PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
PAMUKKALE UNIVERSITY ENGINEERING COLLEGE
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES
YIL : 2002
CİLT : 8
SAYI : 2
SAYFA : 219-226

SINIR ŞARTLARININ BİRİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN ÖZFONKSİYONLARI

Oktay MUHTAROV*, Mahir KADAKAL ve Fahrettin Ş. MUHTAROV*****
*Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat
**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55139-Kurupelit/Samsun
***Azerbaycan Bilimler Akademisi, Matematik ve Mekanik Enstitüsü, Bakü-Azerbeycan

Geliş Tarihi : 05.10.2001

ÖZET

Bu çalışmada, sınır şartlarının birinin katsayıları özdeğer parametresini lineer olarak içeren süreksiz katsayılı ve ağırlıklı Sturm-Liouville probleminin rezolvent operatörü ve özfonksiyonlar sisteminin tamlık özellikleri yeni bir yaklaşımla incelenmiştir. İncelenen problemin operatör-teorik yazılımı için $L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında yeni eşdeğer iç çarpım ve uygun kendine eşlenik lineer operatör tanımlanmıştır. Ayrıca, $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ temel çözümleri özel bir yöntemle tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Süreksiz Sturm-Liouville problemi, Özdeğer, Özfonksiyon, Rezolvent operatör

EIGENFUNCTIONS OF DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE PROBLEM CONTAINING EIGENVALUE PARAMETER IN THE ONE OF BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT

In this paper by using a new approach we investigate the resolvent operator and completeness of the system of eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem with discontinuous coefficients and weight, one of the boundary conditions of which contained linear eigenparameter. For operator-theoretic formulation of the considered problem we define a new equivalent inner product in the Hilbert space $L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}$ and suitable selfadjoint linear operator in it. Further, the basic solutions $\phi(x,\lambda)$ and $\chi(x,\lambda)$ are defined by the special procedure.

Key Words : Discontinuous Sturm-Liouville problem, Eigenvalue, Eigenfunctions, Resolvent operator

1. GİRİŞ

Bu çalışmada katsayıları sonlu $[a,b]$ aralığının bir $a<b<c$ iç noktasında genel olarak süreksiz olan

$$Tu := \frac{1}{r(x)}\left\{-\left(p(x)u'\right)' + q(x)u\right\} = \lambda u, x\in[a,c)\cup(c,b] \quad (1)$$

diferensiyel denkleminden, uç noktalardaki,

$$u(a)=0 \tag{2}$$

$$(\lambda\alpha_1+\beta_1)u(b)=(\lambda\alpha_2+\beta_2)u'(b) \tag{3}$$

sınır şartlarından ve $x=c$ süreksizlik noktasındaki

$$\gamma_1 u(c-0)=\delta_1 u(c+0) \tag{4}$$

$$\gamma_2 u'(c-0)=\delta_2 u'(c+0) \tag{5}$$

geçiş şartlarından oluşan bir sınır değer problemini inceleyeceğiz.

Burada; λ kompleks parametredir; $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ $(i=1,2)$ reel sayılardır ve $\beta_1^2+\beta_2^2>0, \gamma_1^2+\delta_1^2>0, \gamma_2^2+\delta_2^2>0$ doğal şartlarını sağlıyorlar; r, p, p', q ise $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde sürekli olan ve $x=c$ noktasında sonlu sağ ve sol limit değerleri mevcut olan reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca her $x\in[a,c)\cup(c,b]$ için $r(x)>0, p(x)>0$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu problemin (Walter, 1973) anlamında kendine eşlenik olması için, $\rho:=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1>0$ şartının sağlandığını da kabul edeceğiz Walter (1973)'in makalesinde olduğu gibi, eğer (1)-(5) problemi herhangi bir Hilbert uzayında kendine eşlenik bir operatör için özdeğer problemine indirgenebilirse, o halde bu probleme kendine eşlenik problem diyeceğiz. (1)-(5) probleminin bazı özel halleri (Walter, 1973; Fulton, 1977) kaynaklarında farklı yöntemlerle incelenmiştir.

Matematik fiziğin bazı problemlerinde zaman değişkenine göre kısmi türev sadece diferansiyel denklemde değil aynı zamanda 'sınır şartlarında' da ortaya çıkmaktadır. Böyle problemlere uygun olan spektral problemlerde özdeğer parametresi sadece diferansiyel denklemde değil sınır şartlarında da bulunmaktadır (Langer, 1932; Tikhonov and Samarskii, 1963). (4)-(5) biçimindeki 'geçiş şartları' ise farklı fiziksel ve mekanik özellikleri bulunan cisimler arasındaki ısı ve madde iletimi veya başka geçiş süreçlerinde ortaya çıkmaktadır (Rasulov, 1967; Titeux and Yakubov, 1997; Mukhtarov ve Demir, 1999).

2. SINIR DEĞER GEÇİŞ PROBLEMİNİN UYGUN HİLBERT UZAYINDA ÖZDEĞER PROBLEMİ BİÇİMİNDE İFADESİ

Eğer,

$$\begin{cases}(u)_b:=\beta_1 u(b)-\beta_2 u'(b)\\ (u)'_b:=\alpha_1 u(b)-\alpha_2 u'(b)\end{cases} \tag{6}$$

gösterimlerinden yararlanırsak, kolayca her $u,v\in C^1[a,b]$ için,

$$\rho[u(b)v'(b)-u'(b)v(b)]= (u)_b(v)'_b-(u)'_b(v)_b \tag{7}$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi iki bileşenli $F:=\begin{pmatrix}F_1(x)\\F_2\end{pmatrix}, F_1(x)\in L_2[a,b], F_2\in\mathbb{C}$ elemanlarının $L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}$ lineer uzayında iki $F,G\in L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}$ elemanın iç çarpımını,

$$<F,G>_{p,r,\rho}:=\int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}r(x)dx+ \frac{p(b)}{\rho}F_2\overline{G_2} \tag{8}$$

formülü ile tanımlayalım (Burada $\int_a^b:=\int_a^c+\int_c^b$ kabul ediyoruz).

O halde,

$H_{p,r,\rho}:=(L_2[a,b]\oplus\mathbb{C},<\bullet,\bullet>_{p,r,\rho})$ iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olacağı açıktır. Bu uzayda tanım bölgesi $D(A)=\{F\in H_{p,r,\rho} \,|\, F_1,F_1'$ fonksiyonlarının her biri $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde mutlak süreklidirler; $F_1(c\pm o),F_1'(c\pm 0)$ sonlu limit değerleri mevcuttur.

$$F_1(a)=0, \gamma_1F_1(c-0)=\delta_1F_1(c+0), \gamma_2F_1'(c-0)=\delta_2F_1'(c+0); F_2=(F_1)'_b\}$$
(9)

olan $A : H_{p,r,\rho} \to H_{p,r,\rho}$ operatörünü,

$$A\begin{pmatrix} F_1(x) \\ (F_1)'_b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} TF_1 \\ -(F_1)_b \end{pmatrix}$$

(10)

eşitliği ile tanımlayalım. O halde (1)-(5) sınır değer geçiş problemi,

$$AU = \lambda U \left(U := \begin{pmatrix} u(x) \\ (u)'_b \end{pmatrix} \in D(A) \right) \qquad (11)$$

operatör-denklem biçiminde yazılabilir. Böylece (1)-(5) problemini bir Hilbert uzayında tanımlı olan bir lineer operatör için özdeğer problemine indirgemiş olduk.

2. 1. Lemma

Eğer, $\delta_1\delta_2 p(c-0) = \gamma_1\gamma_2 p(c+0)$ şartı sağlanıyorsa A operatörü simetriktir.

İspat. $F, G \in D(A)$ iki tane keyfi eleman olmak üzere Lagrange formülünü (Naimark, 1967) uygularsak,

$$< AF, G >_{p,r,\rho} = \int_a^b (TF_1)(x)\overline{G_1(x)}r(x)dx + \frac{p(b)}{\rho}\left(-(F_1)_b\right)(G_1)'_b$$

$$= \int_a^c F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}r(x)dx + \int_c^b F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}r(x)dx +$$
$$+ p(c-0)W\left(F_1, G_1; c-0\right) - p(a)W\left(F_1, G_1; a\right) +$$
$$+ p(b)W\left(F_1, G_1; b\right) - p(c+0)W\left(F_1, G_1; c+0\right) - \frac{p(b)}{\rho}\left(F_1\right)_b\left(\overline{G_1}\right)'_b$$

$$= \left\{ < F, G >_{p,r,\rho} - \frac{p(b)}{\rho}\left(\overline{G_1}\right)_b\left(\overline{F_1}\right)'_b \right\} +$$
$$+ \left\{ p(c-0)W\left(F_1, G_1; c-0\right) - p(c+0)W\left(F_1, G_1; c+0\right) \right\} -$$
$$- \frac{p(b)}{\rho}\left\{ \left(F_1\right)_b\left(G_1\right)'_b - \left(F_1\right)'_b\left(G_1\right)_b \right\}$$

$$= \left\{ \int_a^c F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}r(x)dx + \int_c^b F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}r(x)dx + \frac{p(b)}{\rho}\left(F_1\right)'_b\left(\left(-G_1\right)_b\right) \right\} -$$
$$- p(a)W\left(F_1, \overline{G_1}; a\right) + \left\{ p(c-a)W\left(F_1, \overline{G_1}; c-0\right) - p(c+0)W\left(F_1, \overline{G_1}; c+0\right) \right\} + \qquad (12)$$
$$+ p(b)\left\{ W\left(F_1, \overline{G_1}; b\right) - \frac{1}{\rho}\left(\left(F_1\right)_b\left(\overline{G_1}\right)'_b - \left(F_1\right)'_b\left(\overline{G_1}\right)_b \right) \right\}$$

eşitliğini buluruz.

Burada;

$$W\left(F_1, G_1; x\right) := F_1(x)G'_1(x) - F'_1(x)G_1(x) \qquad (13)$$

ile F_1, G_1 fonksiyonlarının Wronskiyeni gösterilmiştir. $F_1(x)$ ve $\overline{G_1(x)}$ fonksiyonları (2) sınır şartını sağladıkları için,

$$W\left(F_1, \overline{G_1}; a\right) = 0 \qquad (14)$$

eşitliği sağlanır. $F_1, \overline{G_1}$ fonksiyonlarının (4) ve (5) geçiş şartlarını sağladığını ve lemmanın şartını dikkate alırsak,

$$p(c-0)W\left(F_1, \overline{G_1}; c-0\right) = p(c-0)\left[F_1(c-0)\overline{G_1}'(c-0) - F'_1(c-0)\overline{G_1}(c-0) \right]$$
$$= \frac{\gamma_1\gamma_2}{\delta_1\delta_2}p(c+0)\left\{ \left[\frac{\delta_1}{\gamma_1}F_1(c+0) \right]\left[\frac{\delta_2}{\gamma_2}\overline{G_1}'(c+0) \right] - \right. \qquad (15)$$
$$\left. - \left[\frac{\delta_1}{\gamma_1}F'_1(c+0) \right]\left[\frac{\delta_2}{\gamma_2}\overline{G_1}'(c+0) \right] \right\}$$
$$= p(c+0)W\left(F_1, \overline{G_1}; c+0\right)$$

bulmuş oluruz. O halde (14) ve (15) eşitliklerini (12) de yerine yazarak (7) eşitliğini de dikkate alırsak, talep olunan

$$< AF;G >_{p,r,\rho} =< F, AG >_{p,r,\rho} \tag{16}$$

eşitliğini, yani A operatörünün simetrik olduğunu elde ederiz.■

2. 1. Sonuç

(1)-(5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

Not : $p(x), q(x) ve r(x)$ reel değerli fonksiyonlar, (2)-(5) şartlarının katsayıları reel sayılar ve bütün özdeğerler reel olduğu için (1)-(5) probleminin bütün özfonksiyonlarını reel değerli fonksiyonlar olarak kabul edebiliriz.

2. 2. Sonuç

λ_1 ve λ_2 (1.1)-(1.5) probleminin herhangi iki farklı özdeğeri, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ ise uygun özfonksiyonları ise

$$\int_a^b u_1(x)u_2(x)r(x)dx = -\frac{p(b)}{\rho}(u_1)'_b(u_2)'_b \tag{17}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. A operatörü simetrik olduğu için, λ_1 ve λ_2 farklı özdeğerlerine uygun $U_1 = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ (u_1)'_b \end{pmatrix}$ ve $U_2 = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ (u_2)'_b \end{pmatrix}$ özelementleri $H_{p,r,\rho}$ uzayında ortogonal olacak, yani (17) eşitliği sağlanacaktır.■

3. A OPERATÖRÜNÜN REZOLVENTİ

Bu kesimde özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısının A operatörünün regüler değeri olduğunu göstereceğiz ve ayrıca, $R(\lambda, A) := (A - \lambda I)^{-1}$ rezolvent operatörünü inceleyeceğiz. $F \in H_{p,r,\rho}$ keyfi elemanı için

$$(A - \lambda I)U = F \tag{18}$$

operatör denklemini onunla eşdeğer, homojen olmayan

$$\frac{1}{r(x)}\left\{-(p(x)U_1)' + q(x)U_1\right\} - \lambda U_1 = F_1(x), x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{19}$$

$$U_1(a) = 0 \tag{20}$$

$$(\beta_1 U_1(b) - \beta_2 U_1'(b)) + \lambda(\alpha_1 U_1(b) - \alpha_2 U_1'(b)) = F_2 \tag{21}$$

$$\gamma_1 U_1(c-0) = \delta_1 U_1(c+0) \tag{22}$$

$$\gamma_2 U_1'(c-0) = \delta_2 U_1'(c+0) \tag{23}$$

sınır-değer-geçiş problemi şeklinde yazalım. İlk önce aşağıdaki önemli lemmayı verelim.

3. 1. Lemma

Herhangi $[a_1, a_2]$ aralığında tanımlı ve reel değerli $r(x) \neq 0, p(x) \neq 0 ve q(x)$ fonksiyonları verilsin. Eğer $r(x) ve q(x)$ fonksiyonları bu aralıkta sürekli, $p(x)$ ise sürekli diferensiyellenebilir iseler, o halde her tam $f(\lambda) ve g(\lambda)$ fonksiyonları için

$$\frac{1}{r(x)}\left\{-(p(x)u')' + q(x)u\right\} = \lambda u, x \in [a_1, a_2] \tag{24}$$

diferensiyel denkleminin

$$u(a_i) = f(\lambda), u'(a_i) = g(\lambda) \tag{25}$$

$(i = 1 veya i = 2)$ başlangıç şartlarını sağlayan $u(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm fonksiyonu her $x \in [a_1, a_2]$ değeri için λ değişkeninin tam fonksiyonudur. Bu lemma (Titchmarsh, 1962) ın kitabındaki Teorem1.5 in ispatındaki yöntemle tam benzer şekilde ispat edilir.

Şimdi bu lemmadan yararlanarak (1) diferensiyel denkleminin iki tane $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ çözümlerini tanımlayacağız. $[a,c]$ aralığında (1) diferansiyel denkleminin

$$u(a) = 0, u'(a) = 1 \tag{26}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\phi_1(x,\lambda)$ ile gösterelim. $\phi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu tanımlandıktan sonra $[c,b]$ aralığında (1) diferensiyel denklemini

$$u(c) = \frac{\gamma_1}{\delta_1}\phi_1(0,\lambda), u'(c) = \frac{\gamma_2}{\delta_2}\phi_1'(0,\lambda)$$
(27)

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü tanımlayabiliriz. Bu çözümü $\phi_2(x,\lambda)$ ile gösterelim. Benzer şekilde, $[c,b]$ aralığında (1) diferansiyel denkleminin

$$u(b) = \alpha_2\lambda + \beta_2, u'(b) = \alpha_1\lambda + \beta_1 \qquad (28)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_2(x,\lambda)$ ile göstererek, bu çözümü tanımladıktan sonra $[a,c]$ aralığında (1) diferensiyel denkleminin

$$u(c) = \frac{\delta_1}{\gamma_1}\chi_2(0,\lambda), u'(c) = \frac{\delta_2}{\gamma_2}\chi_2'(0,\lambda) \qquad (29)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_1(x,\lambda)$ ile gösterelim. 3. 1. Lemma gereği $\phi_i(x,\lambda),\chi_i(x,\lambda)(i=1,2)$ fonksiyonları λ -nın tam fonksiyonlarıdırlar. Bu fonksiyonların tanımları gereği

$$\phi(x,\lambda) := \begin{cases}\phi_1(x,\lambda), x\in[a,c]\\ \phi_2(x,\lambda), x\in[c,b]\end{cases}, \chi(x,\lambda) := \begin{cases}\chi_1(x,\lambda), x\in[a,c]\\ \chi_2(x,\lambda), x\in[c,b]\end{cases} \qquad (30)$$

eşitlikleri ile tanımlı ϕ ve χ fonksiyonları $[a,c)\cup(c,b]$ de (1) denklemini ve (4), (5) geçiş şartlarını sağlayacaklardır. Ayrıca $\phi(x,\lambda)$ çözümü (2) sınır şartını, $\chi(x,\lambda)$ ise (3) sınır şartını sağlayacaktır. Aşağıdaki;

$$\omega_i := W_\lambda(\phi_i,\chi_i;x), i=1,2$$

$$\omega(x,\lambda) := W_\lambda(\phi,\chi;x) = \begin{cases}\omega_1(x,\lambda), x\in[a,c)\\ \omega_2(x,\lambda), x\in(c,b]\end{cases}$$

gösterimlerinden de yararlanacağız.

3. 2. Lemma

Özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ ve her $x\in[a,c)\cup(c,b]$ için $\omega(x,\lambda)\neq 0$ dır.

İspat. Önce özdeğer olmayan her λ ve her $x\in[a,c)$ için $\omega(x,\lambda)\neq 0$ olduğunu ispat edelim.

Aksini kabul edelim. O halde özdeğer olmayan en az bir $\lambda_0\in\mathbb{C}$ ve en az bir $x_0\in[a,c]$ için $\omega(x_0,\lambda_0)=0$ olur. Bu halde $\omega_1(x_0,\lambda_0)=0$ olur. Wronskiyenin iyi bilinen özelliğinden dolayı (Naimark, 1967) bu durumda her $x\in[a,c]$ için $\omega(x,\lambda_0) = W_\lambda(\phi_1,\chi_1;x)=0$ olacaktır. O halde $\phi_1(x,\lambda_0)$ ve $\chi_1(x,\lambda_0)$ lineer bağımlı olacak, yani

$\chi_1(x,\lambda_0) = k_1\phi_1(x,\lambda_0), x\in[a,c)$ olacak şekilde $k_1\neq 0$ sayısı mevcuttur. Buradan, $\chi_1(a,\lambda_0) = k_1\phi_1(a,\lambda_0)=0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\chi(a,\lambda_0)=0$ olur. Böylece $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (2) sınır şartını da sağlamış olur. $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ değeri için (1) denkleminin, (3) sınır şartını ve (4), (5) geçiş şartlarını da sağladığından $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ için (1)-(5) probleminin çözümü olur. Diğer taraftan $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonunun tanımı gereği $\chi(b,\lambda_0)=\alpha_2\lambda_0+\beta_2$, $\chi'(b,\lambda_0)=\alpha_1\lambda_0+\beta_1$ eşitlikleri sağlanır.

$\rho=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ olduğu için sonuncu iki eşitlikten $\chi(b,\lambda_0)$ ve $\chi'(b,\lambda_0)$ sayılarının en az birinin sıfırdan farklı olduğu elde edilir. Yani $\chi(x,\lambda_0)\neq 0$ dır. O halde $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ için (1)-(5) probleminin çözümüdür, yani özfonksiyondur. Bu ise $\lambda=\lambda_0$ sayısının özdeğer olmadığı varsayımı ile çelişkidir. Böylece özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ ve her $x\in[a,c)$ için $\omega(x,\lambda)\neq 0$ olduğu ispat olunur. $x\in(c,b]$ durumu için de ispat tam benzer şekilde yapılabilir.■

Bu teoremden ve Wronskiyenin özelliklerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

3. 1. Sonuç Özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\phi_1(x,\lambda)$, $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonları $[a,c]$ aralığında, $\phi_2(x,\lambda)$, $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları ise $[c,b]$ aralığında lineer bağımsızdırlar.

3. 1. Sonuç gereği özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için (1) diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$u(x,\lambda) = \begin{cases}C_1\phi_1(x,\lambda)+D_1\chi_1(x,\lambda), x\in[a,c)\\ C_2\phi_2(x,\lambda)+D_2\chi_2(x,\lambda), x\in(c,b]\end{cases} \qquad (31)$$

biçiminde ifade edebiliriz; burada C_1,D_1,C_2,D_2 keyfi sabitlerdirler. O halde sabitin değişimi yöntemini (Naimark, 1967) uygulayarak (19) homojen olmayan denkleminin genel çözümünü $x \in [a,c)$ için

$$U_1(x,\lambda) = \chi_1(x,\lambda)\int_a^x \frac{\phi_1(y,\lambda)}{\omega_1(y,\lambda)} F_1(y)dy +$$

$$+\phi_1(x,\lambda)\int_x^c \frac{\chi_1(y,\lambda)}{\omega_1(y,\lambda)} F_1(y)dy + C_1\phi_1(x,\lambda) + D_1\chi_1(x,\lambda) \quad (32)$$

biçiminde, $x \in (c,b]$ için ise

$$U_1(x,\lambda) = \chi_2(x,\lambda)\int_c^x \frac{\phi_2(y,\lambda)}{\omega_2(y,\lambda)} F_1(y)dy +$$

$$+\phi_2(x,\lambda)\int_x^b \frac{\chi_2(y,\lambda)}{\omega_2(y,\lambda)} F_1(y)dy + C_2\phi_2(x,\lambda) + D_2\chi_2(x,\lambda) \quad (33)$$

biçiminde ifade edebiliriz. (19) diferensiyel denkleminin (32) ve (33) eşitlikleri ile verilmiş genel çözümünü (20)-(23) şartlarında yerine yazarak C_i, D_i sabitlerini bulabiliriz. (32) ifadesini (20) sınır şartında yerine yazarsak $D_1\chi(a,\lambda) = 0$ eşitliğini elde ederiz. λ özdeğer olmadığı için $\chi(a,\lambda) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $D_1 = 0$ dır. (33) ifadesini (21) sınır şartında yerine yazarsak, $C_2 = \dfrac{F_2}{\omega_2(b,\lambda)}$ eşitliğini elde ederiz. D_1 ve C_2 için bulduğumuz değerleri de dikkate alarak (32) ve (33) ifadelerini (22) ve (23) geçiş şartlarında yazarsak, C_1 ve D_2 değerlerini bulmak için aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} \gamma_1\phi_1(c,\lambda)C_1 - \delta_1\chi_2(c,\lambda)D_1 = -\gamma_1\chi_1(c,\lambda)\displaystyle\int_a^c \frac{\phi_1(y,\lambda)}{\omega_1(y,\lambda)}F_1(y)dy + \\ \qquad + \delta_1\phi_2(c,\lambda)\displaystyle\int_c^b \frac{\chi_2(y,\lambda)}{\omega_2(y,\lambda)}F_1(y)dy + \delta_1\frac{F_2}{\omega_2(b,\lambda)}\phi_2(c,\lambda) \\ \gamma_2\phi_1'(c,\lambda)C_1 - \delta_2\chi_2'(c,\lambda)D_2 = -\gamma_2\chi_1'(c,\lambda)\displaystyle\int_a^c \frac{\phi_1(y,\lambda)}{\omega_1(y,\lambda)}F_1(y)dy + \\ \qquad + \delta_2\phi_2'(c,\lambda)\displaystyle\int_c^b \frac{\chi_2(y,\lambda)}{\omega_2(y,\lambda)}F_1(y)dy + \delta_2\frac{F_2}{\omega_2(b,\lambda)}\phi_2'(c,\lambda) \end{cases}$$

Bu sistemin determinantı $-\delta_1\delta_2\omega_2(c,\lambda) \neq 0$ olduğu için bir tek çözümü bulunur. $\phi_i(x,\lambda), \chi_i(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımlarından yararlanarak sonuncu denklem sisteminden

$$C_1 = \int_c^b \frac{\chi_2(y,\lambda)}{\omega_2(y,\lambda)}F_1(y)dy + \frac{F_2}{\omega_2(y,\lambda)} ,$$

$$D_2 = \int_a^c \frac{\phi_1(y,\lambda)}{\omega_1(y,\lambda)}F_1(y)dy$$

elde edilir. C_i, D_i sabitleri için bulduğumuz değerleri (32) ve (33) ifadelerinde yerine yazarak gerekli düzenlemeleri yaparsak, (19)-(23) probleminin çözümü için bütün $[a,c) \cup (c,b]$ delinmiş aralığında

$$U_1 = \chi(x,\lambda)\int_a^x \frac{\phi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)}F_1(y)dy +$$

$$\phi(x,\lambda)\int_a^x \frac{\chi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)}F_1(y)dy + \frac{F_2}{\omega_2(b,\lambda)}\phi(x,\lambda)$$

formülünü elde ederiz.

3. 1. Teorem

Özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı (9), (10) eşitlikleri ile tanımlı olan A operatörünün regüler değeridir ve ayrıca $R(\lambda, A) : H_{p,r,\rho} \to H_{p,r,\rho}$ rezolvent operatörü kompakt operatördür.

İspat.

$$G_1(x,y;\lambda) := \begin{cases} \dfrac{\chi(x,\lambda)\phi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)} & a \le y \le x \le b, x, y \neq c \\ \dfrac{\phi(x,\lambda)\chi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)} & a \le x \le y \le b, x, y \neq c \end{cases}$$

gösteriminden yararlanarak sonuncu formülü

$$U_1(x,\lambda) = \int_a^b G_1(x,y;\lambda)F_1(y)dy + \frac{F_2}{\omega(b,\lambda)}\phi(x,\lambda)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buradan $R(\lambda, A)$ rezolvent operatörü için

$$R(\lambda,A)F = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^b G_1(x,y;\lambda)F_1(y)dy + \frac{F_2}{\omega(b,\lambda)}\phi(x,\lambda) \\ \displaystyle\int_a^b (G_1(\bullet,y;\lambda))'_b F_1(y)dy + \frac{F_2}{\omega(b,\lambda)}(\phi(\bullet,\lambda))'_b \end{pmatrix}$$

formülü elde edilir.

Şimdi $B_\lambda : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $\widetilde{B}_\lambda : H_{p,r,\rho} \to H_{p,r,\rho}$ ve $C_\lambda : H_{p,r,\rho} \to H_{p,r,\rho}$ operatörlerini

$$B_\lambda F_1 := \int_a^b G_1(x,y;\lambda)F_1(y)dy$$

$$\widetilde{B}_\lambda F := \begin{pmatrix} B_\lambda F_1 \\ (B_\lambda F_1)'_b \end{pmatrix}$$

$$C_\lambda F := \begin{pmatrix} \frac{F_2}{\omega(b,\lambda)}\phi(x,\lambda) \\ \frac{F_2}{\omega(b,\lambda)}(\phi(\bullet,\lambda))'_b \end{pmatrix}$$

eşitlikleri ile tanımlarsak, $R(\lambda, A)$ rezolvent operatörünü $R(\lambda, A) = \widetilde{B}_\lambda + C_\lambda$ biçiminde ifade edebiliriz.

B_λ operatörü $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında kompakt olduğu için (Titchmarsh, 1962), $\widetilde{B}_\lambda$ operatörü $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında kompaktdır. C_λ operatörünün $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında kompakt olduğu açıktır. Dolayısıyla özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(\lambda, A)$ operatörü de $H_{p,r,\rho}$ uzayında kompakt olacaktır.■

4. ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN SERİSİNE AÇILIM

Önce aşağıdaki teoremi ispat edelim.

4. 1. Teorem

(9) ve (10) eşitlikleri ile tanımlı A operatörü $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında kendine eşleniktir.

İspat. A operatörünün (9) eşitliği ile verilmiş D(A) tanım bölgesinin $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğu açıktır. Ayrıca, 3.1.Teorem gereği A operatörün en az bir regüler değeri mevcut olduğu için, kapalı operatördür. Yine 3.1.Teorem gereği $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ olacak şekilde her $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı için $A - \lambda I$ ve $A + \bar{\lambda} I$ operatörlerinin her birinin değer bölgeleri bütün $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayı ile çakışmaktadır, yani $(A - \lambda I)D(A) = H_{p,r,\rho}$ ve $(A - \bar{\lambda} I)D(A) = H_{p,r,\rho}$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca 2. 1. Lemma gereği A operatörü simetriktir. O halde simetrik operatörlerin genişlemesi hakkında Fonksiyonel Analizden iyi bilinen teorem gereği (bak örneğin (Lang, 1983) A operatörü kendine eşlenik olacaktır. ■

Sonuç olarak, 3. 1. Teorem, 4. 1. Teorem ve İntegral Denklemler teorisinden iyi bilinen Hilbert-Schmidt Teoremi (Taylor, 1958) gereği aşağıdaki teorem elde edilir (Glazman, 1965).

4. 2. Teorem

$H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında (9), (10) eşitlikleri ile tanımlı A operatörünün sayılabilir sayıda reel özdeğeri mevcuttur, her özdeğerin cebirsel katı sonludur, özdeğerler dizisi alttan sınırlıdır ve sonlu yığılma noktası yoktur. Her özdeğer cebirsel katı sayıda yazılmak kaydı ile, özdeğerler dizisini $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ biçiminde sıralayarak, uygun normlandırılmış öz elementler $\phi_n := \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ (\varphi_n)'_b \end{pmatrix}, \left(\|\phi_n\|_{H_{p,r,\rho}} = 1\right) n = 1,2,...$ biçiminde gösterilmek üzere, her $F \in H_{p,r,\rho}$ elemanı için $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, c_n = \langle F, \phi_n \rangle_{H_{p,r,\rho}}$ Fourier serisi $H_{p,r,\rho}$ Hilbert uzayında F elemanına yakınsak olacaktır;

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F, \phi_n \rangle_{H_{p,r,\rho}} \phi_n \qquad (34)$$

Bu teoremden aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilir.

4. 1.Sonuç her $f \in L_2[a,b]$ fonksiyonu $L_2([a,b], r)$ Hilbert uzayında (1)-(5) sınır-değer- geçiş probleminin $\{\varphi_n\}, n = 1,2,...$ öz fonksiyonlar sisteminin $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(y)\varphi_n(y)r(y)dy\right)\varphi_n(x)$ serisine açılır.

İspat. Bu sonucun ispatı için (34) formülünde $F \in H_{p,r,\rho}$ elemanını özel olarak $F\begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ almak yeterlidir. (Burada $L_2([a,b], r)$ ve $L_2[a,b]$ Hilbert uzaylarının lineer uzaylar olarak aynı olduğuna dikkat etmek gerekir.)■

4.2. Sonuç her $f \in L_2[a,b]$ fonksiyonu için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\varphi_n)'_b\right]^2 = \frac{\rho}{p(b)}$$
(35)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n)'_b \varphi_n(x) = 0 \qquad (36)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (34) formülünü

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} < F, \phi_n >_{H_{p,r,\rho}} .\varphi_n(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} < F, \phi_n >_{H_{p,r,\rho}} .(\varphi_n)'_b \end{pmatrix} \qquad (37)$$

biçiminde yazalım. Bu formülde özel olarak $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alırsak, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(b)}{\rho} (\varphi_n)'_b .\varphi_n(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(b)}{\rho} \left[(\varphi_n)'_b \right]^2 \end{pmatrix}$ eşitliği, yani (35) ve (36) eşitliklerini elde ederiz.■

4.3. Sonuç her $f \in L_2[a,b]$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f(y)\varphi_n(y)dy \right) .(\varphi_n)'_b = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. Bu sonucun ispatı için (37) formülünü $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ elemanı için yazmak yeterlidir.■

5. SONUÇ

(Walter, 1973) makalesinde, sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemlerinin operatör-teorik yorumunu vererek, özfonksiyonlar sisteminin serisine açılım teoremini ispatlamıştır. Bu çalışmada uygun sonuçlar süreksiz katsayılı ve geçiş şartları bulunduran problemler için genelleştirilmiştir. Bunun için hem literatürde bilinen (Fulton, 1977; Titchmarsh, 1962; Walter, 1973 kaynaklarına bak) yöntemlerden yararlanılmış, hem de yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir. İncelediğimiz (1)-(5) problemi orjinaldir, bulunan sonuçlar ise yenidir.

6. KAYNAKLAR

Fulton, C. T. 1977. Two-point Boundary Value Problems With Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, England. Proc. Roy. Soc. Edin. 77A, 293-308.

Glazman, J. M. 1965. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.

Lang, S. 1983. Real Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Langer, R. E. 1932. A Problem in Diffusion or in the Flow of Heat For A Solid in Contact With A Fluid, Japan. Tohoku Math. J. 35 , 360-375.

Mukhtarov, O, Sh and Demir, H. 1999. Coerciveness of the Discontinuous Initial-Boundary Value Problem For Parabolic Equations, Israel. İsrael Journal of Mathematics 114 , 239-252.

Naimark, M. N. 1967. Linear Differential Operators. Ungar, New York,USA.

Rasulov, M. L. 1967. Methods of Contour Integration. North-Holland Pub. Comp. Amsterdam.

Taylor, A. E. 1958. Introduction to Functional Analysis. John Wiley.

Tikhonov, A. N and Samarskii, A. A. 1963. Equations of Mathematical Physics. Oxford and New York, Pergamon, USA.

Titchmarsh, E. C. 1962. Eigenfunctions Expansion Associated With Second Order Differential Equations I 2nd edn, Oxford Univ. Press, London.

Titeux, I and Yakubov, Y. 1997. Completeness of Root Functions For Thermal Conduction in a Strip With Piecewise Continuous Coefficients. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 7, (7), 1035-1050.

Walter, J. 1973. Regular Eigenvalue Problems With Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. Verlag. Math. Z. 133, 301-312.