



BURULMA MOMENTİ ETKİSİ ALTINDAKİ METAL-MATRİS KOMPOZİT MALZEMEDE GERİLME ANALİZİ

Fuat OKUMUŞ

1. Mekanize Piyade Tümen Komutanlığı, Mamak/Ankara

Geliş Tarihi : 13.07.2001

ÖZET

Bu çalışmada, burulma momenti etkisi altında şekil değiştirmeye zorlanan, dikdörtgen kesitli, dört tabakalı, çapraz takviyeli metal-matris kompozit malzemelerde oluşan gerilmeler incelenmiştir. Problemin çözümünde Elastisite teorisinin analitik çözüm yöntemi ile, homojen ortotropik levhalar için geliştirilen çözüm yöntemleri uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çalışma, $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ şeklinde düzenlenmiş, dört tabakalı, çelik fiber-alüminyum matristen oluşmuş kompozit malzemeler üzerinde gerçekleştirilmiştir. İnceleme sonucunda, burulma etkisi altındaki homojen ortotropik levhalar için geliştirilen çözüm yönteminin, gerekli dönüşümler yapılarak çok tabakalı çapraz takviyeli kompozit malzemelere uyarlanması sonucunda, analitik çözüme göre daha kullanışlı ve pratik bir çözüm yöntemi olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler : Homojen ortotropik levha, Burulma momenti, Elastisite

STRESS ANALYSIS OF THE METAL-MATRIX COMPOSITE MATERIAL UNDER TORSION

ABSTRACT

In this study, stress analysis has been investigated in the metal-matrix composite materials which has rectangular section, four ply and cross-forced. In the solution of the problem, the method of the analytic solution of the elasticity theory and the solution for torsion of homogeneous orthotropic plates has been used and the results of the study has been evaluated and compared to the other. The study has been realised on the composite materials which has four ply laminate and made of steel fiber-aluminium matrix and in both the $[0/45]_s$ and the $[45/0]_s$ lay-ups. In the results of the study has been demonstrated that the solution for the torsion of homogeneous orthotropic plates is more convenient and practice than the analytic solution by making requirement modifications.

Key Words : Homogeneous orthotropic plates, Torsion, Elasticity

1. GİRİŞ

Metal-Matris kompozit malzemeler genellikle düşük dayanım özelliğine sahip matris yapı ile, yüksek dayanım özelliklerine sahip fiber elemanların birleşiminden oluşan malzemelerdir. Böylece fiber elemanların rijit ve yüksek dayanım özellikleri ile matris yapının sünek mekanik özelliklerinin

karişımından üstün dayanım özelliklerine sahip kompozit malzemeler elde edilir.

Kompozitin dayanım özelliklerinde kompoziti oluşturan malzemelerin fiziksel ve kimyasal özelliklerinin etkisi yanı sıra, kompozitin biçimsel yapısı da dayanım özellikleri üzerinde etkin olmaktadır. Uygulamada .birden fazla kompozit levhalar üst üste yerleştirilerek çok tabakalı

kompozit malzemeler elde edilmektedir. Oryantasyon açısını (malzemenin asal eksen doğrultuları ile fiber doğrultusu arasındaki açı) değiştirerek tasarımın gerektirdiği çeşitli dayanım özellikleri sağlanabilmektedir. Bu şekilde düzenlenen kompozit yapılarda, malzemenin kalınlığı artacağından, kuvvet altında oluşan gerilmelerin hesaplanmasında, elastisite teorisinin düzlem gerilme şartları oluşmamaktadır. Bu nedenle uygulamada bu tür kompozit malzemeler için pratik çözüm yöntemlerine gereksinim duyulmuştur. Kurtz and Sun (1988) böyle bir ihtiyacı karşılamak için homojen çözüm yöntemini geliştirmişlerdir. Yöntem; Lekhnitskii tarafından ortaya konulan ve burulma momenti altında burulan homojen ortotropik düzlemsel levhalardaki gerilmelerin hesaplanması için geliştirilen çözüm yönteminin, kompozit levhalara, gerekli dönüşümler yapılarak uygulanması temeline dayanmaktadır. Bu çözüm yöntemi ile burulma momenti etkisi altındaki bir “çok tabakalı” kompozit malzemenin G_{23} kayma modülü ve levhalar arası τ_{xz} kayma gerilmesi hesaplanabilmektedir. Yöntem temelde, homojen ortotropik levhalar için ön görülmüş olan çözümün, “çok tabakalı” kompozit malzemelere uyarlanmasından ibarettir. Homojen çözüm yöntemi simetrik ve simetrik olmayan “çok tabakalı” kompozit yapılara uygulanabilen bir yöntemdir. Bu uygulama için temel koşul, kompozit levhaların x-y düzlemine göre ortotropik olmaları ve kompozit cismin x-y düzlemine paralel bir plak geometrisine sahip olmasıdır (Pagano, 1974).

Bu çalışmada $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ şeklinde düzenlenmiş, çelik fiber ve alüminyum matristen

oluşmuş 4 tabakalı kompozit malzemelerde burulma momenti etkisi altında meydana gelen gerilmeler incelenmiştir. Gerilmelerin bulunmasında, elastisite teorisi çözüm yöntemi ile ortotropik levhalar için geliştirilmiş homojen çözüm yöntemi ayrı ayrı kullanılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. KOMPOZİT LEVHALARIN YAPIMI

Çalışmada kullanılan kompozit malzemede, fiber olarak 0.75 mm çapında çelik (M.K.E. üretimi Ç.1050), matris yapı olarak ta % 2.5 magnezyum ilave edilmiş döküm alüminyum alaşımı kullanılmıştır. Kompozit levhaların yapımı metal kalıplar, hidrolik pres ve elektrikli ısıtıcılar kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Metal kalıpların alt ve üst baskı levhaları 1 mm. kalınlıklarında yapılarak 2 mm. kalınlığında kompozit lamina tabakaları elde edilmiştir. Üretim aşamasında hidrolik pres ile 30 MPa’lık basınç, 600 °C sıcaklık derecesinde alt ve üst kalıplara uygulanmış, matris tabaka ile fiber arasında uygun birleşme meydana gelerek kompozit yapı oluşturulmuştur. Böylece, 4 tabakalı ve değişen oryantasyon açılarına göre $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ yerleşimli kompozit levhalar elde edilmiştir. Elde edilen kompozit malzemenin mekanik özellikleri; kopma testleri ve gerinim ölçümleriyle (Strain gauges) deneysel olarak tespit edilmiştir. Kompozit malzemenin mekanik özellikleri Tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1. Kompozit Malzemenin Mekanik Özellikleri

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	X (Eksenel dayanım) (MPa)	Y (Yanal dayanım) (MPa)	Z (Kayma dayanımı) (MPa)	ν_{12}
82	73	32	210	22.3	42.6	0.3

3. MATEMATİK FORMÜLASYON

3. 1. Elastisite Teorisinin Teorik Analizi

Problemin geometrik tanımlaması Şekil 1’de gösterilmiştir.

Şekilden görüleceği üzere kompozit levha, burulma momenti etkisi altında X-ekseni etrafında şekil değişimine zorlanmaktadır. Koordinat eksen takımının başlangıç noktası kompozit levhanın sol kenar orta noktasına yerleştirilmiştir. Uygulanan burulma momenti sonucunda levha kesitinde meydana gelen burulmanın levha boyunca aynı

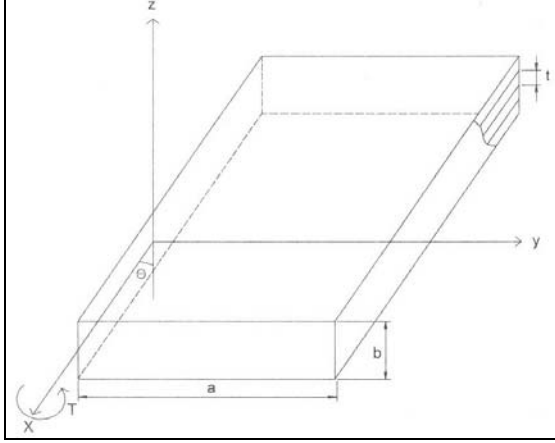
düzlem içerisinde kaldığı kabul edilmiştir. Elemanter elastisite teorisine göre bu şekildeki deformasyon durumunda x-z ve y-z düzlemlerindeki kayma gerilmesi bileşenleri dışındaki tüm gerilme bileşenleri sıfır olacaktır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}(y, z) \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(y, z)\end{aligned}\quad (1)$$

n tabakadan oluşmuş bir levha kompozisyonunda denge denklemleri yazılarak sadeleştirme yapıldığında,

$$\frac{\partial(\tau_{yz}^n)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz}^n)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

elde edilir.



Şekil 1. Problemin geometric tanımlanması

\bar{U} yer değiştirme vektörünün x, y ve z doğrultularındaki bileşenleri sırayla u, v ve w ise sınır şartları yazıldığında,

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^r &= 0 \quad y = 0, a \\ \tau_{xz}^n &= 0 \quad z = \pm b/2 \end{aligned} \quad (3)$$

olur. Burada yer değiştirme vektör bileşenlerinin tabakalar arasında sürekli olduğu kabul edilmiştir. β burulma açısı olmak üzere yer değiştirme vektör bileşenleri,

$$\begin{aligned} u &= \beta[z(y-z) + f^n(y,z)] \\ v &= -xz\beta \\ w &= xy\beta \end{aligned} \quad (4)$$

şekindedir. Ortotropik bir malzeme için kayma gerilmeleri, Hooke yasasına göre,

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^n &= G_{xy}^n \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \tau_{xz}^n &= G_{xz}^n \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, G_{xy}^n ve G_{xz}^n modülleri, x-y ve x-z düzlemlerindeki n'inci tabakadaki kayma modülleridir. (2), (4) ve (5) eşitliklerinin bağlamından,

$$G_{xy} \frac{\partial^2 f^n(y,z)}{\partial y^2} + G_{xz} \frac{\partial^2 f^n(x,y)}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

elde edilir. (6) eşitliği sınır şartlarıyla uyum içerisinde olup Fourier serisi formuyla,

$$f^n(y,z) = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \beta [A_m^n \text{Cosh}(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \text{Sinh}(\mu^n \lambda_m z)] \text{Cos}(\lambda_m y) \quad (7)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \mu^n &= (G_{xy}^r / G_{xz}^n)^{1/2} \\ \lambda_m &= m \cdot \pi / a \\ A_m^n, B_m^n &= \text{Sabit} \end{aligned} \quad (8)$$

şekindedir.

(6) eşitliğini (4) eşitliği ile işleme sokarak,

$$U^n = z\beta(y-2) + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \beta [A_m^n \text{Cosh}(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \text{Sinh}(\mu^n \lambda_m z)] \text{Cos}(\lambda_m y)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^n &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} -\lambda_m \beta [A_m^n \text{Cosh}(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \text{Sinh}(\mu^n \lambda_m z)] \text{Sin}(\lambda_m y) \end{aligned} \quad 9(a,b,c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^n &= 2\beta(y-1) + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \mu^n \beta [A_m^n \text{Sinh}(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \text{Cosh}(\mu^n \lambda_m z)] \text{Cos}(\lambda_m y) \end{aligned}$$

elde edilir.

(9.b) denklemi (3) ile verilmiş sınır şartlarıyla sağlanır. (9.c) eşitliğinin birinci terimini Fourier sinüs serisine açıldığında (τ_{xz} gerilmesi y-eksenine göre tek fonksiyondur).

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^n &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} -\frac{8}{a} \lambda_m^2 + \mu^n \beta [A_m^n \text{Sin}(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \text{Cosh}(\mu^n \lambda_m z)] \text{Cos}(\lambda_m y) \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. Simetrik levhalar için τ_{xz} gerilme bileşeni orta düzlemde, $z = 0$ eksenine göre simetrik olmalıdır. Bunun doğal sonucu olarak ara yüzeyde

$$A_m^{n/2} = 0 \quad (11)$$

olur. β burulma açısının ölçülmesi zordur. Halbuki burulma momentinin bulunması kolaydır. Bu durumda burulma açısının yok edilmesi için, kayma gerilmelerinin neden olduğu toplam momentin kompozit malzemeye uygulanan toplam momente eşit olması gerekliliğinden,

$$\iint (y\tau_{xz}^n - z\tau_{xy}^n) dydz = T \quad (12)$$

elde edilir.

τ_{xz}^n ve τ_{xy}^n kayma gerilmeleri bileşenlerini (12) eşitliğinde yerlerine koyar ve integrasyon işlemine tabi tutulursa,

$$T = 4\beta \sum_{n=1}^k \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{zG_{xy}}{\mu^n \lambda_m} \left[A_m^n \sinh(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \cosh(\mu^n \lambda_m z) \right] - \frac{G_{xy}^n}{(\mu^n \lambda_m)^2} \left[A_m^n \cosh(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \sinh(\mu^n \lambda_m z) \right] - \lambda_m^2 G_{xz}^n \left[A_m^n \cosh(\mu^n \lambda_m z) + B_m^n \sinh(\mu^n \lambda_m z) \right] - \frac{8z}{a\lambda_m^2} I_z^{n+1} \quad (13)$$

olur. (13) denklemini terim terime toplama yapılacağından bilgisayar yardımıyla kolayca çözümlenir.

3. 2. Homojen Çözüm

Burulma momentine maruz homojen ortotropik düzlemsel levhalarda gerilme analizleri Lekhnitskii, (1981) tarafından çözümlenmiştir. Elde edilen çözümler (1) koşullarına uyan herhangi bir anizotrop malzeme için doğru sonuçlar vermektedir. Homojen çözümde malzemenin özel bir konumu temel alındığında (oryantasyon açısının belli bir değeri) problemin çözümü daha basit hale gelebilmektedir. Burada Lekhnitskii'nin kompozit malzemeler için geliştirdiği gerilme hesaplama yöntemi, $[0^0/45^0]_s$ ve $[45^0/0^0]_s$ şeklinde düzenlenmiş çok katlı çapraz takviyeli kompozit yapıya uygulanmıştır. Homojen yöntemde öncelikle çok tabakalı kompozit levhaların, elastik katı cisim eşdeğerinin hesaplanması gerekir. Eşdeğer katı cismin kayma modülü değerinin bulunması, kompozit levhaların tek tek kayma modüllerinin değerlendirilmesi ile elde edilir.

Tek tabakalı en basit bir kompozit levha için eşdeğer kayma modülü, bu yöntemle aşağıdaki gibi yazılabilir:

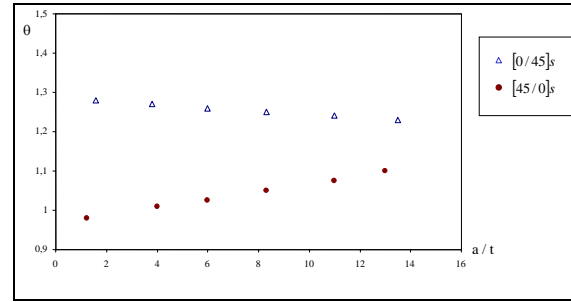
$$G_{xy} = G_{12} / G_{xy} = 1/2 [1/G_{12} + 1/G_{13}] \quad (14)$$

Burada; 1, 2 ve 3 indisleri, 1, 2 ve 3 doğrultularındaki malzeme özelliklerini gösterir. G_{xy} ve G_{xz} kayma modülü hesaplamalarında, tek bir levha kalınlığında kayma modülünün değişmediği kabul edilmiştir. (14) eşitliği kullanılarak dört tabakalı $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ konumlu metal-matris kompozit malzemenin kayma modülleri,

$$G_{12} = 32 \text{ GPa} \\ G_{13} = 16 \text{ GPa}$$

olarak hesaplanmıştır.

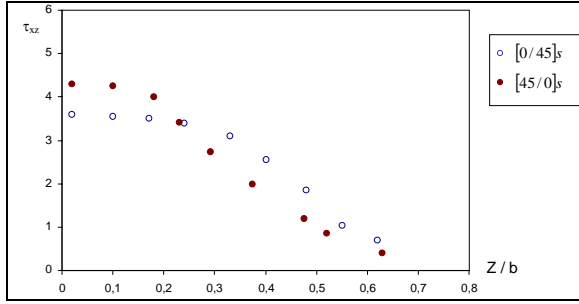
Lamina tabakaları arası burulma açılarının karşılaştırılması Şekil 2'de gösterilmiştir.



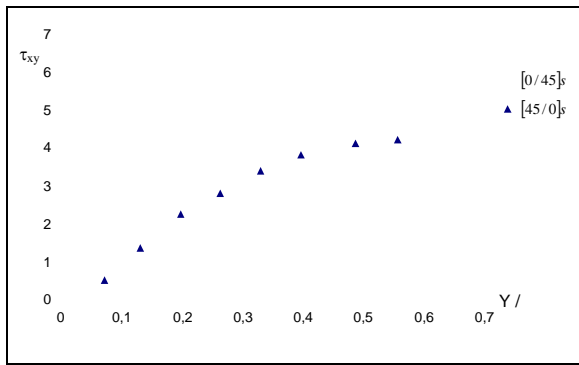
Şekil 2. Burulma açısının lamina tabakaları arasındaki değişimi

Şekil 2'den görüleceği gibi, kompozit malzemenin genişliğinin bir tabaka lamina kalınlığına oranı olan (a/t) büyüklüğünün değerlendirilmesinde, burulma açısı, a/t 'nin küçük değerlerinde büyük olmaktadır. a/t oranının büyümesiyle, diğer bir deyimle yapının homojen cisim şartlarına yaklaşmasıyla burulma açısı değerlerinin $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ konumlu kompozit malzemelerde birbirlerine yaklaştığı gözlemlenmektedir. Kompozit malzemede serbest kenar boyunca meydana gelen yanal kayma gerilmesi yayılımı Şekil 3'te verilmiştir.

Kompoziti oluşturan lamina tabakalarının geometrik boyutlarındaki değişimin kayma gerilmesi üzerine olan etkisi açık olarak görülmektedir. Lamina tabakalarındaki kalınlık değişiminin, kompozit malzemenin kalınlığına oranının 0.25 olduğu noktada bir kesişim meydana gelmektedir. Kompozit yapının düzlemdeki kayma gerilmesinin lamina tabakalarının genişlik değişimine göre yayılımı Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 3. Kompozit malzemede τ_{xz} yanal kayma gerilmesinin malzeme geometrisine bağlı değişimi (z = lamina kalınlık değişimi, b = lamina kalınlığı).



Şekil 4. Düzlemdeki kayma gerilmesinin lamina genişliğine bağlı değişimi (Y = lamina genişliği değişimi)

Şekil 3’de olduğu gibi Şekil 4’ten de görüleceği gibi, $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ yerleşimli kompozit levhalardaki kayma gerilmeleri ile eşdeğer homojen cismin oluşturduğu kayma gerilmeleri birbirine yakın değerler vermektedir. Kompozit malzemedeki lamina tabakalarının artırılması ile bu değerlerin birbirlerine daha da yaklaşacağı beklenen bir durumdur. Uygulamada genellikle çok tabakalı kompozit levhalardan oluşmuş yapılarda, lamina tabakası miktarı ile, kompozit levha genişliğinin lamina kalınlığına oranı geniş seçildiğinden, bu durum homojen elastik cisim uygulamasının pratik

uygulamalar için uygun bir çözüm yöntemi olduğunu göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada Lekhnitskii, (1981) tarafından geliştirilen homojen ortotropik düzlemsel levhalardaki gerilme analizi çözüm yöntemi, $[0/45]_s$ ve $[45/0]_s$ şeklinde yerleştirilmiş çok tabakalı kompozit yapılara uygulanarak, burulma momentinin oluşturduğu kayma gerilmeleri incelenmiştir. Gerilmelerin hesaplanmasında çok tabakalı çapraz takviyeli laminalardan oluşmuş kompozit malzemeye eş değer, homojen elastik cisim eşdeğeri hesaplanarak gerilme analizleri yapılmıştır. Homojen elastik cisim modelinde, burma kuvvetinin neden olduğu şekil değişimlerinin, çapraz takviyeli laminalardan oluşmuş çok tabakalı kompozit malzemeler için öngörü sağlayacak şekilde çözüm sonuçları verdiği görülmüştür. Bir çok uygulama alanlarında, kompozit levhaların genişliklerinin lamina tabakası kalınlıklarına oranının büyük olması nedeniyle homojen elastik çözüm gerçel değerlere yakın çözüm sonuçları vermektedir. Bu nedenle çapraz takviyeli çok tabakalı kompozit malzemeler için uygulama kolaylığı olmayan analitik çözüm yerine, pratik kolaylık sağlayan ve gerçel değerlere yakın çözüm sonuçları veren homojen elastisite çözüm yöntemi elverişli bir yöntem olarak görülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Kurtz, R. D. and Sun, C. T. 1988. “Torsion of Thick Laminates”, ASTM – 9th Symposium on Composite Materials.

Lekhnitskii, S. G. 1981. “Theory of Elasticity of Anisotropic Body”, Mir Publishers, USSR.

Pagano, N. J. 1974. “Exact Moduli of Anisotropic Laminates “ in Composite Materials, Vol. 2, New York.