerleştirerek

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \zeta^2} = -\frac{3}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{3\xi}{R^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \quad (33)$$

buluruz. Bu denklemi sağlayan ϕ_2 ifadesini

$$\phi_2 = \left[a_1 \xi^2 + a_2 \zeta^2 - a_3 \right] \left[b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2 \right] \quad (34)$$

şeklinde elde ederiz. Burada a_1, a_2 ve a_3 belirlenmeleri gerekli sabitlerdir. (34) ifadesini (33) de yerine koyup ξ^2 ve ζ^2 li terimlerin katsayıları ile sabit katsayıları birbirine eşitleyerek

$$a_1 = -\frac{b^2}{(12b^2 + 2a^2)R^2} \left[3(m_2 R + 2c) + 2a_2 R^2 \right] \quad (35)$$

$$a_2 = \frac{3a^2}{2R} \frac{\left[m_2 R(6b^2 + a^2) - 3m_2 b^2 R - 2kb^2 \right]}{\left[a^2 b^2 - (6b^2 + a^2)(b^2 + 5a^2) \right]} \quad (36)$$

$$a_3 = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(a_1 + a_2 + \frac{3m_2}{2R} \right) \quad (37)$$

buluruz.

Sabitler bulunduktan sonra ϕ_2 nin (34) ile verilen ifadesi (18) denklemlerinde yerine konularak gerilmeler

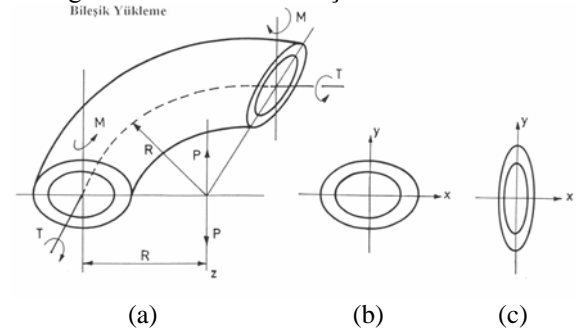
$$\begin{aligned}
 (\tau_{r\theta})_2 &= G \left[(2ca^2) \left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} \right) \zeta + \left(1 + \frac{2\xi}{R} \right) (2m_2 a^2) (\xi \zeta) \right. \\
 &\quad \left. + 2a_2 (b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2) \zeta + (a_1 \xi^2 + a_2 \zeta^2 - a_3) (2a^2) \zeta \right] \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{\theta\zeta})_2 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} \right) (2cb^2 \xi) + \left(1 + \frac{2\xi}{R} \right) \left[m_2 (b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2) + m_2 \xi (2b^2 \xi) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (2a_1 \xi) (b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2) + (a_1 \xi^2 + a_2 \zeta^2 - a_3) (2b^2 \xi) \right] \quad (39)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. 2. Bileşik Yükleme

Bir ring sektörünün Şekil 3'deki gibi yüklendiğini kabul edelim. O takdirde, denklemlerin lineer olmaları dolayısıyla safi eğilme için Pala (1996)'da verilen formüller ile bu makalenin sonuçları süperpoze edilebilir. Bununla beraber, bu makalede karşılaşılan kısıtlama gözönüne alındığında bunun ancak Şekil 3. b-c'deki hallerde mümkün olacağı ve safi eğilme formüllerinde de iç eksen uzunluklarının



Şekil 3. Bileşik yüklemeye maruz halka sektörü

dış eksen uzunluklarının k katı olduğunun dikkate alınması gerektiği hatırlatılmalıdır. Buna göre ilk yaklaşım olarak kesitte $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}, \sigma_r, \sigma_\theta$ ve σ_z gerilmeleri mevcut olacaktır. Pala (1996) daki sonuçlar bu hal için uygun tarzda yazılıp mevcut sonuçlarla birleştirilerek,

$$\begin{aligned}
 \sigma_\xi &= \frac{2M_0}{\Pi R a^3 b^3 (1 - k^4)} (b^2 \xi^2 + a^2 \zeta^2 - a^2 b^2) + \frac{M}{\Pi b a^3 (1 - k^4)} (\mu_1^2 \xi^2 + \mu_2^2 \zeta^2 - \mu_3^2) \\
 \sigma_\zeta &= \frac{M_0 A_0}{8 \Pi (1 - k^4) b a^3 R} (\mu_4^2 \xi^2 + \mu_5^2 \zeta^2 - \mu_6^2) \\
 \tau_{\xi\zeta} &= \frac{M_0 A_0 b}{4 \Pi (1 - k^4) R a^5} \xi \zeta \\
 \sigma_\theta &= \frac{M_0}{\Pi (1 - k^4) (1 - k^2) b^2 a^4} \left[c_1 \left[(k^4 - 1) b a^3 + 4(1 - k^2) a b \xi^2 \right] + c_2 \left[(k^4 - 1) a b^3 + 4a b (1 - k^2) \zeta^2 \right] \right] \\
 (\tau_{r\theta})_0 &= \frac{-2Gb^2 c}{(a^2 + b^2)} \xi \\
 (\tau_{\theta\zeta})_0 &= \frac{-2Ga^2 c}{(a^2 + b^2)} \zeta
 \end{aligned} \quad (40)$$

gerilme bileşenleri elde olunur. Burada

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 &= (k^2 + 1)a^2b^2, & \mu_2^2 &= 6k^2a^2b^2, & \mu_3^2 &= 2k^4a^4b^2, \\
\mu_4^2 &= 6k^2b^4 & \mu_5^2 &= 2k^4a^2b^4 \\
A_0 &= \frac{-8[zb^2 + (1+\nu)a^2]}{(1+\nu)b^2[3k^2(b^4 + a^4) + 2k^2a^2b^2]} \\
c_0 &= \frac{-1(1+k^2)}{4}[c_1a^2 + c_2b^2] \\
c_1 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{(2+\nu)\mu_1^2 + (1+\nu)\mu_2^2 + \mu_4^2}{16}A_0 + \left[(2+\nu) + (1+\nu)\frac{a^2}{b^2}\right]\right] \\
c_2 &= -\frac{a^2}{2b^2} - \frac{A_0}{32}[(2+\nu)\mu_1^2 + (1+\nu)\mu_4^2 + \mu_2^2]
\end{aligned} \tag{41}$$

dır.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada kesiti konfokal elipslerden ibaret bir halka sektörü gözönüne alınarak iç gerilme analizi yapılmıştır. Sınır şartlarının sağlanması zorluğu, ancak aynı eksenli konfokal elipsler halinde çözüm vermeyi mümkün kılmıştır.

Metod, bu yönüyle, keyfi eksen uzunluğunu haiz iç eliptik boşluk hali ile keyfi yönelimli eliptik boşluk tasvir edememektedir. Bilahare, bu meyanda yeni bir çalışma düşünülebilir. Safi burulma hali için elde edilen sonuçlar birinci mertebeye kadar süperpoze edilmek suretiyle eğilme ve burulma şeklinde bir bileşik yüklemeye maruz dirsek elemanın iç gerilme dağılımı elde olunmaya çalışılmıştır.

Sonuçların pratikle uyum halinde olup olmadığı başka bir makalede incelenecektir. Elde edilen sonuçlarda $a = b$ konulmak suretiyle konsentrik daireler hali için de çözüm elde olunabilir. Kesitin eliptik seçilme nedenlerinden birisi, özellikle eğilmede oldukça bariz bir şekilde kendini gösteren boğaz bölgesindeki ovalleşmenin gerilme dağılımı üzerindeki etkisini incelemektir.

Gerçektende, eğilme ve burulmaya maruz dairesel kesitli dirsek elemanın boğaz bölgesinin kesiti daireden ayrılarak yaklaşık olarak bir elips şeklini alır. Bu halde, bu bölgeye yakın kısımlarda eliptik kesitler için elde olunan formüller kullanılabilir.

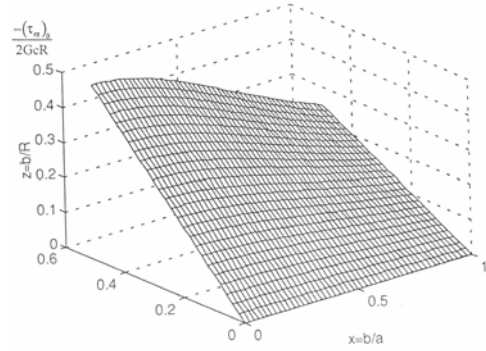
Şüphesiz bu durumda, kesitin asal eksen uzunlukları deneysel olarak ölçülüp denklemlere yerleştirilmelidir.

$x = b/a$, $y = \xi/R$, $z = \zeta/R$ olmak üzere,

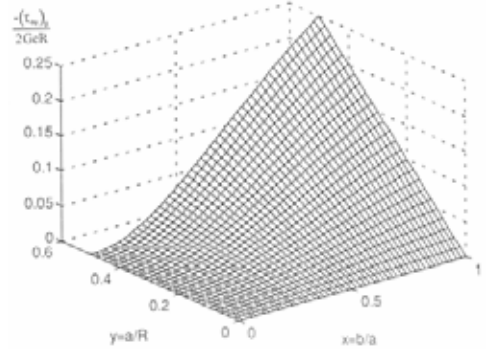
$(\tau_{r\theta})_0$, $(\tau_{\theta z})_0$ ve $(\tau_{r\theta})_1$ ve $(\tau_{\theta z})_1$ gerilmeler için

$$\begin{aligned}
-\frac{(\tau_{rz})_0}{2GcR} &= \frac{z}{(1+x^2)} & -\frac{(\tau_{\theta z})_0}{2GcR} &= \frac{x^2}{1+x^2}y \\
-\frac{(\tau_{r\theta})_1}{2GcR} &= \frac{1}{(1+x^2)}\left[(1+2y) + \frac{2y}{3+x^2}\right]z \\
-\frac{(\tau_{\theta z})_1}{2GcR} &= \frac{x^2}{(1+x^2)}\left[(1+2y)y + \frac{3x^2}{2(3x^2+1)}\left[3y^2 + \frac{z^2}{x^2} - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right]\right]
\end{aligned}$$

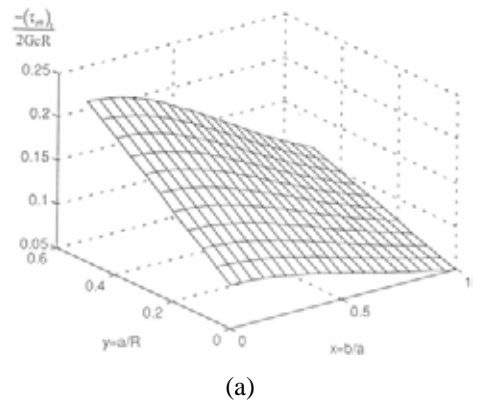
şeklinde boyutsuz denklemler elde ederiz. Bu ifadelerin üç boyutlu profiller halinde çizim Şekil 4, 5, 6, 7' de görülmektedir.



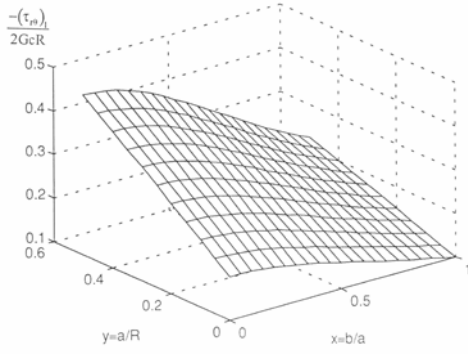
Şekil 4. $(\tau_{rz})_0$ nin değişimi



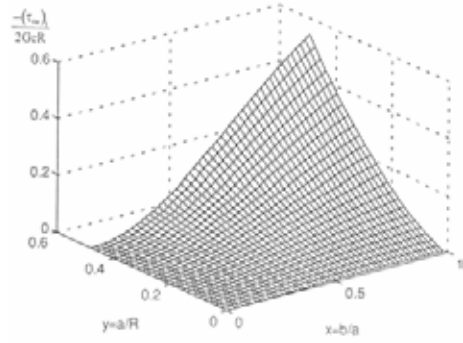
Şekil 5. $(\tau_{\theta z})_0$ in değişimi



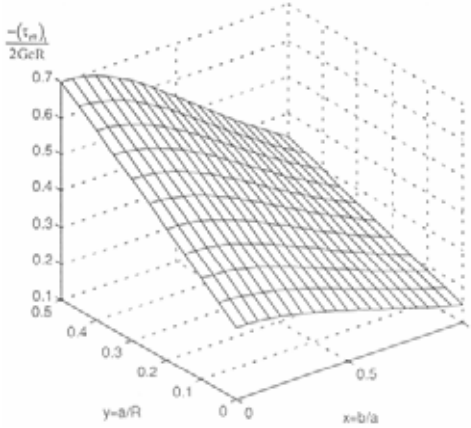
(a)



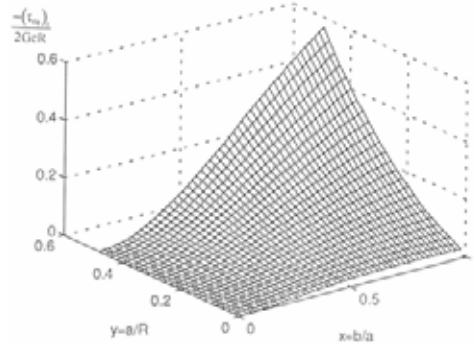
(b)



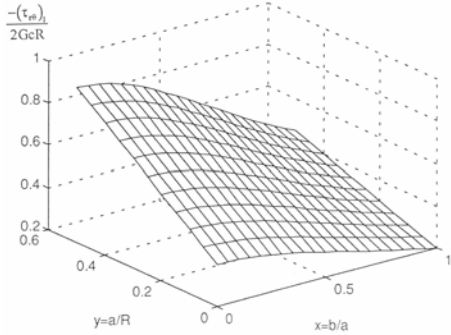
(b)



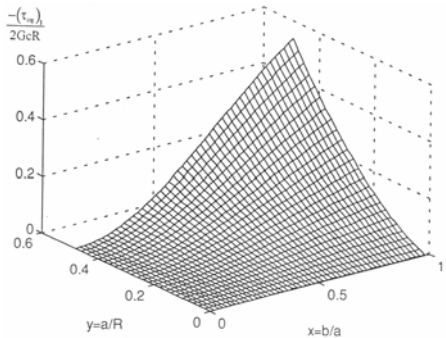
(c)



(c)



(d)

Şekil 6. $(\tau_{r\theta})_1$ in sırasıyla $z=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ için değişimi

(a)

Şekil 7. $(\tau_{\theta z})_1$ in sırasıyla $z=0.1, 0.2, 0.3$ için değişimi

Şekil 4'de $(\tau_{r\theta})_0$ nun b/a ve $z=b/R$ ile değişimi görülmektedir. Gerilme z ile önemli ölçüde artarken bu artış x in büyümesiyle düşmektedir. $(0,0)$ noktası dek kesit haline tekabül etmektedir. Şekil 5'de $(\tau_{\theta z})_0$ in b/a için dek toroidal halkaya tekabül etmektedir. Bu durumda gerilmenin y ye bağlı olmadığı görülmektedir. b/a nın büyük değerleri için a/R ile önemli ölçüde artmaktadır. Şekil 6'a da $z = 0.1$ için $(\tau_{r\theta})_1$ in grafiği görülmektedir. Gerilme x ile düşerken y ile artmaktadır. Ancak, gerilmenin y ye bağlılığı x in artışıyla birlikte azalmaktadır. Şekil 6. a, b, c ve d' de z nin sırasıyla $z=0.1, 0.2, 0.3$ ve 0.4 değerleri için çizilmiştir. Gerilmenin z nin lineer artışı karşısında lineer olarak artmadığı ve gittikçe z den bağımsız hale geleceği açıktır.

Şekil 7. a, b ve c' de $(\tau_{\theta z})_1$ nin $z = 0.1, 0.2$ ve 0.3 için çizilmiş grafikleridir. Yine gerilmenin y artışına olan bağımlılığı x ile artmaktadır. Her üç grafikten de $(\tau_{\theta z})_1$ nin $z=s/R$ ye hemen hemen hiç bağlı olmadığı görülmektedir.

4. REFERANSLAR

Clark, R.A., and Reissner, E., 1951. Bending of Curved Tubes, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 2, pp. 93-122.

Göhner., O.I. 1930. *Ingenieur-Archiv*. Vol:1, pp.619.

Lang, H.A., 1986. Pure Bending of Elliptical Ring Sector, *Journal of Applied Mechanics*, Vol:49, pp. 456-458.

Pala, Y. 1996. "Pure Bending of Elliptical Ring Sector With Cross-section of Multiply-Connected Region Composed of Confocal Ellipses", *Journal of Mechanics and Material, JSME*, Vol : 39, No:1, Series A. pp. 55-59.

Reissner, E., 1959. On Finite Bending of Pressurized Tubes, *Transactions of ASME*, pp. 386-392.

Timoshenko, S. and Goodier, J. M. 1951. Theory of Elasticity, 2nd. Edition, McGrawHill, pp. 395.

Thuloup, M. A. 1928. Fatigue des Tuyaux Minces, *Bulletin de L'Association Tech. Maritime et Aéronatique*, Vol. 32, pp. 643- 680.

Von Karman, Th., 1911. Über die Formänderung Dünnwandiger Rohre, Insbesondere Fedender Ausgleich Srohre, *Z. Verdeut. Ing.*, 55, pp.1889-1895.