



YAYILI KÜTLE TAŞIYAN DİKDÖRTGEN PLAĞIN SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARI

Osman KOPMAZ, Sevda TELLİ

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Görükle/Bursa

Geliş Tarihi : 20.12.2000

ÖZET

Bu çalışmada düzgün yayılı ek kütle taşıyan bir plağın doğal frekanslarının bulunması için bir metod sunulmaktadır. Polinom şeklindeki frekans denklemi, plağın hareket denkleminde standart Galerkin prosedürü uygulanarak elde edilmektedir. Analiz sonuçlarının genel uygulanabilirliğini sağlamak için eklenti kütlelerin yeri, birim alana düşen yoğunluğu ve oturma alanı ile ilgili boyutsuz parametreler tanımlanmıştır. Daha sonra en düşük üç frekansın, öneminden ötürü özellikle temel frekansın bu boyutsuz parametrelere göre değişimi incelenmiştir. Ayrıca, sayısal bir örnekle bu metodun özel bir hal olarak konsantre kütle taşıyan plakların incelenmesinde de kullanılabilirliği gösterilmiştir. Son olarak, böyle bir eklentinin konumunun ve kütlelerinin bir plağın modal yüzeyleri ve nodal çizgilerine etkisi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Dikdörtgen plak, Kısıtlı plak, Heaviside fonksiyonları, Plak frekansları, Modal yüzeyler

NATURAL FREQUENCIES OF A RECTANGULAR PLATE CARRYING A DISTRIBUTED MASS

ABSTRACT

In this paper, an analytical method is presented to find the eigenfrequencies of a plate carrying an attachment which consist of a uniformly distributed mass. The frequency equation of polynomial type is obtained by applying the standard Galerkin procedure to the equation of motion. The nondimensional parameters which are associated with the location, the area density and the distribution of the mass, are defined in order to make the analysis results generally applicable. Then, the variation of the three lowest frequencies, especially of the fundamental frequency due to its significance, with respect to these nondimensional parameters is investigated. Furthermore, it is shown by a numerical example that the method can be used to study plates with concentrated mass as a special case. Finally, the effects of the location and the mass of such an attachment on the modal surfaces and nodal lines of a plate are investigated.

Key Words : Rectangular plate, Constrained plate, Heaviside's functions, Plate frequencies, Modal surfaces

1. GİRİŞ

Asma köprü taşıyıcı halatları, makine monte edilmiş döşemeler, üzerinde taşıt veya tren katarı bulunan köprüler gibi çeşitli eklentileri (attachment) taşıyan kısıtlanmış (constrained) esnek yapılara mühendislik uygulamalarında sıkça rastlanmaktadır. Bu eklentiler genellikle ayrık (discret) sistemlerden ibarettir veya en azından böyle modellenebilir. Kısıtlı sözcüğü ise

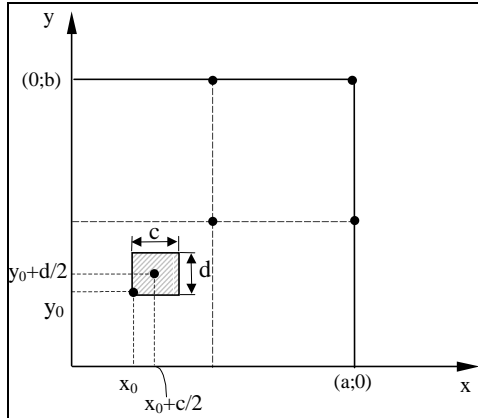
eklentilerin varlığının, orijinal taşıyıcı sistemin hareketi üzerine getirdiği kısıtlamalara işaret etmektedir. Yayılı kütle taşıyan kiriş ve çubuklara ait çalışmalar olmakla beraber (Chan and Zhang, 1995; Chan, et all. 1996; Chan et all., 1998) eklentileri haiz plaklara ilişkin çalışmalarda daha çok konsantre kütle veya tekil yaylarla donatılmış sistemler ele alınmaktadır (Rossi and Laura, 1996; Cha, 1997; Wu and Luo, 1997).

Halbuki pratikte kütleler genellikle yayılı halde bulunmaktadır. Bu çalışmada belirli bir bölgesinde yayılı kütle taşıyan bir plâğın serbest eğilme titreşimleri ve frekansları incelenmektedir. Bu amaçla iki boyutlu Heaviside fonksiyonlarına dayalı matematiksel bir model geliştirilmiş ve hareket denklemi Galerkin prosedürüyle ayrıştırılarak sistemin karakteristik denkleminde ulaşılmıştır. Matematiksel model kütleli veya konsantre kütleli plak hallerinin incelenmesine de imkan vermektedir. Ayrıca kütleli tanımlayan çeşitli boyutsuz parametrelere göre analizler yapılmış, plâğın nodal çizgileri ve modal yüzeyleri matlab ortamında grafikler şeklinde elde edilmiştir.

2. MATEMATİK MODEL VE HAREKET DENKLEMİ

Şekil 1’de gösterilen sistemdeki izotropik, dikdörtgen plâğın eni, boyu ve kalınlığı sabit ve sırasıyla a , b ve h olsun. Plak, dört kenarından basit mesnetlenmiştir.

Boyutları c ve d olan yayılı ve dikdörtgensel bir kütle plâğın üzerinde Şekil 1’de görülen tarzda yerleştirilmiştir. Kütleli, xy takımının orijinine en yakın olan köşesinin koordinatları (x_0, y_0) olsun. Burada kütleli üzerinde yer aldığı plak bölgesinin eğilmesini engellemediği varsayılacaktır. Bu şartlar altında plâğın hareket denklemi:



Şekil 1. Yayılı kütleli plak

$$D (w_{xxxx} + 2 w_{xyxy} + w_{yyyy}) + \bar{\rho} \ddot{w} = -\rho \ddot{w} \mathbf{H}(x, y, x_0, y_0, c, d) \quad (1)$$

olmaktadır. Burada $w = w(x, y, t)$ plak orta düzleminin enine sehimlerini ve x ile y indisleri de x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri temsil etmektedir. D plâğın eğilme katılığı olup,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada E , ν ve h sırasıyla plâğın elastisite modülü, Poisson oranı ve kalınlığıdır. Ayrıca, $\bar{\rho}$ ve ρ plâğın ve yayılı kütleli alan yoğunluğu yani birim alana düşen kütlelidir. Nihayet, (1) denkleminin sağındaki \mathbf{H} fonksiyonu dört adet Heaviside fonksiyonunun aşağıdaki gibi bir kombinasyonudur:

$$\mathbf{H}(x, y, x_0, y_0, c, d) = [H(x-x_0) - H(x-x_0-c)] \cdot [H(y-y_0) - H(y-y_0-d)] \quad (3)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, x_0, y_0, c, d) = & \mathbf{H}_1(x-x_0, y-y_0) \\ & - \mathbf{H}_2(x-x_0, y-y_0-d) \\ & - \mathbf{H}_3(x-x_0-c, y-y_0) \\ & + \mathbf{H}_4(x-x_0-c, y-y_0-d) \end{aligned}$$

Tek ve iki boyutlu \mathbf{H}_i ve H fonksiyonları arasındaki ilişki şöyledir:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(x-x_0, y-y_0) &= H(x-x_0) \cdot H(y-y_0) \\ \mathbf{H}_2(x-x_0, y-y_0-d) &= H(x-x_0) \\ &\quad \cdot H(y-y_0-d) \\ \mathbf{H}_3(x-x_0-c, y-y_0) &= H(x-x_0-c) \\ &\quad \cdot H(y-y_0) \\ \mathbf{H}_4(x-x_0-c, y-y_0-d) &= H(x-x_0-c) \\ &\quad \cdot H(y-y_0-d) \end{aligned} \quad (4)$$

Galerkin prosedürünü uygulamak için (1) denkleminin gerçek çözümüne:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} W_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (5)$$

serisiyle yaklaşılabılır. Burada W_{ij} ler kısıtsız, basit mesnetli plâğın modal fonksiyonları olup,

$$W_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (6)$$

şeklindeirler. (5) bağıntısı (1) denkleminde yerleştirilir, denklemi yeniden düzenlenir ve $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ bölgesi üzerinde integre edilirse aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\pi^4 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{s}{b} \right)^2 \right]^2 D \frac{ab}{4} q_{rs} + \bar{\rho} \frac{ab}{4} \ddot{q}_{rs} + \rho ab \left[\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} \bar{I}_{ij,rs} \ddot{q}_{ij} \right] = 0 \quad (7)$$

Bu denklemdaki her terim $\bar{\rho} \frac{ab}{4}$ ile bölünür ve

$$\psi = \frac{b}{a} \quad (8)$$

$$\bar{\omega}_{rs} = \pi^2 \left[r^2 + (s/\psi)^2 \right] \left(\frac{D}{\bar{\rho} a^4} \right)^{1/2} \quad (9)$$

şeklinde tanımlanan büyüklükler kullanılırsa (7) denklemi şu şekli alır:

$$\ddot{q}_{rs} + \bar{\omega}_{rs}^2 q_{rs} + 4 \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) \left[\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} \bar{I}_{ij,rs} \ddot{q}_{ij} \right] = 0 \quad (10)$$

$r = 1, \dots, N_x \quad s = 1, \dots, N_y$

Burada;

$$\bar{I}_{ij,rs} = \begin{cases} (\alpha_{11} - \alpha_{21}) \cdot (\beta_{11} - \beta_{21}) & i \neq r, j \neq s \\ (\alpha_{12} - \alpha_{22}) \cdot (\beta_{11} - \beta_{21}) & i = r, j \neq s \\ (\alpha_{12} - \alpha_{22}) \cdot (\beta_{12} - \beta_{22}) & i = r, j = s \\ (\alpha_{11} - \alpha_{21}) \cdot (\beta_{12} - \beta_{22}) & i \neq r, j = s \end{cases} \quad (11)$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{(i^2 - r^2)\pi} (i \cos i\pi\xi \sin r\pi\xi - r \sin i\pi\xi \cos r\pi\xi) \quad (12)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} (1 - \xi) + \frac{1}{4r\pi} \sin 2r\pi\xi \quad (13)$$

$$\alpha_{21} = \frac{2}{(i^2 - r^2)\pi} [i \cos i\pi(\xi + \gamma) \sin r\pi(\xi + \gamma) - r \sin i\pi(\xi + \gamma) \cos r\pi(\xi + \gamma)] \quad (14)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2} (1 - \xi - \gamma) + \frac{1}{4r\pi} \sin 2r\pi(\xi + \gamma) \quad (15)$$

$$\beta_{11} = \frac{2}{(j^2 - s^2)\pi} (j \cos j\pi\zeta \sin s\pi\zeta - s \sin j\pi\zeta \cos s\pi\zeta) \quad (16)$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) + \frac{1}{4s\pi} \sin 2s\pi\zeta \quad (17)$$

$$\beta_{21} = \frac{2}{(j^2 - s^2)\pi} [j \cos j\pi(\zeta + \delta) \sin s\pi(\zeta + \delta) - s \sin j\pi(\zeta + \delta) \cos s\pi(\zeta + \delta)] \quad (18)$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} (1 - \zeta - \delta) + \frac{1}{4s\pi} \sin 2s\pi(\zeta + \delta) \quad (19)$$

$$\xi = \frac{x_0}{a} \quad (20)$$

$$\zeta = \frac{y_0}{b} \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{c}{a} \quad (22)$$

$$\delta = \frac{d}{b} \quad (23)$$

olmaktadır. (10) denklemindeki indisleri azaltmak için

$$m = N_y (r-1) + s \quad i, r = 1, \dots, N_x \quad (24)$$

$$n = N_y (i-1) + j \quad j, s = 1, \dots, N_y \quad (25)$$

ile tanımlanan yeni m ve n indisleri işe katılacaktır. $N = N_x \cdot N_y$, olmak üzere m ve n , 1 den N ye kadar tamsayı değerler almaktadırlar. Neticede (10) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\ddot{q}_m + \bar{\omega}_m^2 q_m + 4 \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) \left[\sum_{n=1}^N \bar{I}_{n,m} \ddot{q}_n \right] = 0 \quad (26)$$

$$m = 1, \dots, N$$

(26) denkleminde

$$\ddot{q}_n = -\omega^2 q_n \quad (27)$$

konulduğunda aşağıdaki denklem takımı elde edilmektedir:

$$\bar{\omega}_m^2 q_m = \sum_{n=1}^N \left[4 \left(\frac{\rho}{\rho} \right) \bar{I}_{n,m} + \delta_{nm} \right] \omega^2 q_n = 0 \quad (28)$$

$m = 1, \dots, N$

(28) denklem takımı matris denklemi olarak,

$$\left[\bar{\omega}^2 \right] \{q\} = \omega^2 \left[[I] + [Q] \right] \{q\} \quad (29)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu denklemde,

$$\left[\bar{\omega}^2 \right] = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1^2 & & & 0 \\ & \bar{\omega}_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{\omega}_N^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$Q_{kl} = 4 \left(\frac{\rho}{\rho} \right) \bar{I}_{k,l} \quad (31)$$

ile verilen bir matristir. $[I]$ birim matrisi temsil etmektedir. (29) denklemi

$$\left\{ \omega^2 \left\{ [I] + [Q] \right\} - \left[\bar{\omega}^2 \right] \right\} \{q\} = \{0\} \quad (32)$$

şeklinde tekrar düzenlenirse (32) deki katsayılar matrisinin açık şekli

$$\begin{vmatrix} (1+Q_{11})\omega^2 - \bar{\omega}_1^2 & Q_{12}\omega^2 & Q_{13}\omega^2 & \dots & Q_{1,N}\omega^2 \\ Q_{21}\omega^2 & (1+Q_{22})\omega^2 - \bar{\omega}_2^2 & Q_{23}\omega^2 & \dots & Q_{2,N}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N,1}\omega^2 & Q_{N,2}\omega^2 & Q_{N,3}\omega^2 & \dots & (1+Q_{N,N})\omega^2 - \bar{\omega}_N^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

olup $[Q]$ ise elemanları

olan determinantı sistemin doğal frekanslarını verecektir.

3. SONUÇLAR

Merkezi $(x_0 + c/2, y_0 + d/2)$ de olan yayılı bir kütle taşıyan dikdörtgen bir plâğın doğal frekansları yukarıda açıklanan metotla tayin edildi. Ancak başlangıçta bu frekansların hangi modlarla ilişkili

olduğu göz önüne alınmadı ve bunun yerine bulunan frekanslar en küçükten en büyüğe sıralandı. Hesaplamalarda gerekli bazı boyutsuz parametre değerleri aşağıdaki gibi seçildi:

$$\psi = \frac{b}{a} = 1.5, \quad \gamma = \frac{c}{a} = 0.1, \quad \delta = \frac{d}{b} = 0.1$$

$$\frac{\rho}{\rho} = 10, \quad N_x = 5, \quad N_y = 5, \quad N = N_x N_y = 25$$

Kütleli (kısıtlanmasız) plâğın ilk yirmibeş modu kullanıldığından bunlara karşılık gelen yirmibeş frekans Tablo 1'de parantez içinde hangi modlara karşı geldikleri belirtilerek küçükten büyüğe sıralanmıştır.

Tablo 1. Dikdörtgen Plâğın Boyutsuz Özfrenkansları $\psi = 1.5$ için

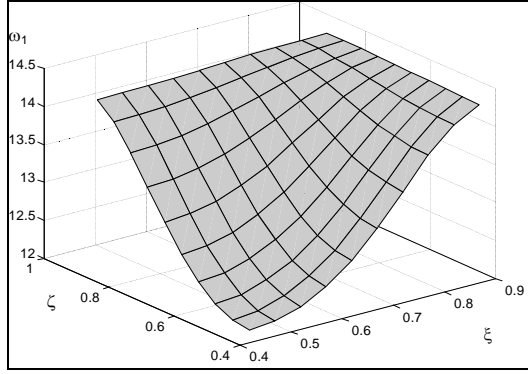
| | | | |
|--------------------------------|----------|--------------------------------|----------|
| $\omega_1 = (\omega_{1-1})$ | 14.2561 | $\omega_{14} = (\omega_{3-4})$ | 159.0103 |
| $\omega_2 = (\omega_{1-2})$ | 27.4156 | $\omega_{15} = (\omega_{4-1})$ | 162.3002 |
| $\omega_3 = (\omega_{2-1})$ | 43.8649 | $\omega_{16} = (\omega_{4-2})$ | 175.4596 |
| $\omega_4 = (\omega_{1-3})$ | 49.3480 | $\omega_{17} = (\omega_{4-3})$ | 197.3921 |
| $\omega_5 = (\omega_{2-2})$ | 57.0244 | $\omega_{18} = (\omega_{3-5})$ | 198.4887 |
| $\omega_6 = (\omega_{2-3})$ | 78.9568 | $\omega_{19} = (\omega_{4-4})$ | 228.0975 |
| $\omega_7 = (\omega_{1-4})$ | 80.0535 | $\omega_{20} = (\omega_{5-1})$ | 251.1266 |
| $\omega_8 = (\omega_{3-1})$ | 93.2129 | $\omega_{21} = (\omega_{5-2})$ | 264.2861 |
| $\omega_9 = (\omega_{3-2})$ | 106.3724 | $\omega_{22} = (\omega_{4-5})$ | 267.5759 |
| $\omega_{10} = (\omega_{2-4})$ | 109.6623 | $\omega_{23} = (\omega_{5-3})$ | 286.2185 |
| $\omega_{11} = (\omega_{1-5})$ | 119.5319 | $\omega_{24} = (\omega_{5-4})$ | 316.9240 |
| $\omega_{12} = (\omega_{3-3})$ | 128.3049 | $\omega_{25} = (\omega_{5-5})$ | 356.4024 |
| $\omega_{13} = (\omega_{2-5})$ | 149.1407 | | |

Özfrenkanslar $(D/\bar{\rho}a^4)^{-1/2}$ ile çarpılarak boyutsuzlaştırılmıştır. Plak, sınır şartları ve geometrisi bakımından simetriye sahip olduğundan incelemelerin dörtte bir plak üzerinde yapılabileceği açıktır. Dolayısıyla ξ ve ζ parametrelerine 0.05 artımlarla 0.5 ten 1 e kadar (1 hariç) değerler atanmıştır. Belirli bir ξ - ζ değer çifti için yayılı kütleli merkezi boyutsuz koordinatlar olarak $(\xi + \gamma/2, \zeta + \delta/2)$ de yerleştirilmiş olmaktadır. $\xi = 0.5$ (1- γ) ve $\zeta = 0.5$ (1- δ) için bulunan kısıtlı (kütle taşıyan) plâğın ilk yirmibeş frekansı Tablo 2'de verilmektedir.

Mühendislik uygulamaları için genelde en önemlisi temel frekans olduğundan, bu frekansın yayılı kütleli merkezi koordinatlarına göre değişimi Matlab®.ın üç boyutlu grafik özelliklerinden yararlanılarak çizdirilmiştir (Şekil 2'ye bkz.) Bu esnada ξ ve ζ hariç diğer parametrelerin tümü sabit tutulmuştur.

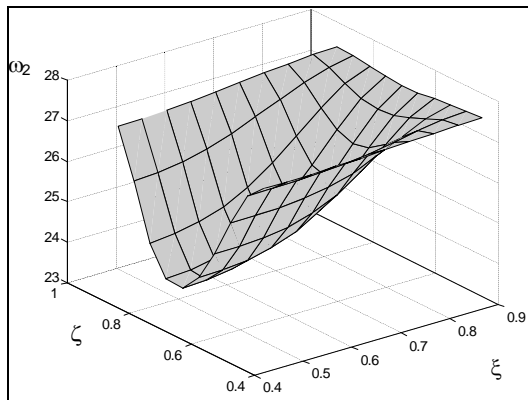
Tablo 2. Üzerinde Yayıllı Kütle Taşıyan Dikdörtgen Plâğın Özfrenkansları. $\psi = 1.5$, $\gamma = \delta = 0.1$, $\xi = 0.5$ ($1-\gamma$), $\zeta = 0.5(1-\delta)$, $\rho/\bar{\rho}=10$

| | | | |
|---------------|----------|---------------|----------|
| ω_1 | 12.0092 | ω_{14} | 155.7927 |
| ω_2 | 27.2403 | ω_{15} | 158.5821 |
| ω_3 | 43.2103 | ω_{16} | 175.3214 |
| ω_4 | 43.5832 | ω_{17} | 188.1630 |
| ω_5 | 57.0125 | ω_{18} | 193.6924 |
| ω_6 | 78.1580 | ω_{19} | 227.4303 |
| ω_7 | 78.4819 | ω_{20} | 238.9339 |
| ω_8 | 82.8148 | ω_{21} | 262.9828 |
| ω_9 | 105.7888 | ω_{22} | 263.3200 |
| ω_{10} | 109.5762 | ω_{23} | 277.8061 |
| ω_{11} | 110.2799 | ω_{24} | 311.6927 |
| ω_{12} | 124.8148 | ω_{25} | 347.0318 |
| ω_{13} | 148.0554 | | |

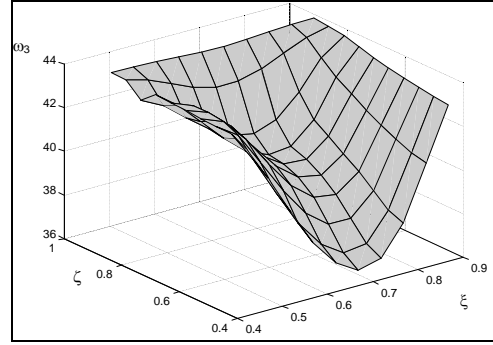


Şekil 2. Birinci özfrenkansın yayılı kütle konumuna göre değişimi. $\psi=1.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\rho/\bar{\rho}=10$

Kütle yerleşiminin diğer, mesela ikinci ve üçüncü frekanslara etkisi hakkında da bir fikir edinmek için benzer grafikler çizdirilmiştir, Şekil 3 ve 4'e bkz.

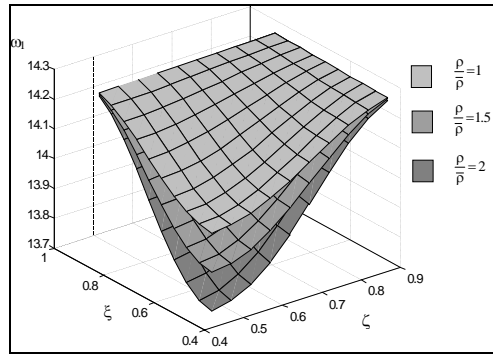


Şekil 3. İkinci özfrenkansın yayılı kütle konumuna göre değişimi. $\psi=1.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\rho/\bar{\rho}=10$

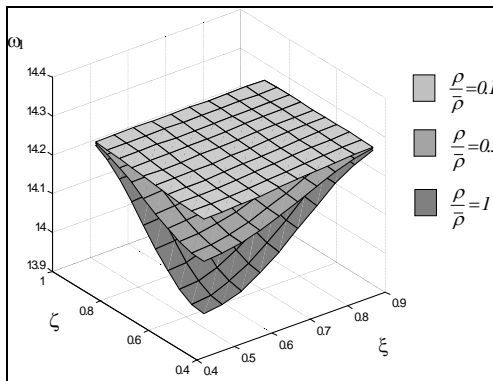


Şekil 4. Üçüncü özfrenkansın yayılı kütle konumuna göre değişimi. $\psi = 1.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\rho/\bar{\rho}=10$

$\rho/\bar{\rho}$ oranı etkisi araştırılacak diğer önemli bir parametre olarak görünmektedir. Beklendiği gibi $\rho/\bar{\rho}$ arttıkça temel frekans azalmaktadır. Farklı mertebeden $\rho/\bar{\rho}$ oranları için çizdirilen grafiklerde bu olgu açıkça gözükmektedir, Şekil 5 ve 6.



Şekil 5. Birinci özfrenkansın farklı $\rho/\bar{\rho}$ oranları için yayılı kütle konumuna göre değişimi $\psi=1.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.1$



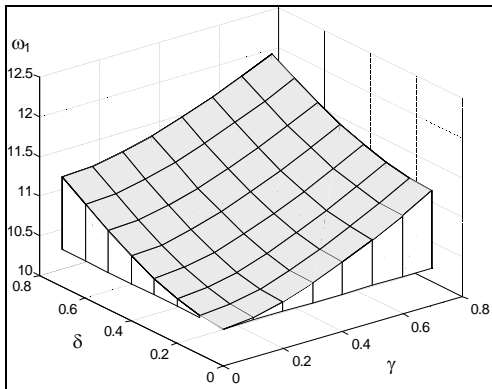
Şekil 6. Birinci özfrenkansın farklı $\rho/\bar{\rho}$ oranları için yayılı kütle konumuna göre değişimi $\psi = 1.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.1$

$\rho/\bar{\rho}$ için oldukça büyük değerler alıp γ ve δ iyice küçültüldüğünde konsantre kütle taşıyan bir plâğa ait sonuçlar elde edilmektedir. Mesela, $\delta = 0.002$, $\gamma = 0.002$ ve $\rho/\bar{\rho} = 50000$ seçildiğinde kendi kütesinin 1/5 i kadar bir konsantre kütle taşıyan plak hali elde edilir. Bir karşılaştırma yapmak amacıyla Wu ve Luo (1997)'da incelenen plak ve eklentisine ait parametreler kullanılarak ilk beş frekans hesaplatıldı. Burada sunulan metot, Wu ve Luo (1997)'deki metot ve kesin çözümden bulunan sonuçlar Tablo 3'te gösterilmiştir. Sonuçların mukayesesi burada sunulan yaklaşımın konsantre kütle taşıyan plaklar için de uygun olduğunu göstermektedir.

Tablo 3. Wu ve Luo (1997)'da incelenen plâğın ilk 5 frekans değerleri. $\psi=1$, $\xi = 0.25$, $\zeta=0.25$, $m_{eklentisi} = 50$ kg.)

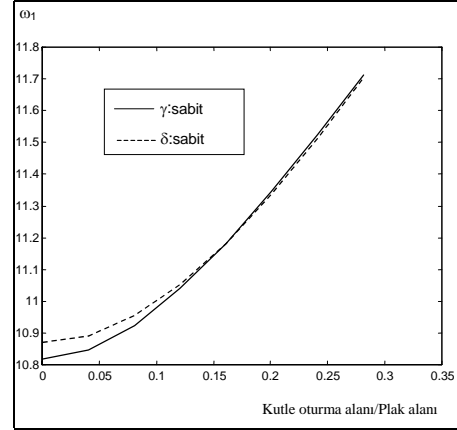
| | Sunulan Metot | Wu ve Luo (1997) | Tam Çözüm |
|------------|---------------|------------------|-----------|
| ω_1 | 31.7963 | 31.8271 | 31.825 |
| ω_2 | 63.5739 | 63.3374 | 63.318 |
| ω_3 | 95.4149 | 95.4148 | 95.415 |
| ω_4 | 128.2167 | 127.7677 | 127.741 |
| ω_5 | 181.0288 | 180.6927 | 180.677 |

Kütlenin oturma alanının frekansları nasıl etkilediği de araştırıldı. Merkezi plak merkeziyle çakışan dikdörtgensel eklentinin kütlesi sabit tutulup, γ ve δ ya farklı değerler verilerek temel frekansın nasıl değiştiği incelenmiştir (Şekil 7). Eklentinin taban alanı değişimine karşılık kütesinin sabit kalması $\rho/\bar{\rho}$ oranına müdahale edilerek sağlanmıştır. Şekil 7'den de görüldüğü gibi, sabit eklenti kütlesi için oturma alanı arttıkça, yani γ ve/veya δ değerleri büyüdükçe temel frekans da yükselmektedir.



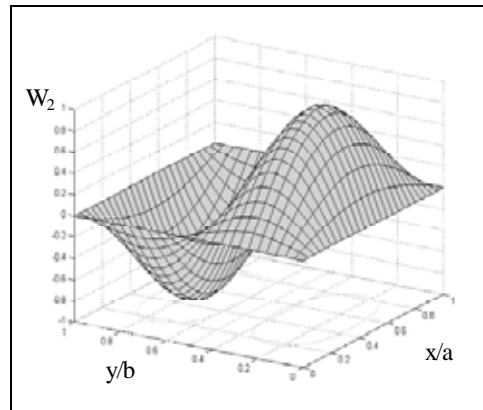
Şekil 7. Birinci özfrekansın yayılı kütle için farklı boyutlarına göre değişimi $\psi=1.5$, $m_{eklentisi}/m_{plak} = 0.2$.

Şekil 8'de ise eklentinin kütlesi ile eni veya boyunun sabit tutulması halinde temel frekansın, kütle oturma alanının plak alanına oranına göre nasıl değiştiği gösterilmiştir. Bu eğriler, $\psi=1.5$, $m_{eklentisi}/m_{plak} = 0.2$, $N = 25$, değerleri için çizdirilmiştir. Burada verilmekle birlikte kare plak halinde sabit ve eşit γ ve δ değerlerine ait eğrilerin simetriden ötürü çakıştıkları gözlenmiştir.



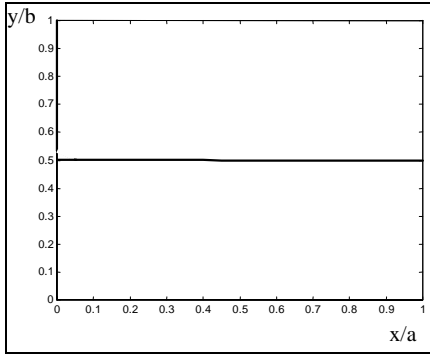
Şekil 8. Sabit δ ve γ değerleri için birinci özfrekansın alanlar oranına göre değişimi

Ek kütleyle donatılmış plâğın doğal frekanslarına karşılık gelen modal yüzeyler de incelenmiştir. Bu incelemelerde kütle birisi plak merkezinde diğeri ise plâğın dörtte birlik kısmının merkezinde olmak üzere iki farklı konumda yapılmıştır. Çeşitli frekanslar ele alınmakla beraber burada yer darlığı nedeniyle sadece ikinci frekansa ait modal yüzeyin grafikleri aktarılacaktır. Şekil 9(a)'da $\rho/\bar{\rho}=1$, $\gamma = \delta = 0.005$ ve kütle merkezinin plak merkezinde olması halinde ikinci frekansa ait modal yüzey gösterilmiştir.



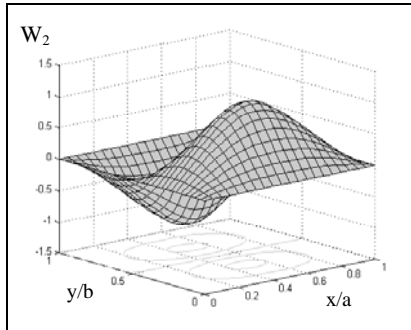
Şekil 9. (a) İkinci frekansa ait modal yüzey $\rho/\bar{\rho}=1$, $\gamma = \delta = 0.005$, Kütle ve plak merkezleri çakışık

Şekil 9(b)'de ise bu moda ait nodal çizgi görülmüyor.

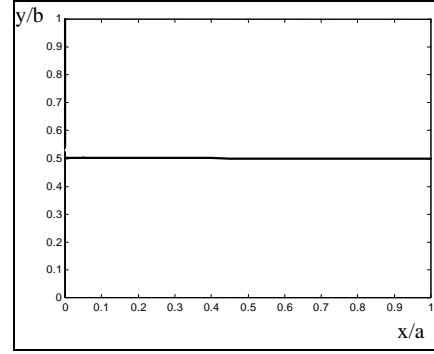


Şekil 9. (b) İkinci frekansa ait nodal çizgi $\rho/\bar{\rho}=1$, $\gamma = \delta = 0.005$, Kütle ve plak merkezleri çakışık

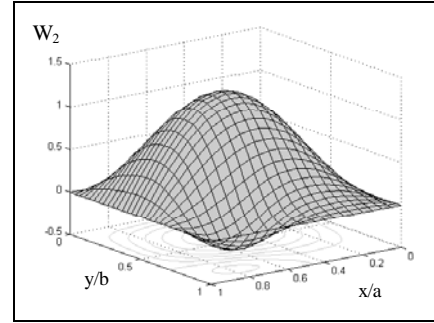
Verilen parametre değerleri pratik olarak eklentisiz bir plağa karşılık gelmekte olup nodal çizginin seyrinden ve yüzeyin incelenmesinden bunun 1-2 modunu temsil ettiği anlaşılmaktadır. Diğer parametrelerin tümü sabit tutulmak şartıyla eklentinin merkezi sağ üst dörtte bir plağın merkeziyle çakışacak tarzda yerleştirilmesi halinde de ikinci frekansa tekabül eden modal yüzey ve nodal çizgiler çizdirilmiş ve eklentinin bu konum değişikliğinin kütle miktarının pratik olarak ihmal edilebilir oluşu nedeniyle etkisi olmadığı gözlenmiştir. $\rho/\bar{\rho}=10$, $\gamma = \delta = 0.1$ alınması (ki bu değerler plak kütlelerinin 1/10 ine eşit bir ek kütle demektir) halinde de kütle merkezinin yerleşiminin etkin olmadığı ve ikinci frekansın hala 1-2 modunu temsil ettiği görülmüştür. Ancak plak kütlelerinin on katına sahip bir ek kütleyle karşılık gelen $\rho/\bar{\rho}=1000$, $\gamma = \delta = 0.1$ değerleri için kütlelerin yerleşiminin modal yüzey üzerindeki etkisinin büyük olduğu Şekil 10 (a) ve Şekil 11(a)'nın karşılaştırılmasından hemen anlaşılmaktadır. Keza nodal çizgilerde de ciddi değişiklikler gözlenmektedir (Şekil 10 (b) ve 11(b)).



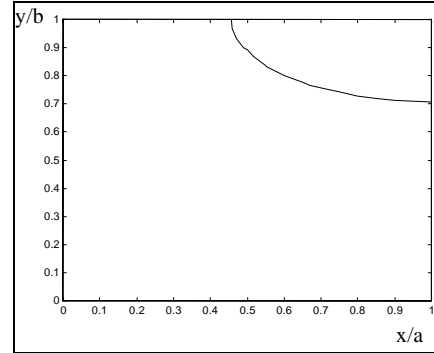
Şekil 10. (a) İkinci frekansa ait modal yüzey $\rho/\bar{\rho}=1000$, $\gamma = \delta = 0.1$, Kütle ve plak merkezleri çakışık



Şekil 10. (b) İkinci frekansa ait nodal çizgi $\rho/\bar{\rho}=1000$, $\gamma = \delta = 0.1$, Kütle ve plak merkezleri çakışık



Şekil 11(a). İkinci frekansa ait modal yüzey $\rho/\bar{\rho}=1000$, $\gamma = \delta = 0.1$, Kütle sağ üst dörtte bir plağın merkezinde



Şekil 11. (b) İkinci frekansa ait nodal çizgi $\rho/\bar{\rho}=1000$, $\gamma = \delta = 0.1$, Kütle sağ üst dörtte bir plağın merkezinde

4. DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada yayılı bir ek kütle taşıyan bir plağın doğal frekansları ve buna ilişkin modal yüzeyleri tayin edilmiştir. Galerkin prosedürüne dayanan bir metot geliştirilmiş ve boyutsuzlaştırma yapılarak

kısıtlanmış plâğın doğal frekanslarını veren karakteristik denklem elde edilmiştir. Yoğunluk oranı, kütle oturma alanının plak alanına oranı gibi bazı boyutsuz parametrelerin frekansları nasıl etkilediği de araştırılmıştır. Ayrıca sunulan metodun konsantre (lumped veya tekil) kütle taşıyan plakların incelenmesine de elverişli olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmadan çıkarılan önemli bir sonuç da bir yapı elemanı olarak plâğın doğal frekanslarının ekli kütleyle (ki genelde plak olarak göz önüne alınabilecek olan döşemeye monte edilmiş bir makine kütlelerini temsil eder) uygun tarzda yerleştirmek suretiyle döşemenin frekanslarını makine kaynaklı titreşim frekansından uzaklaştırma olanağının var olduğunun anlaşılmasıdır. Nodal çizgilerin ise ek kütlelerin plak kütlelerine göre oranı arttıkça önemli değişikliklere uğradığı da gösterilmiştir. Buradaki metod, eklentileri olan bir plakta zorlanmış titreşimlerin incelenmesinde de izlenebilir.

5. KAYNAKLAR

Cha, P. D. 1997. Free Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass. *Journal of Sound and Vibration* (207), 593-596.

Chan, K. T., Leung, T. P., Wong, W. O. 1996.

Free Vibration of Simply Supported Beam Partially Loaded With Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration* (191), 590-597.

Chan, K.T., Wang, X. Q. 1997. Free vibration of a Timoshenko Beam Partially Loaded With Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration* (206), 353-369.

Chan, K.T., Wang, X.Q., Leung, T. P. 1998. Free Vibration of Beams With Two Sections of Distributed Mass. *Journal of Vibration and Acoustics* (120), 944-948.

Chan, K. T., Zhang, J. Z. 1995. Free Vibration of a Cantilever Tube Partially Filled With Liquid. *Journal of Sound and Vibration* (182), 185-190.

Rossi, R. E., Laura, P. A. A. 1996. Symmetric and Antisymmetric Normal Modes of a Cantilever Rectangular Plate: Effect of Poisson's Ratio and a Concentrated Mass. *Journal of Sound and Vibration* (195), 142-148.

Wu, J. S., Luo, S. S. 1997. Use of the Analytical and Numerical Combined Method in the Free Vibration Analysis of a Rectangular Plate With any Number of Point Masses and Translational Springs. *Journal of Sound and Vibration* (200), 179-194.