



DÜZGÜN YAYILI YÜKE MARUZ ORTOTROPİK KOMPOZİT ANKASTRE KİRİŞTE SEHİM HESABI

Alaattin AKTAŞ, Cemil TANIK

Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Kırıkkale

ÖZET

Bu çalışmada T300/976 Grafit-Epoksi ve Karbon-Epoksi malzemeden yapılan, yayılı yüke maruz bir ortotropik kompozit ankastre kiriş göz önüne alınmıştır. Bu kirişin sehiminin analitik ve sonlu elemanlar çözümü yapılmış, bu çözümler karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminin uygulanmasında Ansys 50a programı kullanılmıştır. Hesaplamalar fiber doğrultusu 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° için yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sehim, Ankastre kiriş, Anizotropik levha

CALCULATING DEFLECTION OF THE ORTHOTROPIC COMPOSITE CANTILEVER SUBJECTED TO A UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

ABSTRACT

In this study, an orthotropic composite cantilever, which is made of T300/976 Grafit-Epoxy and Carbon-Epoxy materials subjected to a uniformly distributed load, is considered. The deflection of this cantilever is calculated by finite element method and calculated analytically. These results are compared. For finite element calculation, Ansys 50a program is used. The calculations are made for 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° of fiber directions.

Key Words : Deflection, Cantilever, Anisotropic plate

1. GİRİŞ

Günümüzde düşük özgül ağırlığa karşılık yüksek mukavemet ve korozyona dayanıklılığı nedeniyle kompozit malzemeler; uçaklarda, uzay araçlarında ve inşaat yapılarında metal malzemelere nazaran daha fazla tercih edilmektedir (Chang ve Richard 1982; Aktaş ve Karakuzu 1998).

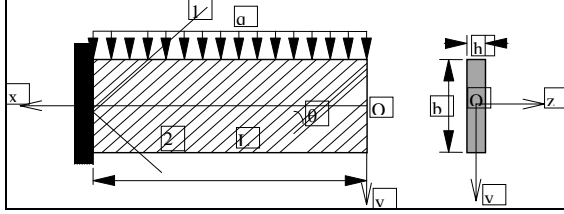
Son zamanlarda yaygın olarak kullanılan kompozit kirişler kullanıma alanı nedeniyle büyük önem kazanmıştır. Bu nedenle birçok araştırmacı kompozit kirişler üzerinde çalışmıştır. Karakuzu ve Özcan (1996) bir ankastre kirişteki gerilmelerin anizotropik elastisite çözümünü farklı yüklemeler için bulup, kirişin elasto-plastik gerilme analizini yapmıştır. Barbero ve ark., (1993) I profilli bir

kirişin kesme-düzeltilme faktörünü ve sehimini sonlu elemanlar metoduyla kirişin kesit boyutlarını değiştirerek hesaplamıştır.

Genellikle kirişlerin kullanıldığı tüm yapılarda kirişlerin çökmesi istenmeyen bir durumdur. Çökmenin önlenmesi için onun sehim değerinin bilinmesi gerekir. Bu öneminden dolayı, çalışmada bir ankastre kompozit kirişin sehim denkleminin anizotropik elastisite çözümü yapılarak, kirişin maksimum sehimini farklı iki kompozit malzeme kullanılarak bulunmuştur. Elde edilen çözüm aynı malzemeler kullanılarak sonlu elemanlar metoduyla da hesaplanıp, bulunan bu iki çözüm karşılaştırılmıştır. Maksimum sehim fiber doğrultusu 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° için hesaplanmıştır.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI VE KİRİŞİN SEHİMİNİN BULUNMASI

Bu çalışmada düzgün yayılı yüke maruz L uzunluğunda, b yüksekliğinde ve h genişliğinde bir kompozit ankastre kiriş gözönüne alınmıştır (Şekil 1). θ açısı x eksenine fiber doğrultusu arasındaki açı olup, gerilme-uzama bağıntısı aşağıdaki gibi verilir (Lekhnitskii, 1968; Jones, 1975).



Şekil 1. Yayılı yüke maruz kompozit ankastre kiriş

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\quad (1)$$

Burada;

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left[\frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \frac{x}{b} \left(1 - \frac{12y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} \right) \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{4y}{5b} \right) \right] \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2h} \left(-1 + \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{qa_{16}}{ha_{11}} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

(5) denklemleri (1) denkleminde yerine konup, bu denklemler $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ denkleminde eşitlenir ve x'e

$$\begin{aligned}u &= -\frac{a_{12}qx}{2h} - \frac{a_{16}qx^2}{4bh} + \frac{9a_{12}qxy}{10bh} + \frac{a_{16}^2qxy}{5a_{11}bh} - \frac{3a_{66}qxy}{10bh} - \frac{2a_{11}qx^3y}{b^3h} - \frac{3a_{16}qx^2y^2}{b^3h} + \frac{2a_{12}qxy^3}{b^3h} \\ &\quad - \frac{4a_{16}^2qxy^3}{a_{11}b^3h} + \frac{2a_{66}qxy^3}{b^3h} + g(y)\end{aligned}\quad (6)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer düşünceyle (5) denklemleri (1) denkleminde yerine konup, bu denklemler $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ denkleminde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

olarak verilir.

Eğer $\cos(\theta) = m$ ve $\sin(\theta) = n$ ile gösterilirse a_{ij} katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}a_{11} &= s_{11}m^4 + (2s_{12} + s_{66})m^2n^2 + s_{22}n^4 \\ a_{12} &= s_{12}(m^4 + n^4) + (s_{11} + s_{22} - s_{66})m^2n^2 \\ a_{22} &= s_{11}n^4 + (2s_{12} + s_{66})m^2n^2 + s_{22}m^4 \\ a_{16} &= (2s_{11} - 2s_{12} - s_{66})m^3n - (2s_{22} - s_{12} - s_{66})mn^3 \\ a_{26} &= (2s_{11} - 2s_{12} - s_{66})n^3m - (2s_{22} - s_{12} - s_{66})nm^3 \\ a_{66} &= 2(2s_{11} + 2s_{22} - 4s_{12} - s_{66})m^2n^2 - s_{66}(m^4 + n^4)\end{aligned}\quad (3)$$

Burada;

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}, s_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, s_{22} = \frac{1}{E_2}, s_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (4)$$

dir.

Yayılı yüke maruz kompozit ankastre kirişteki gerilmeler aşağıdaki gibi verilmiştir. (Lekhnitskii, 1968; Karakuzu, 1996)

göre integre edilirse x yönündeki yerdeğiştirme fonksiyonu,

eşitlenir ve y'ye göre integre edilirse y yönündeki yer değıştirme fonksiyonu

$$v = -\frac{a_{22}qy}{2h} + \frac{a_{12}a_{16}qxy}{a_{11}bh} - \frac{3a_{26}qxy}{2bh} - \frac{3a_{12}^2qy^2}{10a_{11}bh} + \frac{3a_{12}a_{16}^2qy^2}{5a_{11}^2bh} + \frac{3a_{22}qy^2}{4bh} - \frac{a_{16}a_{26}qy^2}{2a_{11}bh} - \frac{3a_{12}a_{66}qy^2}{20a_{11}bh} - \frac{3a_{12}qx^2y^2}{b^3h} - \frac{4a_{12}a_{16}qxy^3}{a_{11}b^3h} + \frac{2a_{26}qxy^3}{b^3h} + \frac{a_{12}^2qy^4}{a_{11}b^3h} - \frac{2a_{12}a_{16}^2qy^4}{a_{11}^2b^3h} - \frac{a_{22}qy^4}{2b^3h} + \frac{a_{12}a_{26}qy^4}{a_{11}b^3h} + \frac{a_{12}a_{66}qy^4}{2a_{11}b^3h} + f(x) \quad (7)$$

olarak bulunur. v'yi bulmak için f(x)'in bulunması gereklidir. Bunun için (1) denklemindeki γ_{xy} ile eşitlenirse

$$\gamma_{xy(1)} - \gamma_{xy(2)} = \frac{a_{26}q}{2h} + \frac{9a_{12}qx}{10bh} - \frac{4a_{16}^2qx}{5a_{11}bh} + \frac{6a_{66}qx}{5bh} - \frac{2a_{11}qx^3}{b^3h} + \frac{8a_{12}a_{16}qy}{5a_{11}bh} - \frac{6a_{16}^3qy}{5a_{11}^2bh} - \frac{3a_{26}qy}{bh} - \frac{13a_{16}a_{66}qy}{10a_{11}bh} - \frac{8a_{12}a_{16}qy^3}{a_{11}b^3h} + \frac{8a_{16}^3qy^3}{a_{11}^2b^3h} + \frac{4a_{26}qy^3}{b^3h} - \frac{6a_{16}a_{66}qy^3}{a_{11}b^3h} + f'(x) + g'(y) = 0 \quad (8)$$

bulunur. Bulunan bu son denklem 0 (sıfır)'a eşit olduğundan x'e bağlı terimlerin toplamı ile y'e bağlı terimlerin toplamı ayrı ayrı birer sabit sayıya eşit olması gerekir. c ve d sabitler olmak üzere

$$A(x) + f'(x) = c \\ B(y) + g'(y) = d \quad (9)$$

Burada A(x) x'li terimlerin, B(y) y'li terimlerin toplamıdır.

$$A(x) + f'(x) = c \quad (10)$$

olduğuna göre,

$$c = -\frac{(9a_{11}a_{12}b^2Lq - 8a_{16}^2b^2Lq - 12a_{11}a_{66}b^2Lq + 20a_{11}^2L^3q)qx^2}{10a_{11}b^3h} \quad (13)$$

elde edilir. (13) denklemini şehim denkleminde yerine konursa sadece d sabiti bilinmiyen olarak kalır. Ankastre kirişte x = L, y = 0 noktasında v = 0

$$d = -\frac{(9a_{11}a_{12}b^2L^2q - 8a_{16}^2b^2L^2q + 12a_{11}a_{66}b^2L^2q + 20a_{11}^2L^4q)}{20a_{11}b^3h} \quad (14)$$

bulunur. Bu değer de şehim denkleminde yerine konursa şehim denklemini;

$$v = -\frac{9a_{12}L^2q}{20bh} + \frac{2a_{16}^2L^2q}{5a_{11}bh} - \frac{3a_{66}L^2q}{5bh} + \frac{3a_{11}L^4q}{2b^3h} + \frac{9a_{12}Lqx}{10bh} - \frac{4a_{16}^2Lqx}{5a_{11}bh} + \frac{6a_{66}Lqx}{5bh} - \frac{2a_{11}L^3qx}{b^3h} - \frac{9a_{12}qx^2}{20bh} + \frac{2a_{16}^2qx^2}{5a_{11}bh} - \frac{3a_{66}qx^2}{5bh} + \frac{a_{11}qx^4}{2b^3h} - \frac{a_{22}qy}{2h} + \frac{a_{12}a_{16}qxy}{a_{11}bh} - \frac{3a_{26}qxy}{2bh} - \frac{3a_{12}^2qy^2}{10a_{11}bh} + \frac{3a_{12}a_{16}^2qy^2}{5a_{11}^2bh} + \frac{3a_{22}qy^2}{4bh} - \frac{a_{16}a_{26}qy^2}{2a_{11}bh} - \frac{3a_{12}a_{66}qy^2}{20a_{11}bh} - \frac{3a_{12}qx^2y^2}{b^3h} - \frac{4a_{12}a_{16}qxy^3}{a_{11}b^3h} + \frac{2a_{26}qxy^3}{b^3h} + \frac{a_{12}^2qy^4}{b^3h} - \frac{2a_{12}a_{16}^2qy^4}{a_{11}^2b^3h} - \frac{a_{22}qy^4}{b^3h} + \frac{a_{16}a_{26}qy^4}{a_{11}b^3h} + \frac{a_{12}a_{66}qy^4}{2a_{11}b^3h} \quad (15)$$

$$f(x) = \int [c - A(x)] dx \quad (11)$$

dir. Buradan;

$$f(x) = -\frac{(9a_{11}a_{12} - 8a_{16}^2 + 12a_{11}a_{66})qx^2}{20a_{11}bh} + \frac{a_{11}qx^4}{2b^3h} - cx + d \quad (12)$$

bulunur. f(x) değeri (7) denkleminde yerine konursa ankastre kirişin denklemini c ve d sabitlerine göre bulunmuş olur.

x = L, y = 0 noktasında $\frac{dv}{dx} = 0$ sınır şartı şehim denkleminde uygulanırsa c sabiti,

olduğundan bu değerler şehim denkleminde yerine konursa:

olarak bulunur. Ankastre kirişin simetri eksenindeki şehim denklemini bulmak için bu son denklemde

$$v = \frac{3q}{20bh} \left(-3a_{12} + \frac{8}{3} \frac{a_{16}^2}{a_{11}} - 4a_{66} \right) (x-L)^2 + \frac{a_{11}q(3L^4 - 4L^3x + x^4)}{2b^3h} \quad (16)$$

olarak bulunur.

3. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

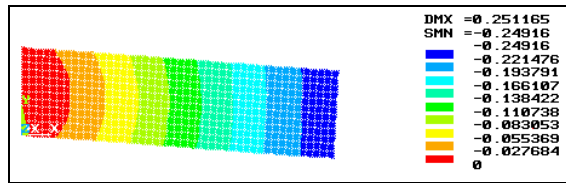
Sonlu elemanlar çözümü ile analitik çözümü karşılaştırmak için $L = 150\text{mm}$, $b = 40\text{ mm}$, $h = 1\text{ mm}$, $q = 2\text{N/mm}$ ve fiber doğrultusu sırayla 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° ve 90° olarak alınmıştır. Ankastre kirişin şehim değeri T300/976 Grafit-Epoksi ve Karbon-Epoksi malzemeleri için ayrı ayrı hesaplanmıştır. T300/976 Grafit-epoksi malzemesinin malzeme özellikleri Larry (1995)'den alınmış, CYTEC Aerospace (İngiltere)'den temin edilen karbon epoksi malzemesinin malzeme özellikleri ise çekme cihazı ve strain gauge yardımıyla bulunmuştur (Tablo 1).

Tablo 1. T300/976 Grafit-Epoksi ve Karbon-Epoksi Malzemelerinin Malzeme Özellikleri

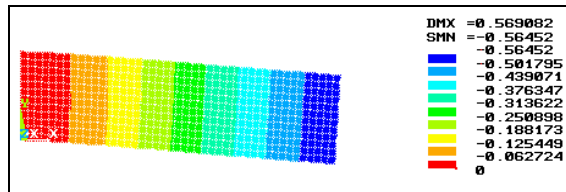
	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
T300/976 Grafit-Epoksi	156	13	7	0.23
Karbon-Epoksi	60.2	59.2	3.91	0.25

Problemin modellenmesi ve çözümü Ansys 50a'da yapıp modelde 540 eleman 1735 düğüm, eleman olarak da 8 düğümlü Shell 91 elemanı kullanılmıştır (Ansys User's Manual). Problemin sonlu elemanlar çözümü her iki malzeme için Şekil. 2-15'te gösterilmiştir.

Sonlu eleman ve anizotropik elastisite çözümü her iki malzeme için $x = 0$, $y = 0$ noktasının şehimi fiber açısına göre Şekil 16 ve Şekil 17'de grafik olarak verilmiştir.

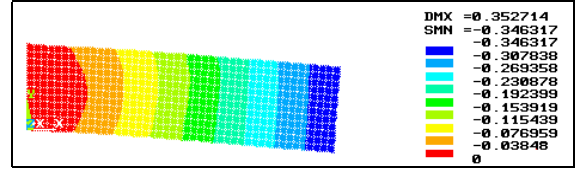


Şekil 2. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta = 0^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü

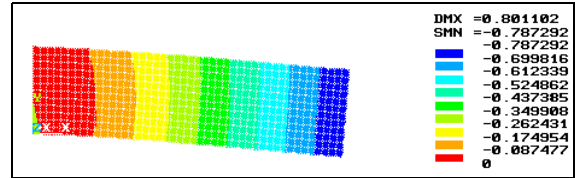


Şekil 3. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta = 0^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü

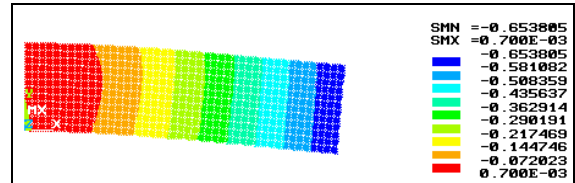
$y = 0$ konup, gerekli sadeleştirmeler yapılsa simetri eksenine ait şehim denklemi,



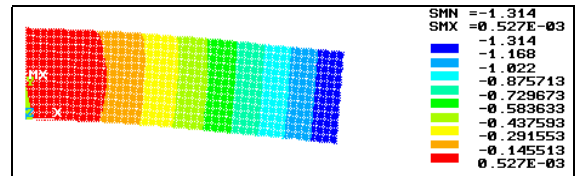
Şekil 4. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta = 15^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü.



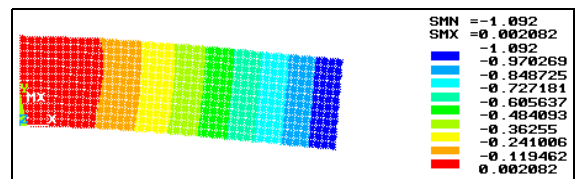
Şekil 5. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta=15^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü.



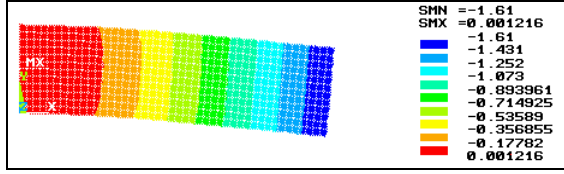
Şekil 6. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta=30^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



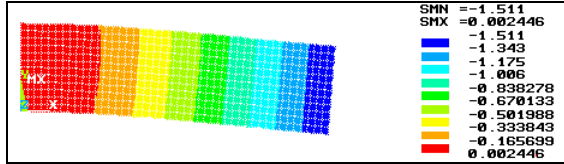
Şekil 7. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta = 30^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



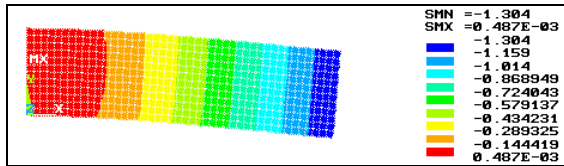
Şekil 8. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastre kirişin $\theta = 45^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



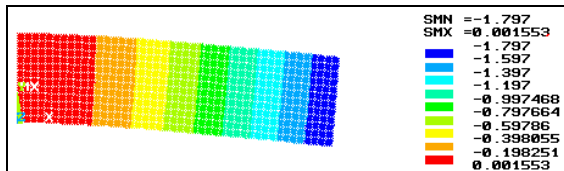
Şekil 9. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 45^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



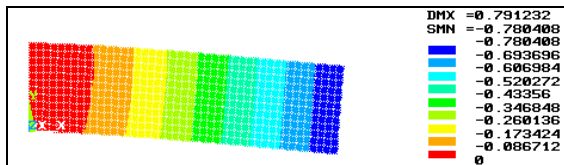
Şekil 10. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 60^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



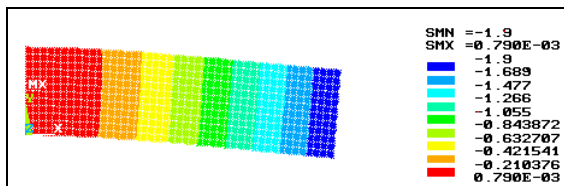
Şekil 11. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 60^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



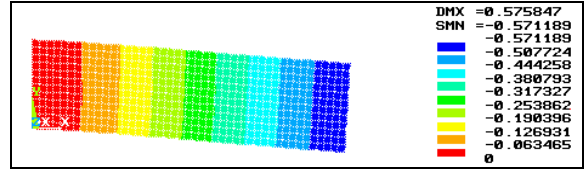
Şekil 12. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 75^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



Şekil 13. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 75^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



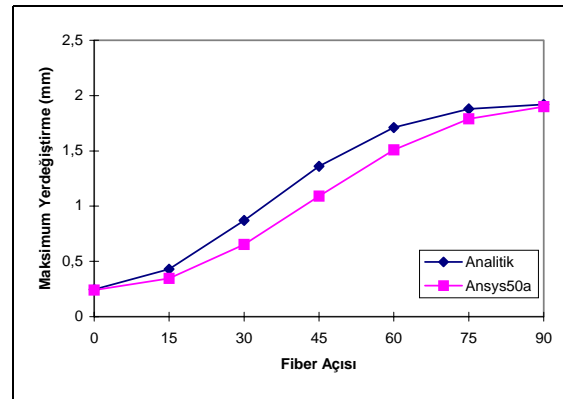
Şekil 14. T300/976 Grafit-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta=90^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü



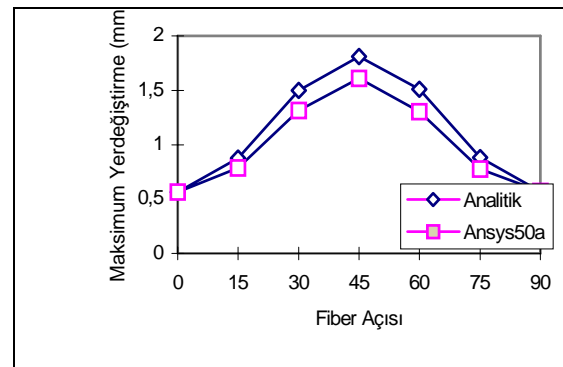
Şekil 15. Karbon-Epoksi malzemesinden yapılan ankastr kirişin $\theta = 90^\circ$ için sonlu eleman modeli ve çözümü

4. SONUÇLAR

Şekil 16. ($E_1 > E_2$) ve Şekil 17. ($E_1 \cong E_2$)'de kirişin ucundaki şehim fiber açısına bağlı olarak verilmiştir. Her iki durumda sonlu eleman ve anizotropik elastisite çözümü birbirine yakın bulunmuştur.



Şekil 16. T300/976 Grafit-Epoksi kirişin analitik ve sonlu eleman çözümünün karşılaştırılması



Şekil 17. Karbon-Epoksi kirişin analitik ve sonlu eleman çözümünün karşılaştırılması

$E_1 > E_2$ durumunda $\theta = 90^\circ$ 'de eğilme rijitliği düşük olduğundan bu açıda şehim maksimum olmaktadır.

$E_1 \cong E_2$ olması durumunda $\theta = 0^\circ$ ve $\theta = 90^\circ$ 'lerde eğilme rijitliği yaklaşık aynı olduğundan kirişin şehimi de yaklaşık aynıdır. Buna karşılık $\theta=45^\circ$ 'de kirişin eğilme rijitliği en düşük seviyesindedir. Bu yüzden şehim bu açıda maksimum olmaktadır.

Kompozit ankastre kiriş kullanılan yapılarda sehimin istenilmediği durumlarda, $E_1 > E_2$ için $\theta = 0^\circ$ ve $E_1 = E_2$ olduğu durumlarda ise $\theta = 0^\circ$, $\theta = 90^\circ$ alınmalıdır.

5. KAYNAKLAR

Aktaş, A. and Karakuzu, R. 1998. "Mechanics of Composite Materials and Structures NATO Advanced Study Institute. Portugal" Failure Analysis of Two dimensional Carbon-Epoxy Composite Plate Pinned-Joint, 12-24 July 1998 Portugal, Vol. 3, 381-397

DeSalvo, G. J. And R. W. Gorman. 1989. ANSYS User's Manual. Revision 50a Houston, PA: Swanson Analysis Systems, Inc.

Ever J. Barbero, Roberto Lopez-Anido, ve Julio F. Davalos. 1993. On the Mechanics of Thin-walled Laminated Composite Beams. Journal of Composite

Materials. 27. 806-829.

Fu-Kuo Chang, Richard A. Scott ve George S. Springer. 1982. Strength of Mechanically Fastened Composite joints Journal of Composite Materials. 16. 470-494.

Jones, R. M. 1975. Mechanics of Composite Materials. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.

Karakuzu, R. Ve Özcan, R. 1996. Exact Solution of Elasto-Plastic Stresses in a Metal Matrix Composite Beam of Arbitrary Orientation Subjected to Transverse Loads. Composites Science and Technology. 56. 1383-1389

Larry, B. L., Mahmood, M. 1995. Two Dimensional Modeling of Composite Pinned-Joint Failure. Journal of Composite Materials.

Lekhnitskii, S. G. 1968. Anisotropic Plates. Gordon and Breach Science Publishers. New York.