PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
PAMUKKALE UNIVERSITY ENGINEERING COLLEGE
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES

YIL : 2007
CİLT : 13
SAYI : 1
SAYFA : 69-73

İNDİREKT SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİNİN ELEKTROSTATİK ALAN PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Sami EKİCİ, Selçuk YILDIRIM
Fırat Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü, 23119-Elazığ

Geliş Tarihi : 08.08.2005

ÖZET

Bu çalışmada, İndirekt Snır Elemanları Yöntemi (ISEY) iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin analizi yapılmıştır. Çalışmanın temel amacı, sayısal bir çözüm tekniği olan indirek sınır elemanları yönteminin elektrostatik alan problemlerinin çözümünde kullanılan etkili bir yöntem olduğunu göstermektir. Bu amaçla, ilk olarak yöntemin matematiksel formülasyonları gösterilmiştir. Uygulama bölümünde ise, paralel iki iletkenden oluşan sonsuz uzunluktaki bir iletim hattı geometrisi ele alınarak, MATLAB programlama dilinde yazılan ve ISEY adı verilen bir program ile analizi gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar ELECTRO paket programı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde, indirek sınır elemanları yönteminin iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümünde oldukça doğru sonuçlar verdiği ve kulanıcıya çözüm kolaylıyı sağladığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler : Sınır elemanları yöntemi, İndirekt sınır elemanları yöntemi, Elektrostatik alanlar.

THE APPLICATION OF INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD ON ELECTROSTATIC FIELD PROBLEMS

ABSTRACT

In this study, the analysis of the electric field problems has been performed by using indirect boundary element method. The main purpose of this study is to demonstrate indirect boundary element method which is a numerical method used in the electrostatic field calculations is an effective method. Firstly, the mathematical formulations of the method have been demonstrated. In application section, the analysis of transmission line model which has parallel two wires and infinite length has been performed by using ISEY. The obtained results are compared with ELECTRO software’s results. According to result, it is seen that the indirect boundary element method performs more accurate calculations for two dimensional electrostatic field problems; on the other hand it provides user easiness of solution.

Key Words : Boundary element method, Indirect boundary element method, Electrostatic fields.

1. GİRİŞ

Günümüzde elektromanyetik ekipmanların analizleri ve tasarımları, teçhizatın etkili ve verimli çalışmalarına yardımcı olmuştur. Alan dağılım hesaplamalarındaki doğruluk ve tertibat parametreleri, kullanılan araçların seçimindeki hassasiyeti gerektirir. Ayrıca maliyet ve çözüm hızı da etkili bir faktördür. Çözüm için üç temel yöntem kullanılmaktadır. Bunlar; deneysel, analitik ve sayısal yöntemlerdir (Yıldırım, 1999). Bu makalenin amacı sayısal bir çözüm tekniği olan Sınır Elemanları Yönteminin (SEY) açıklanmasıdır (Brebbia, 1984).

Çoğu fiziksel problemin analitik çözümünün olmaması ve deneysel çalışmaların hem zaman hem de maliyet açısından dezavantajlara sahip olması sayısal çözüm yöntemlerinin kullanımını yaygınlaştırmıştır. Doğruluğun artması, maliyetin düşürülmesi ve çözüm hızı sayısal yöntemlerin göze çarpan özellikleridir. En çok kullanılan sayısal yöntemler; sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleridir (Paris, 1997).

Sonlu Farklar yönteminde, ilk olarak incelenmek istenen bölge ızgaralandırılmalıdır. Bu yöntemde gösterilen bilinmeyen sayısı oldukça fazladır ve sınırların yanlış modellenmesi durumu söz konusudur (McPhee, 1997). Sonlu Elemanlar yönteminde ise, problem bölgesi alt alanlara böl melendirilir. Oluşturulan bilinmeyenlerin fazlalığı nedeniyle çözüm hem fazla zaman hem de büyük bir uğraş gerektirir. Bu yüzden büyük kapasiteli ve hızlı bilgisayarlara ihtiyaç duyulur (Lahiri, 2002).

Sınır Elemanlar yöntemi, sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi bölge tipi yöntemlere alternatif olarak gelişmiştir (Paris, 1997). Bu yöntemde, alan integral denklem formülasyonları sadece sınırlar üzerindeki bilinenler kullanılarak çözülür. Böylece problemin boyutsallığı bir derece indirgenmiş olur (Brebbia, 1984). Veri girişinin az olması ve dolayısıyla çözüm için harcanan zamanın az olması yöntemin önemli avantajlarıdır. Bunlara ilaveten bu yöntemle yapılan çözümler diğer yöntemlere göre daha fazla doğruluk gösterir. Özellikle açık alan problemleri alt bölmelemeye gerek duyulmadan kolaylıkla çözülebilir. Karmaşık geometriler kolay ve basit olarak doğru bir şekilde modellenebilir. Bu yöntemde iki çözüm tekniği kullanılır. Bunlardan biri direkt yöntem, diğeri ise indirekt yöntemdir (Yıldır, 1987). Direkt yöntemde, sınır integral denklemi sınır üzerinde verilen sınır şartları ile direkt olarak çözülürken indirekt yöntem, bir eşdeğer kaynak bulmak suretiyle çözüme gider.

İndirekt yöntemde, sınır üzerindeki herhangi bir nokta için kaynağın etkisi ve konumu ile ilişkili olan bir serbest uzay Green fonksiyonu altında tanımlanan sınır şartlarını karşılamak üzere, alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunur (Klimpke, 1983). Bu eşdeğer kaynak, bölgede herhangi bir noktadaki potansiyeli hesaplamak için kullanılır. Bilinmeyen potansiyel ifadesi bulunduktan sonra akı, kapasitans, indüktans gibi büyüklükler hesaplanabilir. Kısmi diferansiyel denklem yaklaşımı üzerine kurulu bu yöntemin en büyük avantajı, problemin boyutunun bir derece indirgenmesidir. Yani kaynaklar sadece sınırlar üzerine ve farklı ortamların ara kesitleri üzerine yerleştirilir. Ayrıca integral operatörleri, diferansiyel operatörlerinin sahip olmadığı sınırsızlık gibi arzulanan özelliklere sahiptirler. Farklı denklemlere uygulanabilen tanımlanmış yöntemlere rağmen, bu çalışmada sadece Laplace denklemlerinin çözümü ile ilgilenilecektir.

Bu yöntemde üç farklı formülasyon kullanılabilir:

- Tek kat formülasyonu
- Çift kat formülasyonu
- Green formülü

Tek kat formülasyonu birinci tip Fredholm integralini, çift kat formülasyonu ikinci tip Fredholm integralini içerir. Green formülü yaklaşımında ise birinci ve ikinci tip Fredholm integrallerinin her ikisi de kullanılır.

Sınır elemanları yönteminde cebirsel bir denklem sistemi ile ifade edilen farklı ortam özelliklerine sahip arakesitler, küçük sınır elemanlarına ayrıştırılarak integral denklemlerine indirgenir. Bir modeldeki ortam karakteristikleri, her bir ilgili bölge için sabit olarak alınır. Bir sınır elemanı üzerindeki alan, düğümlerdeki alan değerleri arasında bir analitik interpolasyon fonksiyonu olarak alınır (Yıldır, 1987).

Sınır elemanları yöntemi, homojen olan bölgelere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Özellikle açık alan problemlerinde veri girişlerinin kolayca yapılabilmesi ve işlem kolaylığı yöntemi diğer yöntemlerden üstün kılmaktadır. Parçalı homojen yapıya sahip geometrili bölgelerin incelenmesi iki yöntemle gerçekleştirilir. İlk yöntem, birbirinden farklı ortamların arakesitleri üzerine bir tek kat kaynağının yerleştirilmesidir (Klimpke, 1983). Bu durumda potansiyel doğal olarak sürekli olur, fakat potansiyelin normale göre türevi, yük miktarıyla orantılı olarak bir süreksizliğe sahip olacaktır. İkinci yöntem, her bir bölgeye ait olan iki tek kat kaynağının arakesit üzerine yerleştirilmesidir. Bu yöntemin önceki yöntemlerden avantajlı yanı, kullanılan matrislerin basite indirgenebilmesidir. Bölge, hem potansiyelin hem de normal türevinin sürekliliğe zorlandığı birçok küçük bölgeye bölünebilir. Bu tip bir bölmeleme işlemi, çözümü zorlaştıran büyük boyutlu matrislerin basite indirgenmesini sağlayarak çözümün daha kolay hale gelmesini sağlar.

2. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Bir elektrostatik alanda,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{1}$$

ve elektrik vektörü ($\vec{E}$), potansiyel (u) ifadesi kullanılarak ;

$$\vec{E} = -\nabla u \tag{2}$$

eşitlikleri yazılabilir (Chen, 1992). Serbest uzaydaki bir bölge için Maxwell denkleminden (Klimpke, 1983),

$$\nabla \bullet \vec{D} = 0 \tag{3}$$

yazılır. ε dielektrik sabiti olmak üzere homojen bir bölge için,

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \tag{4}$$

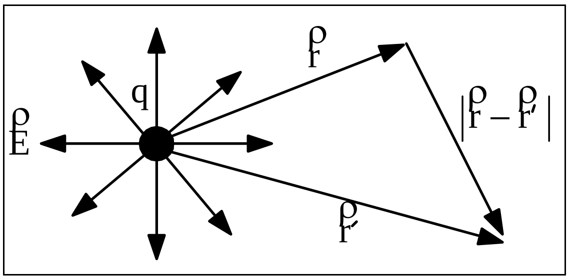
eşitliği sağlanır. Homojen bir bölge için denk. (2), (3) ve (4)' ten faydalanarak,

$$\nabla^2 u = 0 \tag{5}$$

Laplace denklemi elde edilir (Bonnet, 1999). Bir ∂B sınırı ile sınırlanmış homojen B bölgesi için Green teoremi (Tanaka, 1987):

$$\iint_B \left(u\,\nabla^2 G - G\,\nabla^2 u\right) dB = \int_{\partial B}\left(u\,\frac{\partial G}{\partial n} - G\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) dr' \tag{6}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 1. Noktasal yük

Burada; $\vec{r}$ incelenen nokta ve $\vec{r}'$ ise referans potansiyelin konumunu temsil etmektedir. $\vec{r}'$ nin ∂B bölgesinin içinde veya dışında olması durumu için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[u_i(\vec r')\,G_i(\vec r,\vec r')' - G(\vec r,\vec r')\,u_i'(\vec r')\right] dr' = \begin{cases} -u_i & \vec r \in B_i \\ 0 & \vec r \in B_d \end{cases} \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[u_d(\vec r')\,G_i(\vec r,\vec r')' - G(\vec r,\vec r')\left(\frac{\partial u_d(\vec r')}{\partial n}\right)\right] dr' = \begin{cases} 0 & \vec r \in B_i \\ -u_d & \vec r \in B_d \end{cases} \tag{8}$$

Buradaki; G Green foksiyonu, B_i, B_d iç ve dış bölge, ∂B ise problem sınırını göstermektedir [5]. Denk. (7) ve (8) toplanarak, iç ve dış bölge için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left(u_i(\vec r') - u_d(\vec r')\right)\frac{\partial G_i(\vec r,\vec r')}{\partial n} - \left(\frac{\partial u_i(\vec r')}{\partial n} - \frac{\partial u_d(\vec r')}{\partial n}\right) G(\vec r,\vec r')\, dr' = \begin{cases} -u_i & \vec r \in B_i \\ -u_d & \vec r \in B_d \end{cases} \tag{9}$$

ve $u_i = u_d$ seçilerek denk. (9) aşağıdaki gibi genelleştirilerek iç ve dış bölge için;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left(\frac{\partial u_i}{\partial n}(\vec r') - \frac{\partial u_d}{\partial n}(\vec r')\right) G\, dr' = u(\vec r) \tag{10}$$

yazılır. Bu durumda aşağıdaki gibi bir eşdeğer kaynak ifadesi yazılırsa,

$$\sigma(r') = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial u_i(\vec r')}{\partial n} - \frac{\partial u_d(\vec r')}{\partial n}\right) \tag{11}$$

Denk. (10) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_{\partial B} G(\vec r,\vec r')\,\sigma(r')\, dr' = u(\vec r) \tag{12}$$

Denk. (12)'deki integral, bir eşdeğer kaynak ve Green fonksiyonundan oluşmuştur. Bu formülasyon kullanılarak bölgedeki her yerde potansiyel hesaplanabilir. Bununla birlikte potansiyelin hesaplanabilmesi için öncelikle bilinmeyen eşdeğer kaynağın bulunması gerekir. Bu eşdeğer kaynak sınır üzerinde bilinen sınır şartları yardımıyla hesaplanabilir. Bilinmeyen eşdeğer kaynak hesaplandıktan sonra bölgedeki herhangi bir yerde potansiyel ve onun normale göre türevleri rahatlıkla hesaplanabilir (Yıldır, 1987).

Dirichlet sınırı için yazılan integral denklemi aşağıdaki gibidir:

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial B} G(\vec{r}, \vec{r}')\sigma(r')dr' + C \qquad \vec{r} \in \partial B \tag{13}$$

Buradaki C, bir sabittir. Neumann sınırları için aşağıdaki formülasyon kullanılır:

$$q(\vec{r}) = \int_{\partial B} H(\vec{r}, \vec{r}')\sigma(r')dr' + \pi\sigma(\vec{r}) \quad \vec{r} \in \partial B \tag{14}$$

Buradaki; q ve H sırasıyla potansiyelin ve Green fonksiyonunun normale göre türevleridir. Farklı dielektrik sabitlerine sahip ortamlar için ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_{\partial B} H(\vec{r}, \vec{r}')\, \sigma(r')dr' + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\sigma(\vec{r}) = 0 \tag{15}$$

Buradaki; ε_1 ve ε_2 farklı malzemelerin dielektrik sabitleridir.

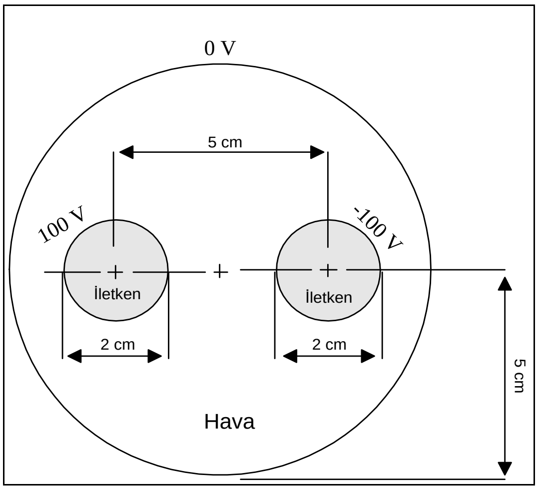
3. YÖNTEMİN UYGULANMASI

Bu bölümde, Şekil 2'de görülen çevrelenmiş sonsuz uzunlukta paralel iki iletkenli bir iletim hattı (Gürdal, 2000) için indirekt sınır elemanları yöntemi kullanılarak elektrostatik potansiyel dağılımı hesaplanmıştır. Şekil 2'de gösterilen geometride, paralel iletkenlerin yarıçapları 1 cm ve hayali sınırın yarıçapı 5 cm olarak seçilmiştir. İletkenler ile dış sınır arasındaki ortam hava olarak tanımlanmıştır ($\varepsilon = 1$). Birinci iletken sınırı için 100 V, ikinci iletken sınırı için -100 V ve dış sınır için ise 0 V sınır şartı uygulanmıştır. Hesaplama için MATLAB' ta hazırlanan ve ISEY adı verilen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 1'de ELECTRO paket programı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. ELECTRO, Integrated Engineering Software tarafından üretilen ve iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümünde kullanılan bir bilgisayar yazılımıdır (Anon., 1997).

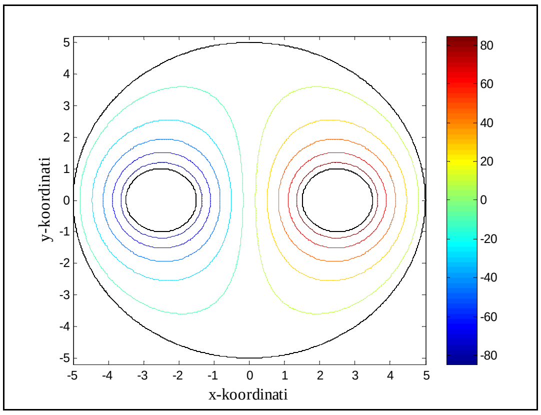
Tablo 1. Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

X cm	Y cm	ISEY Volt	ELECTRO Volt	Fark Volt
-5	0	0.0987	0.0019	-
-4	0	-57.255	-57.868	1.059
-3	0	-99.832	-99.999	0.168
-2	0	-99.837	-99.999	0.168
-1	0	-58.637	-59.201	0.952
0	0	0.000	0.000	0.000
1	0	58.637	59.201	0.952
2	0	99.837	100.00	0.168
3	0	99.832	100.00	0.168
4	0	57.255	57.869	1.060
5	0	-0.0987	-0.0019	-

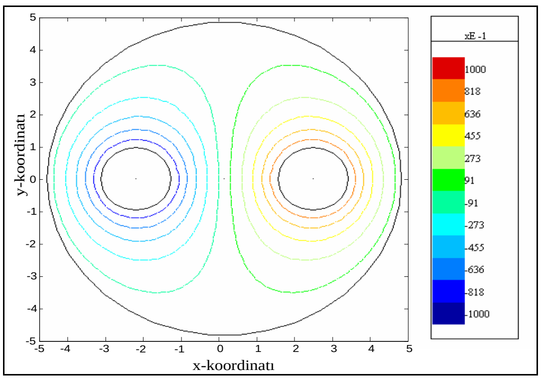
Karşılaştırma yapılan noktalar, x-ekseni üzerinde keyfi olarak seçilmiştir. Problem bölgesindeki tüm noktalar için ayrıca hesaplama yapılmış ve Şekil 3'de eşpotansiyel eğriler çizdirilmiştir. ELECTRO paket programından elde edilen eşpotansiyel eğriler ise Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekil 5'de ise sonuçların grafiksel olarak karşılaştırılması gösterilmiştir:



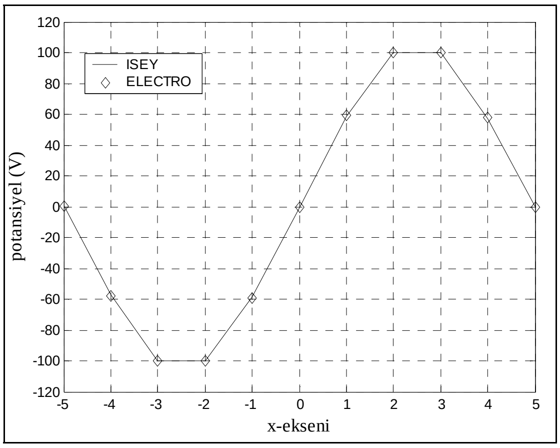
Şekil 2. İncelenen geometri ve sınır şartları



Şekil 3. ISEY ile elde edilen eşpotansiyel eğriler



Şekil 4. ELECTRO ile elde edilen eşpotansiyel eğriler



Şekil 5. Elde edilen sonuçların grafiksel olarak karşılaştırılması.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, sonsuz uzunlukta paralel iki iletkenden oluşan bir problem için indirekt sınır elemanları yöntemi ile elektrostatik alan hesabı yapılmıştır. Son yıllarda, birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılan sınır elemanları yöntemi (SEY), indirekt ve direkt olmak üzere iki değişik çözüm yolu izler. Bu çalışmada, problem bölgesindeki bilinmeyenleri hesaplamak için kullanılan indirekt sınır elemanları yönteminin, elektrostatik alan problemlerindeki çözüm performansı incelenmiştir. Bu amaçla, MATLAB programlama dilinde yazılan ve ISEY adı verilen program geliştirilmiştir. Mevcut paket programların (ELECTRO v.s) maliyetlerinin yüksek olması, kullanıcıya esnek çalışma imkanı vermesi ISEY' in başlıca üstünlükleridir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında, indirekt sınır elemanları yönteminin iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümünde oldukça etkili bir yöntem olduğu görülmüştür. Problemin boyutsallığının bölgeden sınıra indirgenmesi, daha az işlem gerektirdiği için çözüm kolaylığı, daha az sayısal veri ile programlamada zaman kazancı ve yüksek oranda doğruluk göstermesi indirekt sınır elemanları yönteminin üstünlükleridir.

5. KAYNAKLAR

Anonymous, 1997. Integrated Engineering Software inc., ELECTRO: Two Dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, Users and Technical Manual, Winnipeg, Manitoba, Canada.

Brebbia, C. A. 1984. The Boundary Element Method For Engineers, Pentech Pres, London, 189 p.

Bonnet, M. 1999. Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids, 30-39.

Chen, G., Zhou, J. 1992. Boundary Element Method, 211-223.

Gürdal, O. 2000. Elektromanyetik Alan Teorisi, 411, 2000.

Klimpke, B.W. 1983. A Two-Dimensional, Multi-Media Boundary Element Method, Master Thesis, The University of Manitoba, Canada, 79 p.

Lahiri, A., Chakravorti S. 2002. Australasian Universities Power Engineering Conference (AUPEC), Melbourne, Australia, 54-56.

McPhee, A. J., Klimpke, B., MacGregor, S. J. 1997. Use of The Boundary Element Method For Pulsed Power Electromagnetic Field Designs, 11th IEEE International Pulsed Power Conference, Baltimore, Maryland, 1245-1251.

Paris, F., Canas, J. 1997. Boundary Element Method Fundamentals and Applications, Oxford University Press, New York, Oxford, Tokyo, 183 p.

Tanaka, M., Du, Q, H. 1987. Theori and Application of Boundary Element Method, 206-216.

Yıldırım, S. 1999. Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 85 s.

Yıldır, B. 1987. Computer-Aided Field Analysis of High Voltage Apparatus Using The Boundary Element Method, Proceedings of The International Coil Winding Conference, Rosemont, Illinois.