



# METAL MATRİSLİ DAİRESEL DELİKLİ KOMPOZİT LEVHALARDA ARTIK GERİLMELERİN ANALİZİ

**Muzaffer TOPCU , Ayşe ÖNDÜRÜCÜ , Harun KARAKAYA**

Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli  
Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Isparta

Geliş Tarihi : 10.05.1999

## ÖZET

Bu çalışmada düzgün yayılı çekme kuvvetlerine maruz dairesel delikli kompozit levhalarda sonlu eleman yöntemiyle elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Çözümde dokuz düğümlü dikdörtgen izoparametrik elemanlar kullanılmıştır. 0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit levhalarda farklı delik çapları için delik civarındaki artık gerilme değişimleri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Elasto-plastik gerilme analizi, Sonlu elemanlar metodu, Kompozit malzemeler, Delikli levha

## ANALYSIS OF RESIDUAL STRESS IN THE METAL MATRIX COMPOSITE PLATES WITH CIRCULAR HOLES

### ABSTRACT

In this study, elasto-plastic stress analysis have been made for metal matrix composite plates containing a central hole subjected to uniaxial tension under various uniformly distributed loads. In the solution, isoparametric rectangular elements with nine nodes have been used. In the reinforcement angles 0 and 90 degrees for different diameters of the holes in the vicinity of the holes residual stress variations have been investigated.

**Key Words:** Elasto-plastic stress analysis, Finite element method, Composite materials, Plate with holes

### 1. GİRİŞ

Eksenel yönde kuvvet taşıyan ve iki boyutu yanında üçüncü boyutu çok küçük olan elemanlar levha olarak adlandırılır.

Günümüzde çeşitli makine ve imalat sanayide yaygın olarak kullanılmakta olan metaller ile metal matrisli kompozit malzemeler akma sınırı üzerindeki yüklemelerde ve şekil değiştirmeler esnasında elasto-plastik davranış gösterir. Kesitte meydana gelen düzgün olmayan şekil değiştirme nedeni ile makine parçalarında artık gerilmeler oluşur.

Delikli levhalarda elasto-plastik gerilme analizi birçok araştırmacı tarafından ele alınıp incelenmiştir: Theocaris ve Marketos (1964) ortasında delik bulunan ve iki ucundan çekilen düzlem levha

problemlerini ele alarak elektriksel analogi metodu ile elasto-plastik gerilme analizi yapmışlardır. Marcal ve King (1967) iki boyutlu gerilme sistemlerinde Prantl-Reuss denklemleri ile Von-Mises akma kriterini kullanarak artımlı elasto-plastik gerilme analizini tanımlayan bir metot vermişlerdir. Gerhardt (1984) düzlem halde elips ve dairesel delikli anizotrop levhalar için sonlu elemanlar metodu ile gerilme analizi yapmıştır. Jeronimidis ve Parkyn (1988) APC-2 çapraz takviye edilmiş levhalardaki artık gerilmeleri araştırarak teorik hesaplamalarla deneysel tekniklerden elde edilen artık gerilmeleri kıyas etmişlerdir. Topcu (1991) zincir yan plakalarında sonlu elemanlar metoduyla ve deneysel olarak elasto-plastik gerilme analizi yapmıştır. Yeh ve Krempf (1993) küçük lifli metal matris kompozitlerin artık gerilmeler üzerindeki sıcaklık değişimlerinin etkisini incelemişlerdir.

Karakuzu ve Sayman (1994) delikli ortotropik dönen disklerde sonlu elemanlar metodu kullanarak farklı oryantasyon açılarında, yarıçap ve yükleme durumlarını değiştirerek iç gerilmeleri hesaplamışlar ve plastik bölge dağılımını vermişlerdir. Topcu (1998) elasto-plastik gerilme analizi için bir bilgisayar programı vererek metal matrisli kompozit levhalar için örnek çözümler yapmıştır. Sayman (1998) enine olarak yüklenmiş paslanmaz çelik takviyeli alüminyum metal matris tabakalı plaklardaki elasto-plastik gerilme analizini incelemiştir.

Bu çalışmada, üniform yüklü çekme yüküne maruz dairesel delikli 0 ve 90 derece takviye edilmiş Al-çelik kompozit levhalar için elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Akmaya sebep olan P üniform yükleri araştırılmıştır. Levhanın d delik çapı değiştirilerek her bir yükleme durumu için delik civarında meydana gelen artık gerilmeler incelenmiştir.

## 2. ELASTO-PLASTİK PROBLEMLERİN MATEMATİK FORMÜLASYONU

Malzemenin elasto plastik durumu, belli bir gerilme değerine ulaşıldıktan sonra malzemenin gösterdiği davranışlar olarak karakterize edilir. Plastik deformasyonun başlangıcı akma kriterlerine göre belirlenir. Malzemenin akması için gerekli olan gerilmenin ( $\sigma_{ij}$ ) her istikamet ve yükleme şekli için değiştiği kabul edilir. Bu durumda,

$$f(\sigma_{ij}) = k(K) \quad (1)$$

akma denklemini ifade eder. Burada  $f(\sigma_{ij})$  bir fonksiyon; K ise deneysel olarak belirlenen malzeme sabitidir.

Başlangıç akmasından sonra malzemenin davranışı kısmen elastik kısmen de plastiktir. Gerilmenin artışı sırasında şekil değiştirme değişiminin elastik ve plastik bileşenlerden meydana geldiği kabul edilir ve t toplam, e elastik, p plastik bileşeni göstermek üzere

$$(d\varepsilon_{ij})_t = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad (2)$$

olarak ifade edilir. Plastik potansiyel olarak adlandırılan (Q) gerilme gradyanı ile plastik şekil değiştirme artımı orantılı olmalıdır:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

Burada orantı sabiti olan  $d\lambda$ 'ya plastik çarpan denir. Bu denklem akmadan sonraki plastik şekil değiştirmeyi gösterdiğinden akma şartı olarak adlandırılır.  $J_2'$  ve  $J_3'$  deviatorik gerilmenin ikinci ve üçüncü invariantı olmak üzere f ve Q her ikisi de  $J_2'$  ve  $J_3'$ 'ün fonksiyonu olduğundan her birine denk kabul edilebilir. Böyle bir kabul

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır.  $f = J_2'$  olması halinde,

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2'}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij}' \quad (5)$$

olduğundan

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \sigma_{ij}' \quad (6)$$

yazılabilir (Mendelson, 1968). Burada  $\sigma_{ij}'$  deviatorik gerilmedir. Yukarıdaki denklem Prantl-Reuss denklemi olarak bilinir. Bu denklem analitik ve nümerik olarak çözülebilir. Bu çalışmada nümerik çözüm yapılacaktır.

## 3. ELASTO-PLASTİK PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

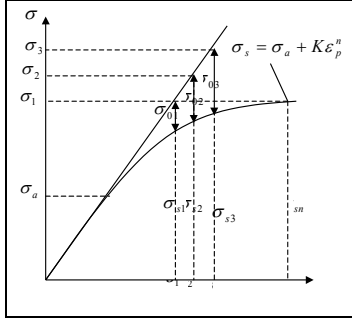
Problemin elasto-plastik gerilme analizinde nümerik çözüm yöntemlerinden (Newton-Raphson olarak tanımlanan) Başlangıç Gerilmesi Metodu kullanılmıştır. Bu metod, çekme deneyine tabi tutulan numunede meydana gelen elasto-plastik davranışı esas alarak bunu iki ve üç boyutlu problemlere uygulama imkanı sağlar. Eşdeğer gerilmeler Tsai-Hill hasar teorisine göre hesaplanmıştır (Jones, 1975). Şekil 1'de verilen Başlangıç Gerilmesi Metoduna göre lineer elastik olarak hesaplanmış  $\sigma_1$  gerilmesinin toplam deformasyonu  $\varepsilon_1$ 'dir. Elasto- plastik gerilme ( $\sigma_s$ )

$$\sigma_s = \sigma_a + K\varepsilon_p^n \quad (7)$$

olarak bilinmektedir. Burada  $\sigma_a$  akma gerilmesi ve  $\sigma_s$ 'de elasto-plastik gerilmedir Formüldeki K ve n ise sırasıyla plastik deformasyon çarpanı ve plastik deformasyon üstelidir. Tek eksenli durumda  $\sigma_1$  gerilmesine karşılık gelen  $\sigma_{01}$  başlangıç gerilmesi,

$$\sigma_{01} = \sigma_1 - \sigma_{s1} \quad (8)$$

olarak hesaplanır.



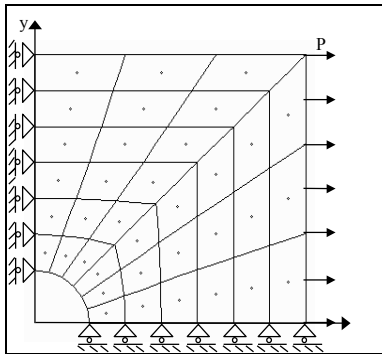
Şekil 1. Başlangıç gerilmesi metodu

Gerilme  $\Delta\sigma$  kadar arttırılarak buna karşılık gelen  $\varepsilon_2$  değeri hesaplanır.  $\varepsilon_2$ 'ye karşılık gelen gerçek gerilme ile  $\sigma_2$  arasındaki fark  $\sigma_{02}$ 'yi verir. Benzer şekilde  $\sigma_3$  ve diğer gerilmeler hesaplanır. Bu iterasyon  $\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$  farkı sıfır veya çok küçük bir değer oluncaya kadar devam eder.

#### 4. PROBLEMİN SONLU ELEMAN MODELLEMESİ VE ÇÖZÜM

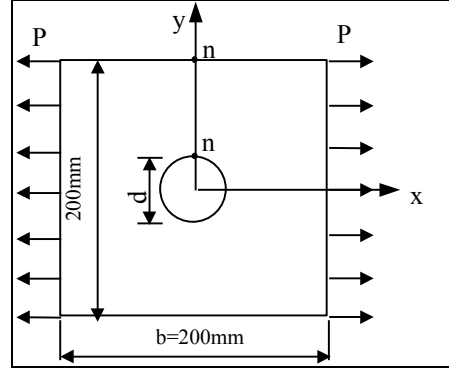
Problem düzlem levha olarak tanımlanmış olup 9 düğümlü izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılmıştır. Düzlem levha problemlerinde her düğümün iki serbestlik derecesi vardır. Problem iki eksene göre simetrik olduğu için 0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit malzemeler için levhanın 1/4'lük kısmının ele alınıp incelenmesi yeterlidir (Reddy, 1993).

Problem sonlu eleman modeli 169 düğüm ve 36 elemandan oluşmuştur (Şekil 2). Bu şekilde yapılan elastik çözüm analitik çözümle yakın değerler verdiği için düğüm sayısı bilgisayar kapasitesi ve zamandan tasarruf için çoğaltılmamıştır.



Şekil 2. Problemin sonlu eleman modeli

Levha boyutları olarak  $200 \times 200 \text{ mm}^2$  ve  $t = 5 \text{ mm}$  alınmıştır (Şekil 3).



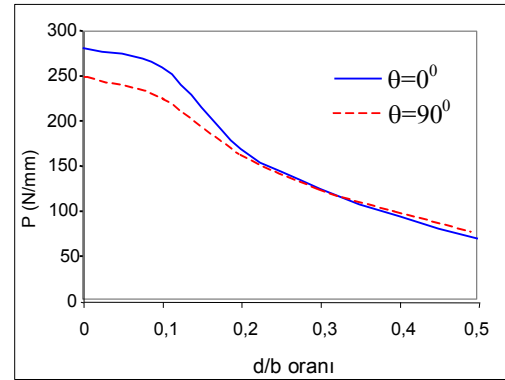
Şekil 3. Düzgün çekme yüküne maruz dairesel delikli levha

Şekil 3'de geometrisi verilen kompozit levhanın mekanik özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Çelik fiberin hacim oranı  $V_f = 0.40$  tr.

Tablo1. Al-Çelik Kompozitinin Mekanik Özellikleri

		X	Y
$E_1$	83 GPa	130 GPa	
$E_2$	56 GPa	54 GPa	
$G_{12}$	50.4 GPa	23.5 GPa	
$\nu_{12}$	0.37	270 GPa	
		n	0.63

0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit levhalar için akmaya sebep olan P yükleri araştırılmış sonuçlar şekil 4'te grafikler halinde verilmiştir. Şekil 4'te P değeri iteratif olarak arttırılmış ve ilk akmadaki kuvvet minimum kuvvet olarak alınmıştır. Daha sonra P yükü kademeli olarak arttırılmıştır.

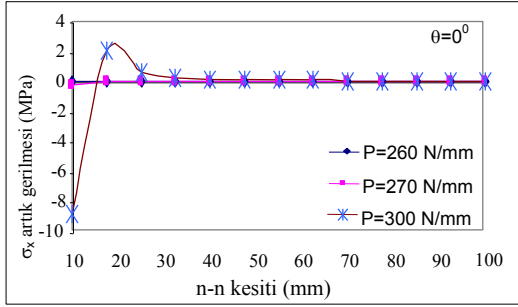


Şekil 4. Dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levhalarda akmaya sebep olan P üniform yükleri

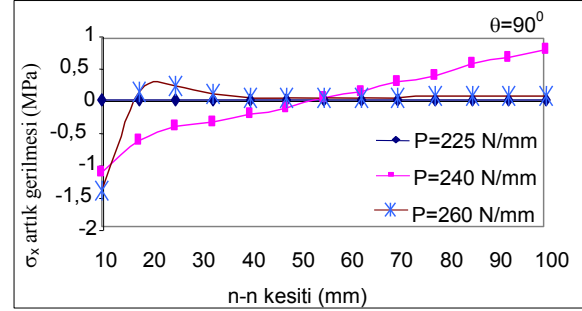
#### 5. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRME

0 ve 90 derece takviye edilmiş dairesel delikli kompozit levhalarda farklı d/b oranları için n-n kesiti boyunca artık gerilme değişimleri araştırılmıştır.

Şekil 5'te  $r = 10$  mm dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için  $\sigma_x$  artık gerilmelerinin n-n kesiti boyunca değişimi verilmiştir.  $0^\circ$  takviyeli levhada n-n kesitinde  $\sigma_x$  artık gerilmesi 15 mm'ye kadar bası, 15-30 mm arası çeki karakterli, 30 mm'den sonra sıfır olmaktadır. Bu levha



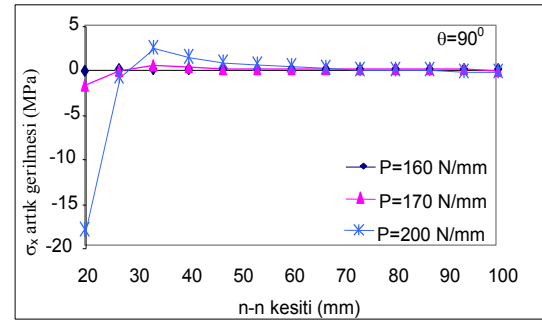
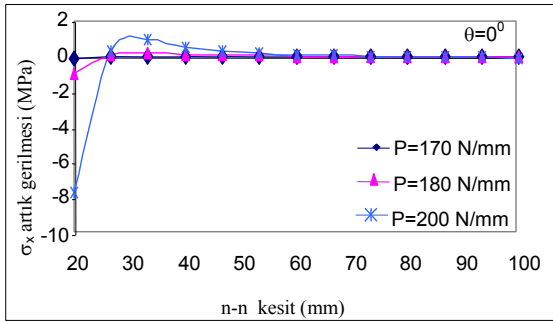
$P = 260$  N/mm'den itibaren akmaya başlamıştır.  $90^\circ$  takviyeli levha ise  $P = 225$  N/mm'de akma göstermiştir.  $P = 260$  N/mm için  $90^\circ$  takviyeli levhada meydana gelen  $\sigma_x$  artık gerilmeleri n-n kesiti boyunca 20 mm'ye kadar bası, 20 mm'den sonra çeki karakterlidir.



Şekil 5.  $r=10$ mm dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesitinde meydana gelen artık gerilmeler ( $\sigma_x$ )

Şekil 6'da  $r = 20$ mm için  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levhanın  $\sigma_x$  artık gerilmeleri  $0^\circ$  için 25mm'ye kadar bası, 25-60mm arası çeki karakterli,

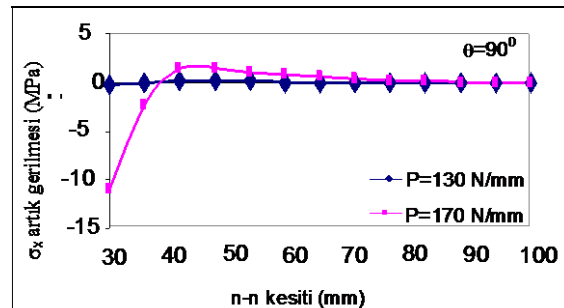
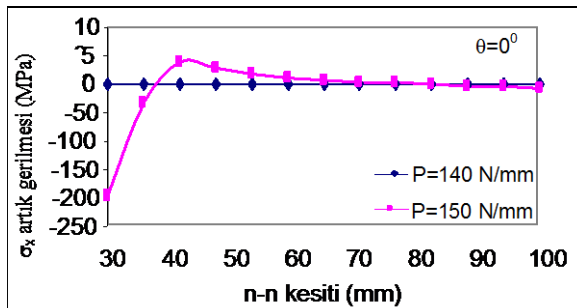
60-100mm arası sıfır olduğu görülmektedir.  $\theta = 90^\circ$  için de  $\sigma_x$  artık gerilmeleri benzer karakterdedir.



Şekil 6.  $r=20$ mm dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesitinde meydana gelen artık gerilmeler ( $\sigma_x$ )

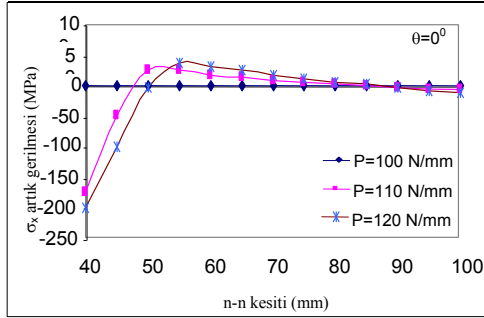
Şekil 7'de  $r = 30$ mm için  $0^\circ$  takviyeli kompozit levhada artık gerilmeler 38mm'ye kadar bası, 38-70 mm arası çeki karakterli, 70-100mm arası sıfır

olduğu gözlenmiştir.  $90^\circ$  içinde artık gerilmeler benzer karakterdedir.

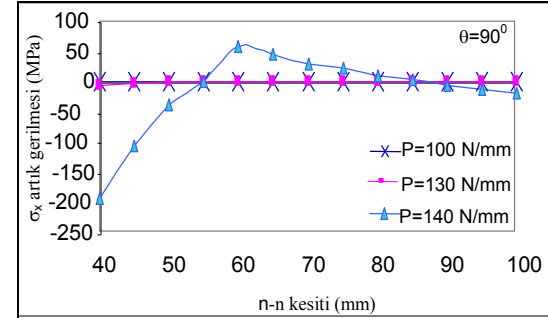


Şekil 7.  $r = 30$ mm dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesitinde meydana gelen artık gerilmeler ( $\sigma_x$ )

Şekil 8'de  $r = 40\text{mm}$  için  $\sigma_x$  'de artık gerilmelerinin 50mm'ye kadar bası, 50-80mm arası çeki karakterli, 80mm'de sıfır ve daha sonra yine bası karakterli



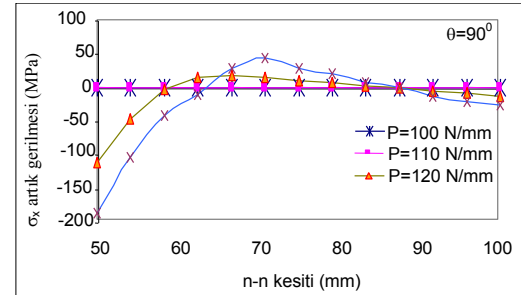
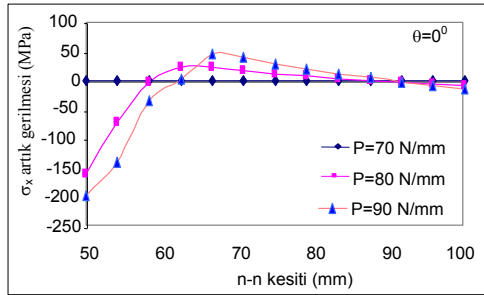
olduğu görülmektedir.  $\theta = 90^\circ$  için 55mm'ye kadar bası, 55-85 mm arası çeki, 85 mm'de sıfır ve 85-100 mm arası bası karakterlidir.



Şekil 8.  $r = 40\text{mm}$  dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesitinde meydana gelen artık gerilmeler ( $\sigma_x$ )

Şekil 9'da  $r=50\text{mm}$  için  $\theta = 0^\circ$  takviyeli levhada  $\sigma_x$  artık gerilmeleri 60mm'ye kadar bası, 60-90mm arası çeki, 90 mm'de sıfır, 90-100 mm arası bası

karakterlidir.  $\theta = 90^\circ$  için de  $\sigma_x$  artık gerilmeleri benzer karakterdedir.



Şekil 9.  $r=50\text{mm}$  dairesel delikli  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesitinde meydana gelen artık gerilmeler ( $\sigma_x$ )

Bu grafiklerden şu sonuçlar çıkarılmıştır:

- 1) En büyük artık gerilmelerin delik civarında meydana geldiği ve yüklem miktarı arttıkça artık gerilmelerde de bir artış olduğu gözlenmiştir.
- 2) Delik dibinden uzaklaştıkça artık gerilmeler aniden azalmakta ve sıfıra doğru gitmektedir.
- 3) Artık gerilmeler statik denge halinde bulunmak durumundadır. Bu açıdan kesitin belli kısmı negatif, belli kısmı pozitif işaretli olur. Negatif işaretli artık gerilmelerin tehlikeli yerde olması faydalıdır. Yani artık gerilmelerin etkiyen dış kuvvetlerin oluşturduğu gerilmelere ters yönde oluşturulmasıyla artık gerilmelerden olumlu yönde yararlanılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

Gerhardt, T. D. 1984. A Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic

Materials, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, 804-810.

Jeronimidis, G., Parkyn, A. T. 1988. Residual Stresses in Carbon Fibre-Thermoplastic Matrix Laminates, Journal of Composite Materials, Vol. 22, 401-415.

Jones, R. M., 1975. Mechanics of Composite Materials, Mc. Graw-Hill, Kogosusha Ltd

Karakuzu, R., Sayman, O. 1994. Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Orthotropic Rotating Discs with Holes, Computers and Structures, Vol. 51, 695-703.

Marcal, P. V., King, I. P. 1967. Elastic-Plastic Analysis of Two Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method, International Journal Mech. Sci., Pergamon Press Ltd., Vol. 9, 143-155.

Mandelson, A. 1968. *Plasticity: Theoty and Application*. The Macmillan Company, New York. USA.

Reddy, J. N. 1993. *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Inc., New York, USA.

Sayman, O. 1998. *Elasto-Plastic Stress Analysis in Stainless Stell Fiber Reinforced Aluminium Metal Matrix Laminated Plates Loaded Transversely*, J. Composite Structures, Vol. 43, 147-154.

Theocaris, P. S. Marketos, E. 1964. *Elasto-Plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain Hardening Material*, Journal Mech. Phys. Solids.,

Vol. 12, 377-390.

Topcu, M. 1991. *Transmisyon Zincirleri Yan Plakalarında Elasto-Plastik Gerilme Analizi*, Doktora Tezi, DEÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Bölümü, İzmir.

Topcu, M. 1998. *Elasto-Plastik Gerilme Analizi İçin Bir Paket Program*, PAÜ-Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt: 4, Sayı: 1-2, 519-525.

Yeh, N. M. Krempl, E. 1993. *The Influence of Cool-Down Temperature Histories on the Residual Stresses in Fibrous Metal-Matrix Composites*, Journal of Composite Materials, Vol. 27, 973-995.