

MONOSİMETRİK VE AÇIK KESİTLİ BİR EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN İKİ FARKLI METOTLA SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Hakan GÖKDAĞ, Osman KOPMAZ

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059, Bursa

Geliş Tarihi : 22.08.2006

Kabul Tarihi : 03.01.2008

ÖZET

Bu çalışmada, tek simetri eksenli (monosimetrik) ve açık kesitli bir Euler-Bernoulli kirişinin bağlaşıklık (coupled) eğilme-burulma serbest titreşim analizi dinamik transfer matrisi metodu (DTMM) ve sonlu elemanlar metoduyla (SEM) gerçekleştirilmiştir. Her iki yöntemle elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırıldığında aynı eleman sayısı için SEM ile bulunan doğal frekansların analitik çözümle bulunan kesin sonuçlara daha yakın olduğu görülmüştür. Bunun sebebi SEM için seçilen şekil değiştirme fonksiyonlarının kirişin gerçek şekil değiştirmesini daha iyi temsil etmesidir. İşlemci zamanı (cpu time) açısından bir kıyaslama yapıldığında yeterince doğru doğal frekansların DTMM ile daha kısa sürede elde edildiği gözlenmiştir. DTMM'nin bu avantajı hesaplama sırasında kullanılan transfer matrisi boyutlarının artan eleman sayısı ile değişmemesinden kaynaklanmaktadır. Hâlbuki SEM'de karakteristik köklerin hesabında kullanılan katsayılar matrisinin boyutları eleman sayısı ile artış göstermektedir, dolayısıyla hesaplama zamanı uzamaktadır. DTMM ile mod şekilleri de yeterince hassas bir şekilde elde edilebilmektedir. Ayrıca, modelleme sırasında ara işlemlere ait teferruatın DTMM'de SEM'e kıyasla daha az olması da bu metodun bir üstünlüğüdür. DTMM'nin belirtilen üstünlükleri bu çalışmada dikkate alınan kirişlerden oluşmuş kafes yapılarda SEM yerine DTMM'nin daha avantajlı olabileceğine de işaret etmektedir.

Anahtar Kelimeler : *Bağlaşıklık eğilme-burulma, Transfer matrisi, Açık kesitli kiriş, Sonlu elemanlar metodu.*

FREE VIBRATION ANALYSIS OF A MONOSYMMETRIC OPEN SECTION EULER-BERNOULLI BEAM BY MEANS OF TWO DIFFERENT METHODS

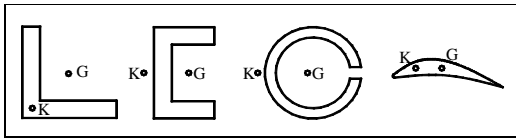
In this paper, coupled flexural-torsional free vibration of a monosymmetric open section Euler-Bernoulli beam is studied by using two different methods, i.e. the dynamic transfer matrix method (DTMM) and the finite element method (FEM). The natural frequencies obtained from the FEM are observed to be closer to the exact values compared to the DTMM, since the beam deformation functions selected in the FEM have the same form as the real deflection curve of beam has. When the two methods are compared in terms of cpu time, the DTMM requires less computation time to yield reasonably accurate natural frequencies. This advantage of the DTMM is mainly due to the size of the transfer matrix, which remains unchanged independent of the number of elements while the size of coefficient matrix leading to the characteristic equation in the FEM increases with increasing element number. In addition, the mode shapes obtained from the DTMM are found to be satisfactorily accurate. Moreover, the DTMM requires less algebra to derive the transfer matrix. It is concluded that the DTMM, due to its advantages mentioned above, would be superior to the FEM especially in handling lattice type structures.

Key Words : *Coupled bending-torsion, Transfer matrix, Open section beam, Finite element method.*

1. GİRİŞ

Mekanik sistemlerde ve yapılarda sıkça karşılaşılan temel elemanların birçoğu, iki boyutu üçüncü boyuta kıyasla küçük olması ve şekil değiştirmede baskın unsurun eğilme olması sebebiyle “kiriş” olarak modellenmektedir. Bu elemanların modal analizi için çeşitli kiriş modelleri ve çözüm metodlarıyla, farklı sınır şartları ve değişik türden eklentilere sahip olması durumlarını da kapsayan çok sayıda çalışma literatürde yer almaktadır. Yapılan çalışmalar incelendiğinde, dikkate alınan kiriş modellerinin çoğunda kiriş kesitinin en az iki simetri ekseni olduğu veya-doğrudan ya da dolaylı olarak-eğilmenin simetri düzlemi içinde yer aldığı kabul edilmektedir. Bu durumda kirişte eğilme ve burulma arasında herhangi bir bağlantı söz konusu değildir. Çünkü, böyle kirişlerde kütle eksenini (kesit ağırlık merkezlerini birleştiren eksen) ile kirişin eğilmesini tanımlamada kullanılan elastik eksen (kesit kayma merkezlerini birleştiren eksen) çakışıkır. Halbuki, Şekil 1’de gösterilen bazı kesitlerde bu iki eksen çakışık değildir. Böyle kesite sahip bir kiriş, sözkonusu eksenleri içine alan düzleme dik doğrultuda bir kuvvetle eğilmeye zorlansa ve bu kuvvet de kayma merkezinden geçmiyorsa, eğilme şekil değiştirmesine ilaveten burulma da meydana gelecektir.

Bahsedilen kirişlerin dinamik davranışlarını analize yönelik bazı önemli çalışmalar incelendiğinde, bağlaşıklık eğilme ve burulma hareket denklemlerinin değişik sınır şartları için analitik çözümlerinin elde edildiği görülmektedir (Timoshenko v.d., 1974; Dokumacı, 1987; Bishop v.d., 1989; Banerjee ve Fisher, 1992; Bercin ve Tanaka, 1997; Banerjee, 1999; Hashemi ve Richard, 2000; Jun v.d., 2004). Kiriş modeli açısından bu çalışmalar; burulma sebebiyle kesit çarpılmasını ve/veya Timoshenko etkilerini ihmal edip etmemek noktasında farklılaşırlar. Öte yandan, doğal frekansların ve mod şekillerinin elde edilmesinde bu yayınların bazılarında klasik sınır değer problemi çözüm metodu takip edilmiş, bir kısmında da transfer matrisi metodu kullanılmıştır.



Şekil 1. Kayma ve ağırlık merkezlerinin çakışık olmadığı bazı kesitler. K = Kayma merkezi; G = Ağırlık merkezi.

Uygulamada helikopter kanadı, kompresör ve türbin kanatçıkları bağlaşıklık eğilme-burulma titreşimleri

yapan kirişler olarak modellenebilirler. Bu durumda, önemli bir tasarım parametresi olan aksel kuvvet de dikkate alınmaktadır (Banerjee ve Fisher, 1992; Jun v.d., 2004). Ayrıca, bir kütleli bir yerden başka bir yere hızlı nakleden bir manipülatör uzvu (simetri düzlemine dik doğrultuda eğilme söz konusu ise) ya da açıklığı boyunca türbin, yakıt tankı vs kütlelere sahip bir uçak kanadı da eklentileri olan, bağlaşıklık eğilme-burulma titreşimleri yapan bir kiriş olarak modellenebilir (Gökdağ ve Kopmaz, 2005).

Yukarıdaki çalışmalarda kiriş hareket denklemlerinin analitik çözüm fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Halbuki kesitin değişken olması, kütle ve/veya elastiklik özelliklerinin kiriş boyunca üniform olmaması hallerinde hareket denklemlerinin kapalı formda çözümü oldukça zordur. Bu durumda sonlu elemanlar veya transfer matrisi metodlarını kullanmak daha avantajlıdır. Mesela Meirovitch, kesit çarpılmasını ve Timoshenko etkilerini ihmal ederek, bağlaşıklık eğilme-burulma titreşimleri yapan bir kirişe ait transfer matrisinin çıkarılışını vermiştir (Meirovitch, 1967).

Bu çalışmada açık ve kiriş boyunca sabit kesitli bir Euler-Bernoulli kirişinin doğal frekansları ve mod şekilleri dinamik transfer matrisi metodu (DTMM) ve sonlu elemanlar metodu (SEM) ile elde edilmiş, analitik çözüm (AÇ), DTMM ve SEM ile bulunan sonuçlar kıyaslanmıştır. Meirovitch (1967)’den farklı olarak DTMM ile formülasyonda kesit çarpılması da dikkate alınmıştır.

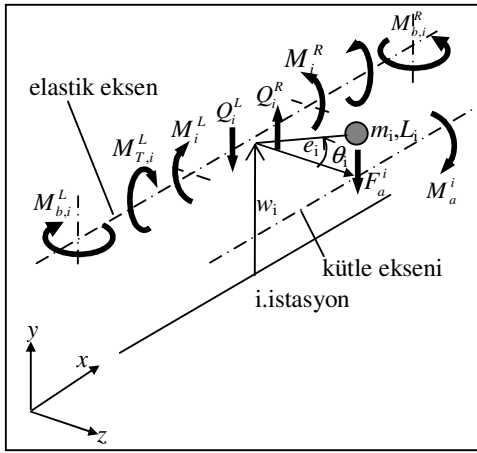
2. MATERYAL VE METOT

2. 1. DTMM İle Çözüm

Bu metodun esası; kirişi sonlu sayıda elemanlara bölüp, her bir elemanın uç noktalarındaki kesit tesirleri ve şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişkileri yazmak, böylece bu fiziksel nicelikler arasındaki bağlantıyı sağlayan matrisi (dinamik transfer matrisini) oluşturmaktan ibarettir. Kirişi meydana getiren küçük kiriş parçalarının her birisinin bir kütle, bir de elastiklik özelliği vardır. Metoda göre, kütle özelliği “istasyon” adı verilen tek bir noktada toplanır (Şekil 2).

İstasyonu oluşturan kiriş parçası içi dolu dairesel şekille gösterilmiş olup bunun kütlesi $m_i = mL_k$ olarak belirlenir. Burada m tüm kirişin birim boydaki kütlesi, L_k kiriş parçacığının uzunluğudur. Değişken kesitli bir kiriş söz konusu ise $m_i = \int_0^{L_k} m(x)dx$ entegrali dikkate alınır. Şekilde

J_i , $J_i = I_c L_k$ olup, kiriş parçasının kendi kütle merkezinden geçen eksene göre kütsel atalet momentini ifade eder. I_c tüm kirişin kütle merkezinden geçen eksene göre birim boydaki kütsel atalet momentidir. Değişken kesitli kiriş söz konusu olduğunda $J_i = \int_0^{L_k} I_c(x) dx$ entegralinin kullanılacağı açıktır. Gösterilen diğer büyüklüklerin tanımları ise şöyledir: Q : Kesme kuvveti, M : eğilme momenti, M_T : burulma momenti, M_b : çarpılma momenti, F_a : atalet kuvveti, M_a : atalet momenti. Ayrıca, alt (veya üst) "i" indisi i. istasyonu temsil etmekte, üst indislerden "L" sol, "R" ise sağ tarafı ifade etmektedir (Şekil 2).



Şekil 2. i. İstasyonda kesit tesirleri ve yer değiştirme bileşenleri.

Yukarıdaki dinamik karakterli kesit tesirlerinden başka, istasyona ait yer değiştirme bileşenleri de mevcuttur. İstasyonda rijit bir kütle olduğu kabul edildiğinden, bunun sağ ve solundaki yer değiştirme bileşenleri birbirine eşittir:

$$\begin{aligned}
 w_i^L = w_i^R = w_i & : \text{ i. istasyonun sehimi (elastik eğrinin o noktadaki sehimi)} \\
 \psi_i^L = \psi_i^R = \psi_i & : \text{ Elastik eğrinin eğim açısı} \\
 & (\psi_i = w_i') \\
 \theta_i^L = \theta_i^R = \theta_i & : \text{ Burulma açısı.} \\
 \varphi_i^L = \varphi_i^R = \varphi_i & : \text{ Burulma açısının konum koordinatına göre birinci türevi} \\
 & (\varphi_i = \theta_i').
 \end{aligned}$$

Üniform olmayan burulmada burulma açısının türevi sabit olmadığından, kiriş elemanın şekil değiştirmesinde etkili fonksiyonel bir büyüklük olarak dikkate alınmalıdır.

İstasyon transfer matrisini oluşturmak için yukarıdaki bağıntılara ek olarak, istasyonun sağ ve

solundaki kesit tesirleri arasındaki ilişkiler de dikkate alınır:

$$w_i^L = w_i^R \quad (1)$$

$$\psi_i^L = \psi_i^R \quad (2)$$

$$M_i^L = M_i^R \quad (3)$$

$$Q_i^L = Q_i^R + \omega^2 m_i w_i + \omega^2 m_i e_i \theta_i \quad (4)$$

$$\theta_i^L = \theta_i^R \quad (5)$$

$$\varphi_i^L = \varphi_i^R \quad (6)$$

$$M_{b,i}^L = M_{b,i}^R \quad (7)$$

$$M_{T,i}^L = M_{T,i}^R + m_i e_i \omega^2 w_i^L + \omega^2 (m_i e_i + J_i) \theta_i \quad (8)$$

Burada e_i kayma merkezi açıklığını göstermektedir. (4) ve (8) in çıkarılışında $\ddot{w}_i = w_i(x)\ddot{T}(t)$, $\ddot{\theta}_i = \theta_i(x)\ddot{T}(t)$ ve $\ddot{T}(t) = d^2(\sin(\omega t))/dt^2 = -\omega^2 T(t)$ olduğu düşünülmüştür. (1-8) ifadeleri matris formunda

$$\{W\}_i^R = [T_s]_i \{W\}_i^L \quad (9)$$

olarak yazılabilirler. Eşitlikteki $\{W\}_i^R$ ve $\{W\}_i^L$ istasyonun sağ ve solundaki şekil değiştirme ve kesit tesiri bileşenlerini içeren vektörleri, $[T_s]_i$ ise bu vektörler arasındaki münasebeti sağlayan "istasyon transfer matrisi"ni temsil etmektedir. Bunların elemanları:

$$\{W\}_i^R = \{w \ \psi \ M \ Q \ \theta \ \varphi \ M_b \ M_T\}_i^R$$

$$\{W\}_i^L = \{w \ \psi \ M \ Q \ \theta \ \varphi \ M_b \ M_T\}_i^L$$

$$[T_s]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 1 & a_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{81} & 0 & 0 & 0 & a_{85} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{41} = -m_i \omega^2, \quad a_{45} = a_{81} = -m_i e_i \omega^2,$$

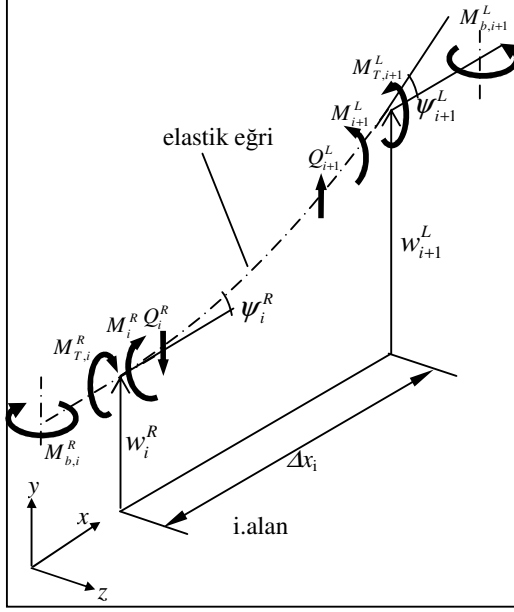
$$a_{85} = -(J_i + m_i e_i^2) \omega^2$$

i. elemana ait alan transfer matrisini elde etmek için Şekil 3'deki gösterim dikkate alınmıştır. Taylor Serisi'ne göre, kendisi ve türevleri sürekli bir $f(x)$

fonksiyonunun bir b noktasındaki değeri, buna yakın bir a noktasındaki ($b-a=\Delta x$) fonksiyon ve türevlerinin değerleri cinsinden

$$f(b) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(a)(\Delta x)^2 + \dots$$

olarak yazılabilir. Benzer bir düşünceyle



Şekil 3. i. Alanda kesit tesirleri ve yer değiştirme bileşenleri.

$$w_{i+1}^L = w_i^R + \Delta x_i (w_i^R)' + \frac{1}{2} (\Delta x_i)^2 (w_i^R)'' + \frac{1}{6} (\Delta x_i)^3 (w_i^R)'''$$

açılımı yazılır, sadece ilk üç terim dikkate alınır ve eşitlikteki ikinci ve üçüncü terimler kirişin eğilme katılığı (EI_z) ile çarpılıp bölünürse

$$w_{i+1}^L = w_i^R + \Delta x_i \psi_i^R + \frac{(\Delta x_i)^2}{2EI_z} M_i^R - \frac{(\Delta x_i)^3}{6EI_z} Q_i^R \quad (10)$$

elde edilir. Burada $M_i^R = EI_z (w_i^R)''$ ve $Q_i^R = -EI_z (w_i^R)'''$ bağıntıları kullanılmıştır. Benzer biçimde eğim açısı için

$$\psi_{i+1}^L = \psi_i^R + \frac{\Delta x_i}{EI_z} M_i^R - \frac{(\Delta x_i)^2}{2EI_z} Q_i^R \quad (11)$$

yazılabilir. Eğilme momenti ve kesme kuvveti arasında $M' = -Q$ ilişkisi olduğundan, sonlu farklarla yazılan $(M_{i+1}^L - M_i^R)/\Delta x_i = -Q_i^R$ eşitliği

$$M_{i+1}^L = M_i^R - \Delta x_i Q_i^R \quad (12)$$

sonucuna sevk eder. Ayrıca, alan üzerinde kesme kuvveti sabittir:

$$Q_{i+1}^L = Q_i^R \quad (13)$$

Burulma açısının Taylor serisi açılımından

$$\theta_{i+1}^L = \theta_i^R + \varphi_i^R \Delta x_i + \frac{(\Delta x_i)^2}{2EI} M_{b,i}^R \quad (14)$$

bulunur. Burada $\varphi_i^R = (\theta_i^R)'$ ve burulma açısıyla çarpılma momenti arasındaki $M_{b,i}^R = EI(\theta_i^R)''$ bağıntılarından yararlanılmıştır. Aynı şekilde, burulma açısının türevinin alan üzerindeki değişimiyle ilgili olarak

$$\varphi_{i+1}^L = \varphi_i^R + \frac{\Delta x_i}{EI} M_{b,i}^R \quad (15)$$

yazmak mümkündür. Çarpılma momentinin alan üzerindeki değişimini ifade etmek için, uniform olmayan burulma halinde burulma momenti ve burulma açısı arasındaki $M_T = GJ\theta' - EI\theta''$ ilişkisinden yararlanılacaktır. Bu, sonlu farklarla $M_T = GJ(\theta_{i+1}^L - \theta_i^R)/\Delta x_i - (M_{b,i+1}^L - M_{b,i}^R)/\Delta x_i$ şeklinde yazılıp alan üzerinde burulma momentinin sabit kaldığı kabul edilirse

$$M_{b,i+1}^L = M_{b,i}^R \left(1 + \frac{(\Delta x_i)^2 GJ}{2EI} \right) + \Delta x_i GJ \varphi_i^R - \Delta x_i M_{T,i}^R \quad (16)$$

$$M_{T,i+1}^L = M_{T,i}^R \quad (17)$$

eşitliklerine ulaşılır. (10-17) ifadeleri matris formunda aşağıdaki gibi derlenebilir:

$$\{W\}_{i+1}^L = [T_F]_i \{W\}_i^R \quad (18)$$

Burada,

$$\{W\}_{i+1}^L = \{w \ \psi \ M \ Q \ \theta \ \varphi \ M_b \ M_T\}_{i+1}^L$$

$$[T_F] = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{56} & b_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{76} & b_{77} & b_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{12} = \Delta x_i, b_{13} = \frac{(\Delta x_i)^2}{2EI_z}, b_{14} = -\frac{(\Delta x_i)^3}{6EI_z}$$

$$b_{23} = \frac{\Delta x_i}{EI_z}, b_{24} = -b_{13}, b_{34} = -b_{12}, b_{56} = b_{12}, b_{57} = b_{13}$$

$$b_{67} = \frac{\Delta x_i}{EI}, b_{76} = \Delta x_i GJ, b_{77} = 1 + \frac{(\Delta x_i)^2}{2EI}, b_{78} = -b_{12}$$

olmaktadır. (9) ve (18) eşitliklerinden, kiriş parçacığının sağ ve sol tarafındaki öteleme ve kesit tesirleri arasındaki ilişkiyi veren eleman transfer matrisi, $[T]_i$

$$\{W\}_{i+1}^L = [T]_i \{W\}_i^L, \quad [T]_i = [T_F]_i [T_S]_i \quad (19)$$

olarak elde edilir. Kiriş n parçaya bölünürse, bunun bir ucundaki fiziksel büyüklükleri diğer ucundakilerle ilişkilendiren dinamik transfer matrisi $[T]$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$[T] = [T_S]_{n+1} \prod_{i=1}^n [T]_i, \quad (n: \text{eleman sayısı}) \quad (20)$$

Bu durumda

$$\{W\}_{n+1}^R = [T] \{W\}_1^L \quad (21)$$

yazılabilir. Meselâ, iki ucu ankastre bir kiriş söz konusu olduğunda sınır şartları

$$x = 0 \text{ için } w_1^L = 0, \psi_1^L = 0, \theta_1^L = 0, \phi_1^L = 0 \text{ ve}$$

$$x = L \text{ için } w_{n+1}^R = 0, \psi_{n+1}^R = 0, \theta_{n+1}^R = 0, \phi_{n+1}^R = 0$$

şeklinde olacaktır (burada L tüm kirişin boyudur). Dinamik transfer matrisi $[T]$ 'nin elemanları T_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 8$) olsun. Yukarıdaki sınır şartları kullanıldığında (21) ifadesi aşağıdaki homojen denklem takımına sevk eder.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{13} & T_{14} & T_{17} & T_{18} \\ T_{23} & T_{24} & T_{27} & T_{28} \\ T_{53} & T_{54} & T_{57} & T_{58} \\ T_{63} & T_{64} & T_{67} & T_{68} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M \\ Q \\ M_b \\ M_T \end{pmatrix} = [T]_{i,uak} \{W\}_{i,uak}^L \quad (22)$$

Burada "iuak" alt indisi "iki ucu ankastre kiriş" anlamında kullanılmıştır. Bu eşitliğin fiziksel olarak anlamlı sonuçlar vermesi için katsayılar matrisinin determinantı sifıra eşit olmalıdır:

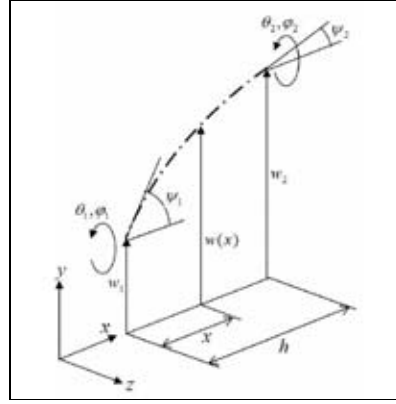
$$\det([T]_{i,uak}) = 0 \quad (23)$$

Bu determinantı sifıra eşit yapan ω kökleri iki ucu ankastre kirişin doğal frekanslarını verir. Bulunan

köklerden herhangi birisi (22)'de yerine yazılarak $\{W\}_{i,uak}^L$ vektörünün elemanları da tayin edilebilir. (20-21) yardımıyla da kiriş üzerindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi ve kirişin ilgili doğal frekansta aldığı şekil (mod) belirlenebilir.

2. 2. SEM İle Çözüm

DTMM'de olduğu gibi bu metodu uygularken de kiriş n elemana bölünür. Hareket sırasında bu elemanlardan herhangi birine ait yer değiştirmeler Şekil 4'de tasvir edilmiştir.



Şekil 4. Bir kiriş elemanı üzerinde düğüm noktalarının (kirişin uç noktaları) pozitif yönlü yer değiştirme bileşenleri.

Metot uygulanırken, genel olarak, eleman üzerindeki bir noktanın yer değiştirmesi polinom türünde fonksiyonlarla ifade edilir. Kullanılacak polinom derecesini, düğüm noktalarındaki toplam şekil değiştirme bileşenleri belirler. Örneğin, sadece eğilmenin olduğu bir kirişte, her bir düğüm noktası için biri eğim, diğeri sehim olmak üzere iki şekil değiştirme bileşeni olduğundan, böyle bir kiriş elemanı için üçüncü mertebeden bir polinom kullanılması uygun olur. Boyuna titreşimler yapan bir çubukta her bir düğüm noktasında tek bir şekil değiştirme bileşeni vardır, bu durumda birinci dereceden bir polinom yeterli olacaktır. Ayrıca, trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonlar da kullanılabilir. Ancak, gerekli işlem zamanı küçük olduğundan çoğunlukla polinom türünde fonksiyonlar tercih edilir.

Bu çalışmada, kiriş elemanı üzerindeki bir x noktasına ait şekil değiştirme bileşenlerini düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler cinsinden ifade etmek için bir kirişin elastik eğri denkleminin çözümünden yararlanılmaktadır:

$$EI_z (w^{IV}) = 0 \Rightarrow w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Burada c_i ($i=1,2,3,4$) entegral sabitleri düğüm noktalarındaki yer değiştirme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$c_1 = 2(w_1 - w_2)/h^3 + (\psi_1 + \psi_2)/h^2$$

$$c_2 = -3(w_1 - w_2)/h^2 - 2(\psi_1 + \psi_2)/h, \quad c_3 = \psi_1, \quad c_4 = w_1$$

Bu durumda elastik eğrinin formu

$$w(x) = w_1 L_1(x) + \psi_1 L_2(x) + w_2 L_3(x) + \psi_2 L_4(x) \quad (24)$$

şeklinde olup burada

$$L_1(x) = \frac{2}{h^3} x^3 - \frac{3}{h^2} x^2 + 1, \quad L_2(x) = \frac{1}{h^2} x^3 - \frac{2}{h} x^2 + x$$

$$L_3(x) = -\frac{2}{h^3} x^3 + \frac{3}{h^2} x^2, \quad L_4(x) = \frac{1}{h^2} x^3 - \frac{1}{h} x^2.$$

olmaktadır. Benzer yaklaşımla, bir kirişin üniform olmayan burulmasına ait diferansiyel denklemin homojen çözümüyle kirişteki herhangi bir kesitin burulma bileşenleri elde edilebilir:

$$R\theta'' - R_1\theta'' = 0$$

$$\Rightarrow \theta(x) = d_1 \cosh(\alpha x) + d_2 \sinh(\alpha x) + d_3 x + d_4$$

$$\alpha^2 = R/R_1, \quad R = GJ: \text{Üniform burulma direnci,}$$

$$R_1 = EF: \text{Çarpılma direnci}$$

d_i ($i=1,2,3,4$) integral sabitleri düğüm noktalarındaki burulma şekil değiştirmesine ait bileşenler cinsinden

$$d_1 = \frac{a_6 a_2 - a_5 a_3}{a_4 a_2 - a_5 a_1}, \quad d_2 = \frac{-a_1 a_6 + a_3 a_4}{-a_1 a_5 + a_2 a_4}, \quad d_3 = \varphi_1 - \alpha d_2,$$

$$d_4 = \theta_1 - d_1, \quad a_1 = \cosh(\alpha h) - 1,$$

$$a_2 = \sinh(\alpha h) - \alpha h, \quad a_3 = -\theta_1 + \theta_2 - \varphi_1 h,$$

$$a_4 = \alpha \sinh(\alpha h), \quad a_5 = \alpha(\cosh(\alpha h) - 1),$$

$$a_6 = -\varphi_1 + \varphi_2$$

biçiminde ifade edilebilir. Ara işlemler sonucunda burulma açısı fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\theta(x) = \theta_1 L^1(x) + \varphi_1 L^2(x) + \theta_2 L^3(x) + \varphi_2 L^4(x) \quad (25)$$

$$L^1(x) = r_1 \cosh(\alpha x) + r_5 \sinh(\alpha x) + r_9 x + r_{13}$$

$$L^2(x) = r_2 \cosh(\alpha x) + r_6 \sinh(\alpha x) + r_{10} x + r_{14}$$

$$L^3(x) = r_3 \cosh(\alpha x) + r_7 \sinh(\alpha x) + r_{11} x + r_{15}$$

$$L^4(x) = r_4 \cosh(\alpha x) + r_8 \sinh(\alpha x) + r_{12} x + r_{16}$$

$$r_i = x_i / \bar{x}, \quad r_{i+4} = x_{ii} / \bar{x}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$r_{j+8} = -\alpha x_{jj} / \bar{x}, \quad j = 1, 3, 4, \quad r_{10} = 1 - \alpha x_{22} / \bar{x}$$

$$x_1 = \alpha(\cosh(\alpha h) - 1),$$

$$x_2 = \alpha h(\cosh(\alpha h) - 1) - \sinh(\alpha h) + \alpha h, \quad x_3 = -x_1$$

$$x_4 = \alpha(\sinh(\alpha h) - 1), \quad x_{11} = -\alpha \sinh(\alpha h),$$

$$x_{22} = \cosh(\alpha h) - 1 - (\alpha h) \sinh(\alpha h), \quad x_{33} = -x_{11},$$

$$x_{44} = 1 - \cosh(\alpha h), \quad \bar{x} = a_4 a_2 - a_1 a_5$$

Serbest titreşim yapan kiriş parçasının sehim ve burulma açısı fonksiyonları (24) ve (25) den

$$\bar{w}(x, t) = L_1(x) w_1(t) + L_2(x) \psi_1(t) + L_3(x) w_2(t) + L_4(x) \psi_2(t) \quad (26)$$

$$\bar{\theta}(x, t) = L^1(x) \theta_1(t) + L^2(x) \phi_1(t) + L^3(x) \theta_2(t) + L^4(x) \phi_2(t) \quad (27)$$

yazılabilir. Bu durumda elemanın toplam kinetik enerjisi, T_e

$$T_e = T_1 + T_2 \quad (28)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^h m(\dot{\bar{w}} + c\dot{\bar{\theta}})^2 dx \quad (29)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^h I_c(\dot{\bar{\theta}})^2 dx \quad (30)$$

ve toplam potansiyel enerjisi, U_e

$$U_e = U_1 + U_2 + U_3 \quad (31)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^h EI_z(\bar{w}_{xx})^2 dx \quad (32)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^h GJ(\bar{\theta}_x)^2 dx \quad (33)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_0^h E\Gamma(\bar{\theta}_{xx})^2 dx \quad (34)$$

olarak ifade edilebilir. Bir elemanın tüm şekil değiştirme bileşenlerini içeren yeni bir deplasman fonksiyonu, $u(x, t)$

$$u(x, t) = \{L_i\}^T \{u(t)\}_e \quad (35)$$

$$\{L_i\} = \begin{Bmatrix} L_1(x) & L_2(x) & eL^1(x) & eL^2(x) \\ L_3(x) & L_4(x) & eL^3(x) & eL^4(x) \end{Bmatrix}^T$$

$$\{u(t)\}_e = \{w_1 \quad \psi_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \psi_2 \quad \theta_2 \quad \varphi_2\}^T$$

biçiminde tanımlanır,

$$T_1 = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [m_1] \{\dot{u}\}_e, [m_1] = \int_0^h m \{L_I\} \{L_I\}^T dx \quad (36)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [m_2] \{\dot{u}\}_e, [m_2] = \int_0^h I_c \{L_{II}\} \{L_{II}\}^T dx \quad (37)$$

ve

$$U_1 = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [k_1] \{u\}_e, [k_1] = \int_0^h EI_z \{L_{III}\} \{L_{III}\}^T dx \quad (38)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [k_2] \{u\}_e, [k_2] = \int_0^h GJ \{L_{IV}\} \{L_{IV}\}^T dx \quad (39)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [k_3] \{u\}_e, [k_3] = \int_0^h EI \{L_V\} \{L_V\}^T dx \quad (40)$$

yazılabilir. Burada;

$$\begin{aligned} \{L_{II}\} &= \{0 \ 0 \ L^1(x) \ L^2(x) \ 0 \ 0 \ L^3(x) \ L^4(x)\}^T \\ \{L_{III}\} &= \{L^1(x)'' \ L^2(x)'' \ 0 \ 0 \ L^3(x)'' \ L^4(x)'' \ 0 \ 0\}^T \\ \{L_{IV}\} &= \{0 \ 0 \ L^1(x)' \ L^2(x)' \ 0 \ 0 \ L^3(x)' \ L^4(x)'\}^T \\ \{L_V\} &= \{0 \ 0 \ L^1(x)'' \ L^2(x)'' \ 0 \ 0 \ L^3(x)'' \ L^4(x)''\}^T \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda;

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [M_e] \{\dot{u}\}_e \quad (41)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [K_e] \{u\}_e \quad (42)$$

olup, eleman kütle ve elastiklik matrisleri sırasıyla

$$[M_e] = [m_1] + [m_2], [K_e] = [k_1] + [k_2] + [k_3] \quad (43)$$

şeklinde dir. Diğer kiriş parçaları için de benzer ifadeler bulunur ve bunlar toplanarak tüm kirişin kinetik ve potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{\dot{u}\}_e^T [M_e] \{\dot{u}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{\hat{U}}\}^T [M] \{\dot{\hat{U}}\} \quad (44)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{u\}_e^T [K_e] \{u\}_e = \frac{1}{2} \{\hat{U}\}^T [K] \{\hat{U}\} \quad (45)$$

Burada $\{\hat{U}\}$ tüm düğüm noktalarındaki yer değiştirme bileşenlerini içeren bir deplasman vektörüdür. Toplam kinetik enerji ve potansiyel enerji ifadelerinden yararlanarak, n adet elemana ayrılmış kiriş için Lagrange hareket denklemleri,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{\hat{U}}_i} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial \hat{U}_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial U}{\partial \hat{U}_i} \right\} = \{0\}, \quad i=1,2,\dots,4(n+1)$$

yazıldığında

$$[M] \{\ddot{\hat{U}}\} + [K] \{\hat{U}\} = \{0\} \quad (46)$$

biçimindeki adi diferansiyel denklem takımına ulaşılır. Sönümsüz bir sistemde serbest titreşim halinde tüm düğüm noktalarının eş zamanlı hareketler yapması beklenir. Bu durumda $\{\hat{U}\} = \{\bar{U}\} \sin(\omega t)$ alınıp, (46) da kullanılırsa

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\bar{U}\} = \{0\} \quad (47)$$

özdeğer problemine ulaşılır. Burada $[1]$: birim matris, ω ise doğal frekans parametresidir. (47) ifadesi

$$[D] \{\bar{U}\} = \{0\}, \quad [D] = ([M]^{-1} [K] - \omega^2 [1]) \quad (48)$$

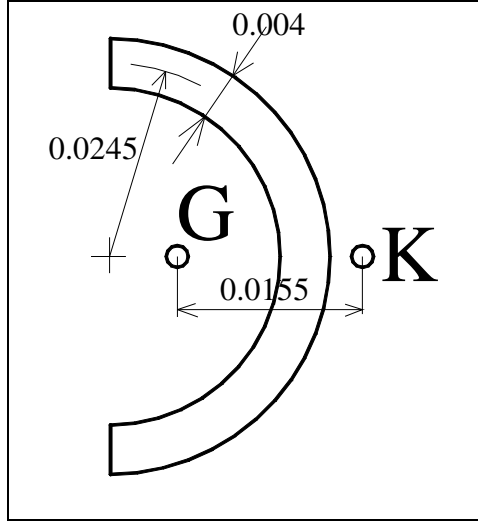
şeklinde düzenlendikten sonra, sınır şartlarının uygulanmasıyla (48) denklem takımında ilgili satır ve sütunlar iptal edilir, geriye kalan denklem takımının çözümü (22) eşitliğinin çözümünde izlenen yola benzer şekilde gerçekleştirilir.

3. SONUÇLAR

Sunulan metotlar arasında bir kıyaslama yapmak için Şekil 5'deki gibi yarım halka kesitli bir kiriş ele alınmıştır. Bu kirişe ait fiziksel özellikler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Şekil 5'de kesit boyutları verilen kirişin diğer fiziksel özellikleri (Bercin ve Tanaka, 1997).

$EI_z = 6380 \text{ Nm}^2$	Eğilme direnci
$GJ = 43.46 \text{ Nm}^2$	Üniform burulma direnci
$EI = 0.10473 \text{ Nm}^4$	Çarpılma direnci
$I_s = 0,000501 \text{ kg.m}$	Elastik eksenlere göre birim boydaki kütleli atalet momenti
$m = 0.835 \text{ kg/m}$	Birim boydaki kütle
$e = 0.0155 \text{ m}$	Kayma merkezi açıklığı
$L = 0.82 \text{ m}$	Kiriş boyu



Şekil 5. Sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan kirişin kesit ölçüleri (metre).

Ankastre-Serbest ve Ankastre-Ankastre uç koşullarını haiz kirişin üç farklı metotla elde edilen doğal frekansları Tablo 2 ve 3’de gösterilmiştir. Böyle bir kirişin serbest titreşim halinde hareket

denklemlerinin analitik çözümü literatürde bir çok çalışmada (Bercin ve Tanaka, 1997; Banerjee, 1999; Jun v.d., 2004) ayrıntılı bir şekilde verildiğinden burada bahsedilmemiştir. Ancak, kıyaslama yapmak amacıyla analitik çözümden elde edilen sonuçlar Tablolara eklenmiştir. Bahsedilen sınır şartları için kirişin modal grafikleri de Şekil 6 ve 7’de sunulmuştur (üç metot da aynı modal grafikleri verdiği için burada sadece DTMM ile elde edilenler gösterilmiştir). Hesaplamalar için MATLAB © programıyla çeşitli kodlar yazılmış, Intel Celeron 1.7 GHz işlemcili bir PC kullanılmıştır.

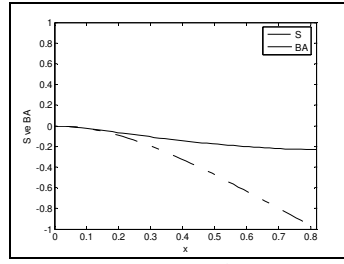
Tablolar incelendiğinde SEM ile bulunan frekansların kesin sonuçlara (analitik çözümlerle bulunanlar) daha yakın olduğu görülmektedir. Söz konusu frekansların bu kadar yüksek hassasiyette olması kiriş elemanları için seçilen deplasman fonksiyonlarının kirişin şekil değiştirmesiyle son derece uyumlu olmalarındandır. Çünkü, şekil değiştirmeler için seçilen fonksiyonlar kirişin statik haldeki eğilme ve burulma denklemlerinin homojen çözümleridirler ki, bunlar dinamik halde de kirişteki şekil değiştirmeyi yeterince uygun tanımlarlar.

Tablo 2. Ankastre-Serbest uç koşullarına sahip kirişin doğal frekansları (Hertz). ES= Eleman sayısı.

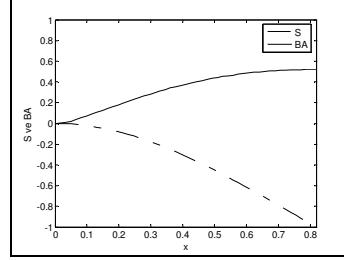
Modal indeks	AÇ	DTMM						SEM					
		ES=10 Hata(%)		ES=50 Hata(%)		ES=100 Hata(%)		ES=10 Hata(%)		ES=50 Hata(%)		ES=100 Hata(%)	
1	63.7922	60.95	4.46	62.62	1.84	63.2	0.93	63.793	0.00	63.792	0.00	63.792	0.00
2	137.6874	131.84	4.25	135.3	1.77	136.45	0.90	137.693	0.00	137.687	0.00	137.687	0.00
3	278.3592	266.79	4.16	273.7	1.69	276	0.85	278.468	-0.04	278.359	0.00	278.359	0.00
4	484.7756	458.70	5.38	474.2	2.18	479.46	1.10	485.344	-0.12	484.777	0.00	484.776	0.00
5	663.8402	635.81	4.22	625.4	5.79	658.09	0.87	664.841	-0.04	663.841	0.00	663.84	0.00
cpu zamanı (sn)	10.87	2.60		3.32		4.48		1.25		7.91		38.89	

Tablo 3. Ankastre-Ankastre uç koşullarına sahip kirişin doğal frekansları (Hertz).

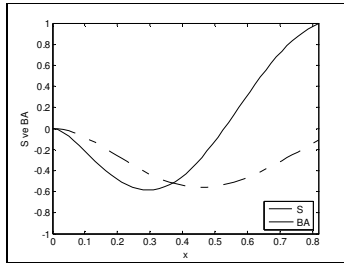
Modal indeks	AÇ	DTMM						SEM					
		ES=10 Hata(%)		ES=30 Hata(%)		ES=50 Hata(%)		ES=10 Hata(%)		ES=30 Hata(%)		ES=50 Hata(%)	
1	198.81	200.02	-0.71	198.98	-0.08	198.87	-0.03	198.86	-0.02	198.81	0.000	198.81	0.000
2	425.05	423.71	0.31	424.91	0.03	425.00	0.01	425.47	-0.10	425.05	-0.001	425.05	0.000
3	618.09	622.49	-0.71	618.55	-0.07	618.26	-0.03	618.24	-0.02	618.10	0.000	618.09	0.000
4	695.64	686.95	1.25	694.49	0.16	695.22	0.06	697.32	-0.24	695.66	-0.003	695.64	0.000
5	999.32	1006.04	-0.67	998.07	0.12	998.83	0.05	1004.66	-0.53	999.39	-0.007	999.33	-0.001
cpu zamanı (sn)	10.74	2.50		2.81		3.10		1.27		4.28		11.47	



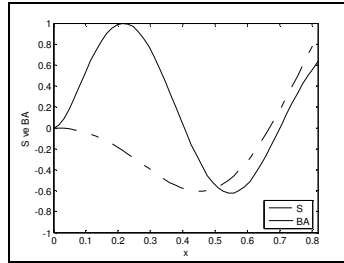
a) 1. Mod



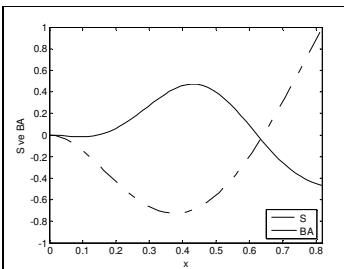
b) 2. Mod



c) 3. Mod

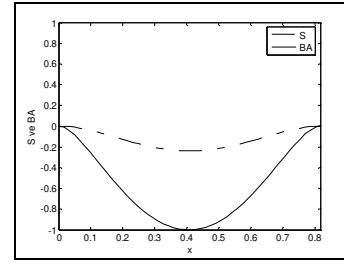


d) 4. Mod

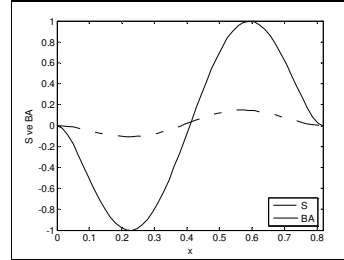


e) 5. Mod

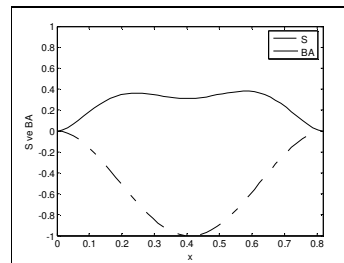
Şekil 6. Ankastre-Serbest kirişin boyutsuz mod şekilleri. x = Kiriş üzerindeki konum parametresi, S= Sehim, BA= Burulma Açısı.



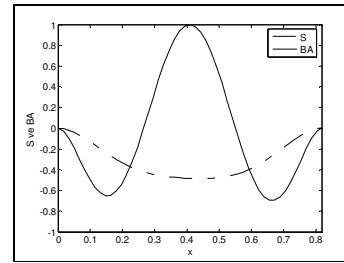
a) 1.Mod



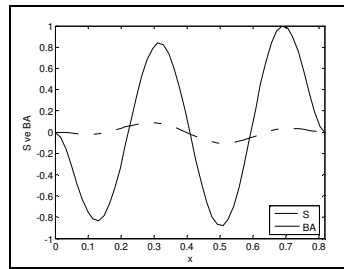
b) 2.Mod



c) 3. Mod



d) 4. Mod



e) 5. Mod

Şekil 7. Ankastre-Ankastre kirişin boyutsuz mod şekilleri. x = Kiriş üzerindeki konum parametresi, S= Sehim, BA= Burulma Açısı.

İşlem zamanı (cpu) noktasında bir kıyaslama yapıldığında en kısa sürede DTMM ile sonuç alındığı görülmektedir. Bu sonuçların yeterince hassas olması da dikkat çekicidir. Eleman sayısı arttıkça, harcanan işlem zamanı DTMM’de önemli bir değişim göstermezken, SEM’de harcanan zaman oldukça fazla olmaktadır. Bunun sebebi, eleman sayısı arttıkça DTMM metodunda hesaplamalar için kullanılan transfer matrisinin ($[T]$) boyutlarının aynı kalması, buna karşılık SEM de kullanılan matrisin ($[D]$) boyutlarının artmasıdır. DTMM’de $[T]$ matrisinin boyutları eleman sayısından bağımsız olarak daima 8×8 ’dir. Halbuki, SEM’de $[D]$ matrisinin boyutları $4(n+1)$ kuralına göre değişmektedir. Örneğin, kiriş 50 parçaya bölündüğünde $4(50+1)=204$; 204×204 boyutlarında bir matrisle işlem yapmak söz konusudur. Analitik çözüm söz konusu olduğunda işlem zamanının DTMM’ye göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bunun sebebi, analitik çözümden elde edilen sehim ve burulma açısı fonksiyonlarının oldukça fazla terim ihtiva etmesidir. Her biri sekiz trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonun toplamından oluşan bu şekil değiştirme fonksiyonlarıyla (Bercin ve Tanaka, 1997) işlem yapmak zahmetli olduğu gibi daha fazla hesap zamanı gerektirir. SEM’de kullanılan burulma açısı fonksiyonunun biraz daha karmaşık yapılı olması da işlem zamanı üzerinde olumsuz etki yapmaktadır. Ayrıca, AÇ ve SEM için yapılan ara işlemler DTMM’ye kıyasla daha fazladır.

Yukarıdaki sonuçlar değişken kesitli veya fiziksel özelliklerin homojen dağılım göstermediği kirişler yahut bu gibi kirişlerden oluşmuş kafes sistemleri için de DTMM’nin daha uygun bir metot olduğuna işaret etmektedirler.

4. KAYNAKLAR

Banerjee, J.R. 1999. Explicit frequency equation and mode shapes of a cantilever beam coupled in

bending and torsion. Journal of Sound and Vibration 224, 267-281.

Banerjee, J.R. and Fisher, S.A. 1992. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for axially loaded beam elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 33, 739-751.

Bercin, A. N. and Tanaka, M. 1997. Coupled flexural-torsional vibrations of timoshenko beams, Journal of Sound and Vibration 207, 47-59.

Bishop, R. E. D., Cannon, S. M. and Miao, S. 1989. On coupled bending and torsional vibration of uniform beams. Journal of Sound and Vibration 131, 457-464.

Dokumacı, E. 1987. An exact solution for coupled bending and torsion vibrations of uniform beam having single cross-sectional symmetry. Journal of Sound and Vibration 119, 443-449.

Gökdağ, H. and Kopmaz, O. 2005. Coupled bending and torsional vibration of a beam with in-span and tip attachments. Journal of Sound and Vibration 287, 591-610.

Hashemi, S.M. and Richard, M.J. 2000. Free vibrational analysis of axially loaded bending-torsion coupled beams: a dynamic finite element. Computers and Structures 77, 711-724.

Jun, L., Rongying, S., Hongxing, H. and Xianding, J. 2004. Coupled bending and torsional vibration of axially loaded bernoulli-euler beams including warping effects. Applied Acoustics 274, 915-938.

Meirovitch, L. 1967. Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

Timoshenko, S., Young, D.H. and Weaver, W. JR. 1974. Vibration Problems in Engineering, Wiley, New York.