

Tabakalı Kompozit Plakların Sonlu Farklar Yöntemi ile Statik Analizi

Static Analysis of Laminated Composite Plates by Finite Difference Method

Mustafa Hâluk SARAÇOĞLU^{a,*}, Yunus ÖZÇELİKÖRS^b

^aDumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 43100, Kütahya

^bEskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 26480, Eskişehir

Geliş Tarihi/Received : 07.05.2010, Kabul Tarihi/Accepted : 09.08.2010

ÖZET

Bu çalışmada; düzgün yayılı yük etkisindeki tabakalı kompozit dikdörtgen plakların orta noktasındaki çökme değerleri sonlu farklar yöntemi ile incelenmiştir. Bu plaklar Navier SS-1 sınır şartına uygun olarak dört kenarından basit mesnetlenmiştir. Klasik plak teorisinin tabakalı kompozitlere genişletilmesiyle elde edilen klasik kompozit tabakalı plak teorisi kullanılmıştır. Plâğın eğilmesine ait diferansiyel denklemler, sonlu farklar yöntemiyle ayrıştırılarak ilgili düğüm noktalarındaki bilinmeyen deplasmanlar hesaplanmıştır. Örnek olarak özel ortotrop, düzenli simetrik ve düzenli antisimetrik kompozit tabakalı kare plakların düzgün yayılı yük altında plak merkezlerindeki boyutsuz çökme değerleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : *Kompozit tabakalı plak, Klasik tabakalı plak teorisi, Sonlu farklar yöntemi.*

ABSTRACT

In this study; deflection at the mid-point of laminated composite rectangular plate subjected to uniformly distributed load is investigated by finite difference method. Four edges of these plates are Navier SS-1 simply-supported. Classical theory of laminated composite plates formed by extending the classical plate theory is used. Differential equations about bending of plate were discretized by finite difference method and unknown displacements at the related nodes are calculated. As an example; mid point dimensionless deflections of specially orthotropic, regular symmetric and regular antisymmetric composite laminated square plates under uniformly distributed load were examined.

Keywords : *Composite laminated plate, Classical composite plate theory, Finite difference method.*

1. GİRİŞ

Plaklar; kendi orta düzlemlerine dik yüklenmiş düzlem yüzeysel taşıyıcılardır. Tabakalı kompozit plaklar farklı malzemelerin bir araya getirilmesi yoluyla üretilir. Bu tür plakların yüksek mukavemetli ve hafif olması birçok amaca yönelik olarak kullanılma imkânı verir. Tabakalı kompozit plaklar gemi inşaatı, havacılık ve uzay teknolojileri gibi farklı disiplinlerin de kapsama alanına girmektedir. Tabakalı kompozit plaklar, son yıllarda üzerinde durulan güncel konulardandır.

Tek bir kompozit tabaka, homojen ve izotrop liflerle yine homojen ve izotrop matris malzemesinin bir araya gelmesinden oluşmasına rağmen homojen

ve izotrop değildir. Tabaka rijitlikleri kalınlık koordinatına göre farklılık gösterirler. Bu durum liflerin konumuna göre karışık mekanik tabaka modellerinin oluşmasına sebep olur. Bu tabaka rijitliklerinin iyi anlaşılması ile istenilen amaca en uygun tabakalanma çeşidine ulaşmak mümkündür.

Akavcı v.d. (2003), çok sayıda tabakadan oluşmuş plakların diferansiyel denklemlerinde yükleme ve deplasman fonksiyonları için Fourier serilerini kullanarak Navier çözümü uygulamışlardır.

Doğan ve Arslan (2004), fiber çubuklarla güçlendirilmiş tabakalı plakların plak düzlemine dik yükleme etkisindeki davranışını incelemiştir.

* Yazışılan yazar/Corresponding author. E-posta adresi/E-mail address : mhsaracoglu@mail.dumlupinar.edu.tr (M. H. Saraçoğlu)

Analizlerde simetrik ve antisimetrik plakların her bir tabakasını izotrop veya ortotrop olarak kabul etmişlerdir. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde ettikleri sonuçları sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlarla kıyaslamışlardır.

Yıldız ve Eröz (2006), ankastre mesnetli kompozit bir plaktaki gerilme ve yer değiştirme analizinde sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır.

Moleiro v.d. (2007), tabakalı kompozit plakların statik analizi için karışık sonlu eleman modeli sunmuşlardır.

Mohite ve Upadhyay (2007), tabakalı kompozit plakları bölge bölge modelleyerek incelemişlerdir.

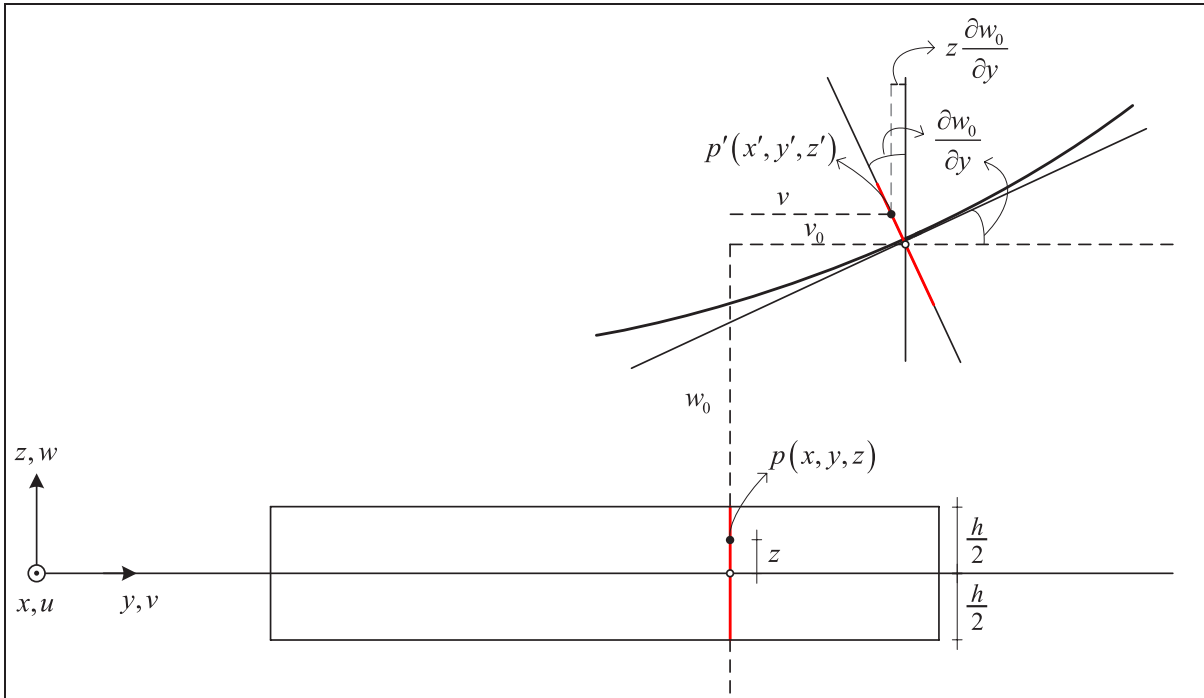
Urthaler ve Reddy (2008), tabakalı kompozit plakların lineer olmayan eğilme analizi için karışık sonlu eleman modeli sunmuşlardır.

Aydoğdu (2009), tabakalı kompozit plaklar için yeni bir yüksek mertebeden kayma deformasyonu teorisi geliştirmiş ve bu teoriye göre bazı örnek problem çözümleri sunmuştur.

2. KLASİK KOMPOZİT TABAKALI PLAK TEORİSİ

Klasik kompozit tabakalı plak teorisi; klasik plak teorisinin tabakalı kompozitlere genişletilmesidir. Bu teoride Kirchhoff hipotezindeki kabuller geçerlidir.

Şekil değiştirme ifadeleri, (u,v,w) yer değiştirme ifadelerinin x, y ve z koordinatlarına göre değişimleri olarak tanımlanmışlardır, Şekil 1. (u,v,w) yer değiştirme ifadeleri, bütün plak teorilerinde aynı değildir.



Şekil 1. Klasik plak teorisine göre plağın deformasyonu.

Plak orta düzleminde z mesafesi kadar yukarıda bulunan bir p(x,y,z) noktası deformasyondan sonra z ekseninde w₀, y ekseninde v₀, x ekseninde u₀ deplasmanlarını yapar. Klasik plak teorisinde orta düzleme dik ve düzlem kesitler şekil değiştirmiş orta yüzeye dik ve düzlem kalıp, boyları da değişmeyeceğinden p noktası p'(x',y',z') konumuna gelir.

2. 1. Bünye Denklemleri

Klasik kompozit tabakalı plak teorisindeki şekil değiştirme bağıntıları klasik plak teorisindeki gibidir:

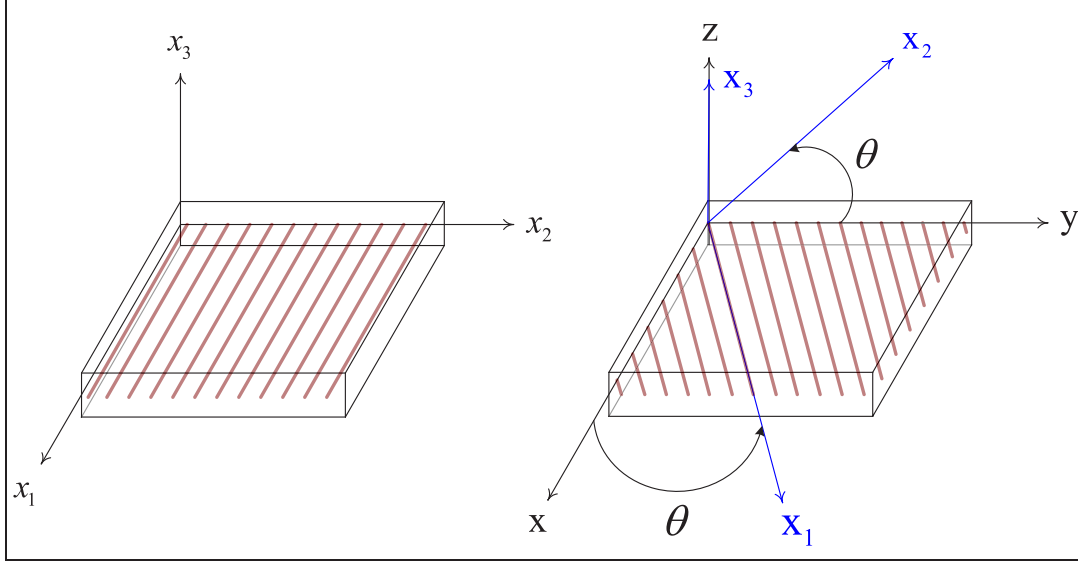
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Liflerle tek yönde güçlendirilmiş bir plak tabakası; malzeme simetri düzlemleri lif yönüne paralel ve

dik olan ortotrop bir malzemedir. Şekil 2'deki gibi x_1 malzeme koordinat eksenini lif yönüne paralel, x_2 tabaka düzleminde ve lif yönüne dik, x_3 ise tabaka düzlemine dik olarak alınabilir.

Liflerle güçlendirilmiş tabakalı plaklarda lif eksenini ile problem eksenini arasındaki açı oryantasyon açısıdır. Genel bir tabakalı plak farklı oryantasyon açılarında

sahip birden fazla tabakanın bir araya gelmesiyle oluşur. Oryantasyon açıları (θ_i) , -90° , 90° ile arasında değişmektedir. Farklı oryantasyon açılarında sahip tabakalar bir araya gelerek tabakalı plakları oluştururlar. Bu tip tabakalı plaklar oryantasyon açılarında göre tertip edilerek isimlendirilirler. Oryantasyon açıları tabakanın çeşitli rijitlik değerlerini doğrudan etkiler.



Şekil 2. Liflerle güçlendirilmiş tek yönlü tabaka ve oryantasyon açısı.

Farklı oryantasyon açılarında sahip tabakaların bir araya gelerek oluşturdukları bu tabakalı plakların çözümünde her tabaka için yapılan hesabın genel bir koordinat ekseninde toplanması gerekmektedir. Bu koordinat eksenini problem eksenini olan (x,y,z) eksen takımındır. Tabakalardaki liflerin eksenini x_1 ve tabaka kalınlık eksenini x_3 , plak kalınlık eksenini z ile çakışmış olmak kaydıyla (x_1,x_2,x_3) malzeme eksen takımındır. Bu eksenlerin birbirleri cinsinden ifadesi sadece $z=x_3$ ekseninin θ açısı kadar (sağ el kuralına göre) döndürülmesiyle oluşan koordinat sistemiyle ilgili özel bir dönüşümdür.

Tanım olarak $(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$ şekil değiştirmeleri sıfırdır. xy düzlemine göre keyfi olarak yönlendirilmiş ortotrop tabakalardan oluşmuş tabakalı plak için, $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ kayma gerilmeleri de sıfırdır.

Tabakalı plağın malzeme koordinatlarında k . ıncı ortotrop tabaka için lineer bünye denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Q_{ij} ; k . tabakanın Poisson oranları, Elastisite Modülü ve Kayma Modülü kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1^2}{E_1-\nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1-\nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1 E_2}{E_1-\nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

Burada; E_1 lif yönündeki, E_2 life dik yöndeki elastisite modülleridir. x_1 - x_2 düzlemindeki kayma modülü G_{12} 'dir. ν_{12} ve ν_{21} ise ilgili yönlerdeki Poisson oranlarıdır.

Tabakalı plak; malzeme eksenleri tabakalı plağın eksenine göre farklı yönlendirilmiş ortotrop tabakalardan oluştuğu için, her bir tabakanın malzeme koordinatlarına göre ifade edilen bünye denklemleri tabakalı plağın (x, y, z) koordinatlarına dönüştürülmelidir. Bu dönüşüm işlemi, aşağıdaki bağıntılar kullanılarak yapılır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Malzeme eksen takımına göre ifade edilen gerilme ifadeleri yerine bünye bağıntılarındaki denklem (2) yerine konulursa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & 0 \\ Q_2 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Şekil değiştirmelerin dönüştürülmesinde aşağıdaki bağıntı kullanılır.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Denklem (6) ile tanımlanan bağıntılar denklem(5)'te yerine yazıldığında tabakalı plağın problem eksenleri olan (x,y,z) eksenlerine göre k. ıncı ortotrop tabaka için bünye denklemleri elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & 0 \\ Q_2 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Yukarıdaki bağıntıda bulunan matris çarpım işlemleri sonucunda denklem (7) ifadesine ulaşılır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Elde edilen bünye denklemindeki dönüştürülmüş malzeme matrisi elemanlarının açık ifadeleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3\theta \cos\theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \cos^4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3\theta \cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{66} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

Yukarıdaki tariflerde kullanılan θ oryantasyon açısı Şekil 2'de gösterilmektedir. $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{66}$ katsayıları ise denklem (3)'te tarif edilmektedir.

Liflerle güçlendirilmiş kompozit tabakalı plakta her tabakanın ortotrop olduğu ve Hooke Kanununa uyduğu kabul edilir. Şekil değiştirmeler tabakalı plak kalınlığı boyunca sürekli olmasına rağmen gerilmeler sürekli değildir. Gerilmeler her bir tabaka için malzeme katsayılarına bağlı olarak değişir.

Şekil değiştirme ifadeleri denklem (7)'de yerlerine konulursa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\tilde{\sigma}^k = (\bar{Q}^k) (\tilde{\epsilon}^{(0)} + z\tilde{\epsilon}^{(1)}) \quad (9)$$

Kuvvet ve moment bileşenlerini plağın şekil değiştirmeleri cinsinden türetmek için denklem (7)'deki gerilme şekil değiştirme ilişkilerinden faydalanılır.

Bu sebeple gerilmelerin integrali alınırken tüm plak kalınlığı boyunca değil; her bir tabaka için ayrı olarak alınır ve toplanır.

Şekil 3'teki plak elemanının yüzeylerinde birim uzunluğa etki eden N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} iç kuvvetlerinin tanımı aşağıdaki gibi yapılır (Reddy, 1997).

$$\tilde{N} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \tilde{\sigma}^k dz$$

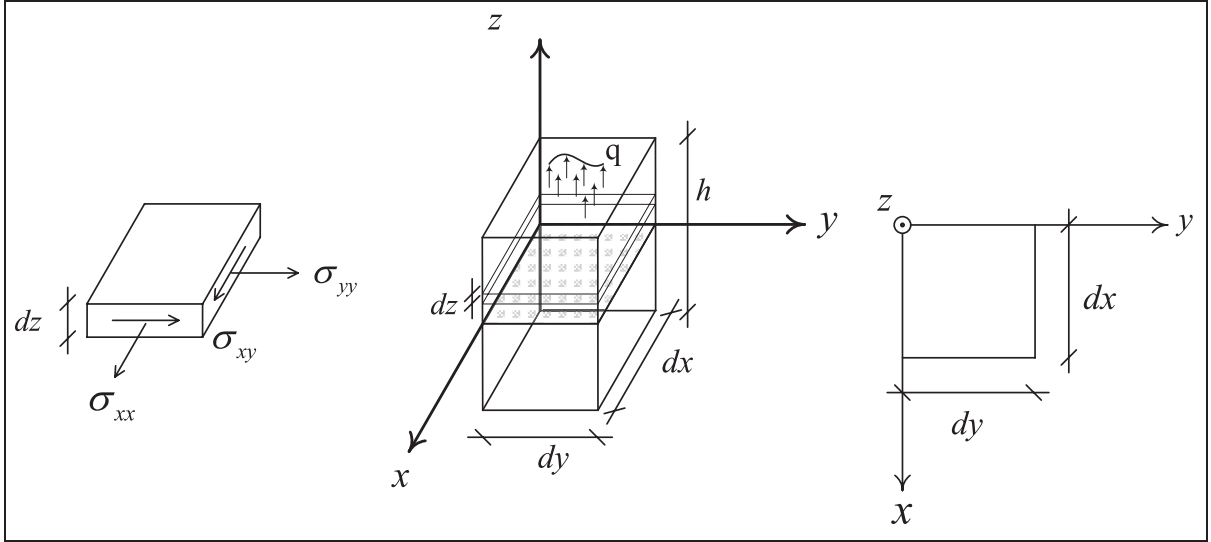
$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (10)$$

Denklem (9) tarifi denklem (10) ifadelerinde yerlerine konur ise aşağıdaki bağıntı elde edilir (Reddy, 1997).

$$\tilde{N} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [(\bar{Q}^k) (\tilde{\epsilon}^{(0)} + z\tilde{\epsilon}^{(1)})] dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} + z\epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} + z\epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} dz \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$



Şekil 3. Plak elemanı ve orta düzlemi.

Şekil 3'teki plak elemanının yüzeylerinde birim uzunluğa etki eden M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} iç momentlerinin tanımı aşağıdaki gibi yapılır (Reddy, 1997).

$$\tilde{M} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tilde{\sigma}^k) z dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z dz \quad (12)$$

Denklem (9) tarifi denklem (12) ifadelerinde yerlerine konur ise aşağıdaki bağıntı elde edilir (Reddy, 1997).

$$\tilde{M} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [(\bar{Q}^k)(\tilde{\varepsilon}^{(0)} + z\tilde{\varepsilon}^{(1)})] z dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} z dz \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Denklem (11) ve denklem (13)'teki rijitlik katsayıları A_{ij} uzama rijitliği, B_{ij} eğilme-uzama çifti rijitliği ve D_{ij} eğilme rijitliği şeklinde isimlendirilirler. Bu rijitlikler (\bar{Q}^k) cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanırlar (Reddy, 1997).

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=1}^N A_{ij}^k \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = \sum_{k=1}^N B_{ij}^k \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) = \sum_{k=1}^N D_{ij}^k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, 2, 6 \\ j &= 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (14)$$

Denklem (11) ve denklem (13)'teki iç kuvvetlerin ve iç momentlerin ifadeleri birleştirilerek aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_x \\ \tilde{M}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_x^{(0)} \\ \tilde{\varepsilon}_x^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Denklem (3)'te tanımlanmış olan (Q) matrisi elemanları, (k) tabaka numarasını göstermek üzere tekrar aşağıdaki şekilde yazılmışlardır.

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{(E_1^{(k)})^2}{E_1^{(k)} - (v_{12}^{(k)})^2 E_2^{(k)}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{v_{12}^{(k)} E_1^{(k)} E_2^{(k)}}{E_1^{(k)} - (v_{12}^{(k)})^2 E_2^{(k)}} \quad (16)$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} E_2^{(k)}}{E_1^{(k)} - (v_{12}^{(k)})^2 E_2^{(k)}}, \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}$$

Denklem (16)'da tarif edilen (Q^k) matris elemanları denklem (8)'deki yerlerine yazıldığında (\bar{Q}) matrisinin de k tabakası için (\bar{Q}^k) olarak isimlendirmek

gerekmektedir. Bu durumda (\bar{Q}^k) matrisinin elemanları aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta^{(k)} + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \theta^{(k)} + \cos^4 \theta^{(k)}) \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta^{(k)} \cos^3 \theta^{(k)} + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \sin^4 \theta^{(k)} + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta^{(k)} \cos \theta^{(k)} + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta^{(k)} \cos^3 \theta^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \theta^{(k)} + \cos^4 \theta^{(k)}) \end{aligned} \quad (17)$$

Denklem (17)'de tarif edilen (\bar{Q}^k) matris elemanları A_{ij}^k , B_{ij}^k , D_{ij}^k rijitliklerinin denklem (14)'te kullanılmasıyla tabakalı plakların (A), (B), (D) rijitlik matris elemanları elde edilmiş olur. Böylece Şekil 3'teki plak elemanının yüzeylerinde birim uzunluğa etki eden N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} iç kuvvetleri ile M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} iç momentleri şekil değiştirmeler cinsinden $(\tilde{\epsilon})$ tarif edilmiştir.

2. 2. Denge Denklemlerinin Deplasmanlar Cinsinden İfadesi

Denklem (15) ifadesinde yer alan $\tilde{\epsilon}_x^{(0)}$ ve $\tilde{\epsilon}_x^{(1)}$ şekil değiştirmelerinin klasik plak teorisindeki tarifleri kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Şekil 3'teki plak elemanının orta düzleminde x yönündeki toplam kuvvet dengesini, y yönündeki toplam kuvvet dengesini ve z yönündeki toplam kuvvet dengesini yazarak elde ettiğimiz denge denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \sum_x F = 0 \text{ 'dan } \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \sum_y F = 0 \text{ 'dan } \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \sum_z F = 0 \text{ 'dan } \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Elde edilen bu üç denge denkleminde nonlineer terimler ihmal edilerek ve plağın sadece düşey yüke maruz kaldığı düşünülerek klasik kompozit tabakalı plak teorisinin lineer denge denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir (Reddy, 1997).

$$\begin{aligned} \sum_x F = 0 \\ A_{11} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] + 2A_{16} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right] + A_{66} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] + A_{16} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] + (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] + A_{26} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] \\ - B_{11} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right] - 3B_{16} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right] - (B_{12} + 2B_{66}) \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right] - B_{26} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_y F = 0 \\ A_{16} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] + (A_{12} + A_{66}) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right] + A_{26} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] + A_{66} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] + 2A_{26} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] + A_{22} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right] \\ - B_{16} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right] - (B_{12} + 2B_{66}) \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right] - 3B_{26} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right] - B_{22} \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sum_z F = 0 \\ B_{11} \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right] + 3B_{16} \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} \right] + (B_{12} + 2B_{66}) \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right] + B_{26} \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right] \\ + B_{16} \left[\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right] + (2B_{66} + B_{12}) \left[\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right] + 3B_{26} \left[\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right] + B_{22} \left[\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right] \\ - D_{11} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right] - 4D_{16} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \right] - 2(D_{12} + 2D_{66}) \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - 4D_{26} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \right] - D_{22} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] = -q \end{aligned} \quad (22)$$

Yukarıdaki lineerleştirilmiş üç denge denklemi denklem (19)'a dayanmakta olup iç kuvvetlerin ve iç momentlerin diferansiyelleri alınarak oluşturulmuştur. Geliştirilen bu denge denklemleri kompozit tabakalı plak problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır (Reddy, 1997).

3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE DENGE DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Sonlu farklar yöntemi, çeşitli diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilemediğinde, kullanılan sayısal ve yaklaşık yöntemlerdendir (Ergün ve Kumbasar, 2003).

Yaklaşık yöntemler karakter bakımından ikiye ayrılır. Bir kısmı sınır şartların gerçekleşmesinde yaklaşıklık kabul eder; fakat diferansiyel denklemin kesin olarak sağlanmasını ister; ikinci grup yöntemlerde ise sınır şartlarının gerçekleşmesi kesin olduğu halde diferansiyel denklemin sağlanmasında yaklaşıklık vardır. Sonlu farklar yöntemi bu ikinci gruba girer. Dayandığı esas, diferansiyeller yerine sonlu farkları alarak, problemin diferansiyel denklemini, fonksiyonun ayrık noktadaki değeriyle yaklaşık olarak ifade etmektir.

Sonlu farklar yönteminde diferansiyel denklem ayrıklaştırılarak cebirsel denkleme dönüştürülür ve sayısal olarak çözülür. Denklemin ayrıklaştırılması; türevlerin yerine fonksiyon değerlerinin kullanılmasıyla olur. Bu ayrıklaştırma sonucu fonksiyon değerlerine bağlı bir cebrik denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlenerek her nokta için aranan bilinmeyenler bulunur.

Türev fonksiyonlarının katsayıları kullanılarak denklem (20)-(22)'deki u_0, v_0, w_0 deplasmanlarının diferansiyelleri, sonlu farklar ağ düğüm noktaları değerleri cinsinden Ek'teki gibi yazılabilir. Böylece sonlu farklar ağ düğüm noktalarındaki u_0, v_0, w_0 deplasmanları cinsinden lineer denklem takımları elde edilmekte ve bunların çözümleri sonunda problemin bilinmeyenleri olan ağ düğüm noktalarındaki u_0, v_0, w_0 deplasmanları hesaplanmaktadır. Bu şekilde sonlu farklar yöntemi ile kompozit tabakalı plak problemleri çözümlenmektedir.

Sonlu farklar yöntemi ile plak çözümü için kare plakta mxm sonlu fark ağı oluşturulur. Sonlu farklar yönteminde m sayısı arttıkça deplasman değerleri kesin sonuca daha da yaklaşmaktadır. Bu düşünceden hareketle plak merkezindeki çökme ile m sayısı arasındaki ilişkileri ortaya koyan grafik çizilir. m'nin küçük değerleri için \bar{w}_0 boyutsuz çökme değerleri kaba sonuçlar verirken m'nin büyük değerleri için ise hassas çözümler vermektedir. Teorik olarak ise

m sayısı çok büyük olduğunda grafik yataya teğet haline gelir ve bu teğetin \bar{w}_0 eksenini kestiği nokta en doğru \bar{w}_0 boyutsuz orta nokta çökme değerini verir. Bu durumda çizilen eğrinin konveks olması ve büyük m değerleri için yataya neredeyse teğet olarak kalması beklenirken bu teorik davranışlardan sapıldığı görülmektedir. Büyük m değerlerine ulaşıldığında yataya teğet olması beklenen eğimin azaldığı, konveks olarak devam etmesi gereken eğrinin konkav hale geçtiği görülür. Bu durumda eğrinin eğiminin işaret değiştirdiği dönüm noktasında \bar{w}_0 boyutsuz orta nokta çökmesinin doğru değere en yakın nokta olduğu kabul edilir.

Sonlu farklar ağ düğüm noktaları değerleri cinsinden yazılan denge denklemleri çözülerek ağ noktalarındaki $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{w}_0$ deplasmanları hesaplanır. Bu çalışmada sözü edilen deplasmanları boyutsuzlaştırarak ifade etmekte E_2, h, a, q_0 büyüklükleri kullanılmıştır. h plağın z yönündeki boyutu (toplam kalınlığı), a plağın x yönündeki boyutu, q_0 ise z ekseninin tersi yönünde etki eden yükün şiddetidir. $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{w}_0$ vektörlerine boyutsuz deplasman vektörleri denir ise gerçek deplasmanlar denklem (23)'ten hesaplanır.

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0(i,j) &= \tilde{w}_0(i,j) \times \frac{a^4 q_0}{E_2 h^3}, \\ \tilde{u}_0(i,j) &= \tilde{u}_0(i,j) \times \frac{a^3 q_0}{E_2 h^2}, \\ \tilde{v}_0(i,j) &= \tilde{v}_0(i,j) \times \frac{a^3 q_0}{E_2 h^2}\end{aligned}\quad (23)$$

Bu şekilde basit mesnetli kare kompozit tabakalı plakların sonlu farklar yöntemi ile şekil değiştirme analizi tamamlanmış olmaktadır.

4. ÖRNEKLER

Örnek olarak Şekil 4'te görülen özel ortotrop, düzenli simetrik ve düzenli antisimetrik kompozit tabakalı üç ayrı kare plağın düzgün yayılı yük altında plak merkezindeki boyutsuz çökme değerleri sonlu farklar yöntemi ile elde edilmiştir. Özel ortotrop plakta her biri aynı doğrultudaki liflere sahip 10 tabaka bir araya getirilmiştir. Düzenli simetrik plakta tabakalar plak orta düzlemine göre simetrik olarak yerleştirilirken düzenli antisimetrik plakta plak orta düzlemine göre antisimetrik bir yerleştirme söz konusudur. Plaklar Navier SS-1 sınır şartına uygun olarak dört kenarından basit mesnetlidirler. Bütün örneklerde lif doğrultusu 1, life dik olan doğrultu 2 ve kalınlık yönündeki doğrultu 3 olarak gösterilmektedir.

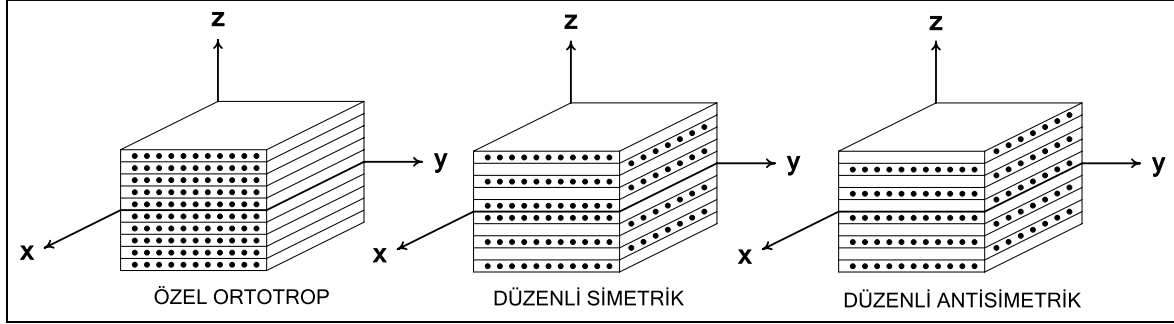
4. 1. Özel Ortotrop Kare Plak

Düzgün yayılı yüklü, basit mesnetli, on tabakalı özel ortotrop kare plak için orta noktanın boyutsuz

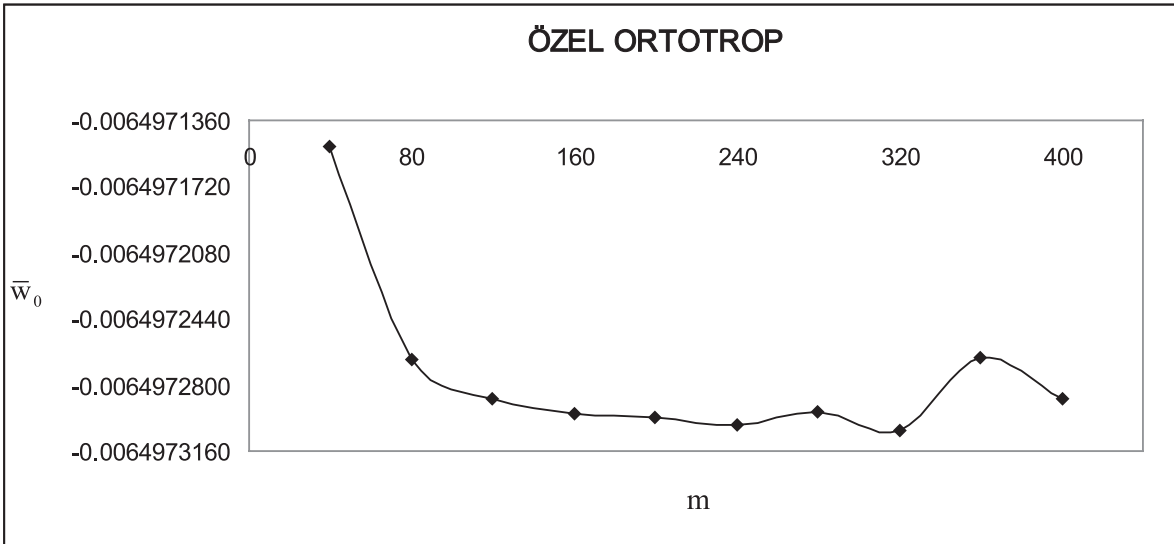
çökme değeri hesaplanmıştır. Bütün tabakalarda lif yönü aynıdır ve x yönündedir. Malzeme özellikleri oran olarak $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = 0.5$ ve $\nu_{12} = 0.25$ şeklindedir.

Bu problemde doğruya en yakın çökme değerine karar verilirken eğimin işaret değiştirdiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre $m=240$ için hesaplanan -0.0064973016 değeri, özel ortotrop kare plakta orta noktanın boyutsuz çökme değeridir.

Sonlu fark ağı bölüm sayısına göre orta noktanın boyutsuz çökme değerinin değişimi Tablo 1'de ve Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Örnek olarak çözülen liflerle güçlendirilmiş kompozit tabakalı plaklar.



Şekil 5. Özel ortotrop kare plak için boyutsuz çökme değerleri.

Tablo1. Özel ortotrop kare plakta orta noktanın boyutsuz çökme değerleri.

m	\bar{w}_0	eğim
40	-0.0064971507	
80	-0.0064972666	-2.898E-09
120	-0.0064972879	-5.324E-10
160	-0.0064972954	-1.888E-10
200	-0.0064972976	-5.497E-11
240	-0.0064973016	-9.988E-11
280	-0.0064972946	1.751E-10
320	-0.0064973045	-2.460E-10
360	-0.0064972647	9.937E-10
400	-0.0064972879	-5.797E-10

$$\text{eğim} = \frac{\bar{w}_0_{m_k} - \bar{w}_0_{m_{k-1}}}{m_k - m_{k-1}}$$

Düzgün yayılı yüklü özel ortotrop kare plak için orta noktadaki boyutsuz çökme değeri (Reddy,1997)'de 0.006497 olarak hesaplanmıştır (Reddy, 1997). Referansta çökmenin işareti (+) kabul edilmektedir. Bu çalışmada hesaplanan boyutsuz çökme değeri, referanstaki çözüm ile %0.005 farklılık göstermektedir. Pratik olarak bu değerler aynı kabul edilebilir.

Bu problemde özel ortotrop kare plak, h kalınlığında kabul edilmektedir. Kalınlıkları (h/10) olan on tabakalı özel ortotrop kare plak üst üste konularak h kalınlığında on tabakalı özel ortotrop kare plak oluşturulmuş olsa, bu plağın da davranışı aynı bu örnekteki özel ortotrop kare plak gibi olmaktadır.

4. 2. Düzenli Simetrik Kare Plak

Düzgün yayılı yüklü, basit mesnetli, on tabakalı düzenli simetrik çapraz tabakalı kare plak için orta noktanın boyutsuz çökme değeri hesaplanmıştır. Tabakalardaki lif yönü plak orta düzlemine göre simetriktir ve lif doğrultuları sırayla x ve y yönündedir. Malzeme özellikleri oran olarak $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = 0.5$, $\nu_{12} = 0.25$ ve her bir tabakanın kalınlığı (h/10) şeklindedir.

Sonlu fark ağı bölüm sayısı m'ye göre orta noktanın boyutsuz çökme değerinin değişimi Tablo 2'de ve Şekil 6'da gösterilmiştir.

Bu problemde de doğruya en yakın çökme değerine karar verilirken eğimin işaret değiştirdiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre m=240 için hesaplanan -0.0068766013 değeri, düzenli simetrik çapraz tabakalı kare plak için boyutsuz çökme değeridir.

Tablo 2. Düzenli simetrik çapraz tabakalı kare plakta orta noktanın boyutsuz çökme değerleri.

m	\bar{w}_0	eğim
40	-0.0068764981	
80	-0.0068765778	-1.991E-09
120	-0.0068765923	-3.646E-10
160	-0.0068765981	-1.431E-10
200	-0.0068765988	-1.950E-11
240	-0.0068766013	-6.242E-11
280	-0.0068766003	2.477E-11
320	-0.0068765963	1.012E-10
360	-0.0068765782	4.530E-10
400	-0.0068765983	-5.042E-10

4. 3. Düzenli Antisimetrik Kare Plak

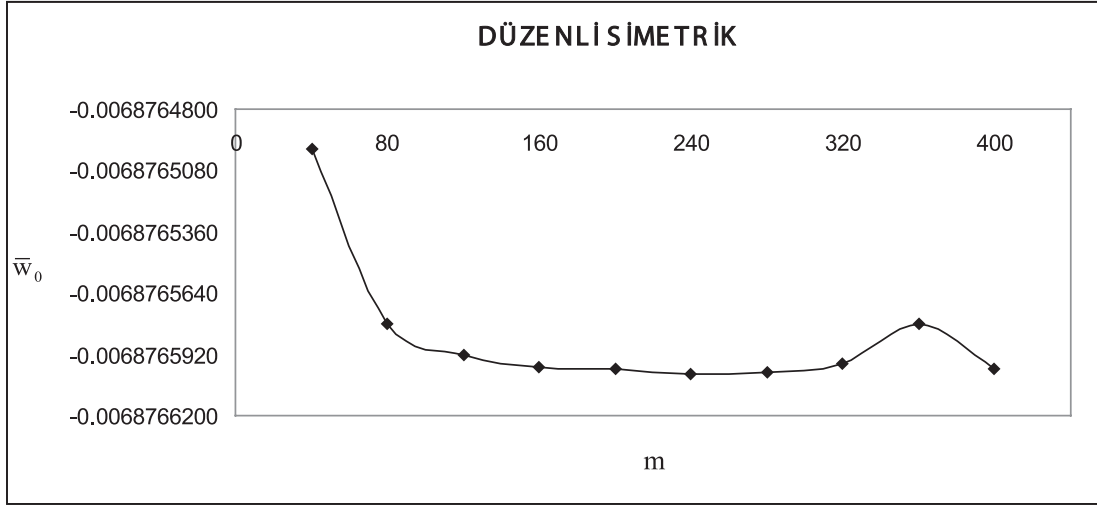
Düzgün yayılı yüklü, basit mesnetli, on tabakalı düzenli antisimetrik çapraz tabakalı kare plak için orta noktanın boyutsuz çökme değeri hesaplanmıştır. Tabakalardaki lif yönü plak orta düzlemine göre antisimetriktir ve lif doğrultuları sırayla x ve y yönündedir. Malzeme özellikleri oran olarak $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = 0.5$, $\nu_{12} = 0.25$ ve her bir tabakanın kalınlığı (h/10) şeklindedir.

Tabakalı kompozit plaklardan antisimetrik plaklar için \bar{u}_0 ve \bar{v}_0 deplasmanları özel ortotrop ve düzenli simetrik plaklardaki gibi sıfır olmayıp hesaplanması gerekmektedir. Bu durumda bilinmeyen sayısı diğer örneklere göre üç kat artmaktadır. Bunun sonucunda elde edilen lineer denklem takımı Gauss-Seidel iterasyon yöntemi ile iteratif olarak elde edilmiştir. Sonlu fark ağı bölüm sayısı m'ye göre orta noktanın boyutsuz çökme değerinin değişimi Tablo 3'te ve Şekil 7'de gösterilmiştir.

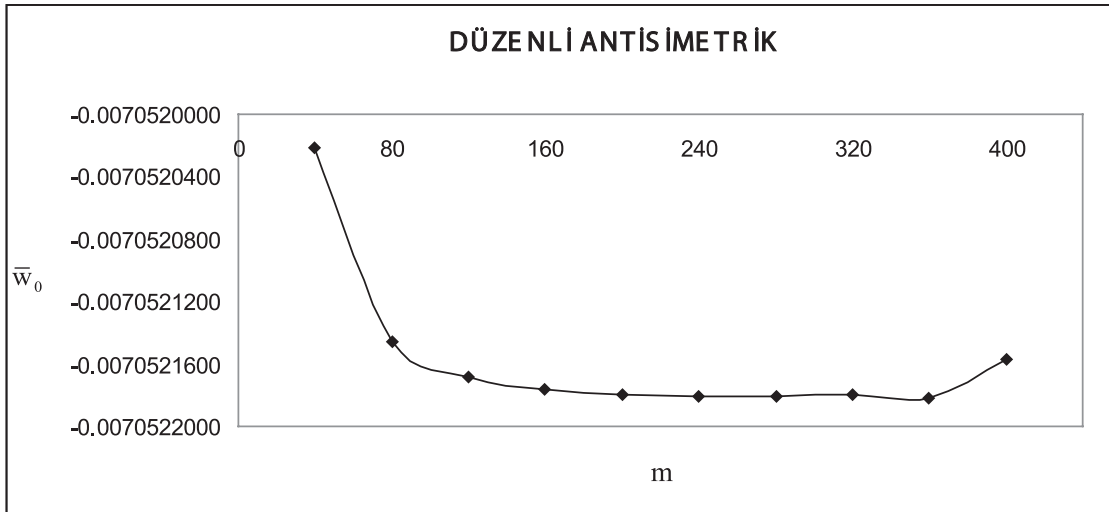
Tablo 3. Düzenli antisimetrik çapraz tabakalı kare plakta orta noktanın boyutsuz çökme değerleri.

m	\bar{w}_0	eğim
40	-0.0070520217	
80	-0.0070521456	-3.10E-09
120	-0.0070521686	-5.75E-10
160	-0.0070521766	-2.00E-10
200	-0.0070521792	-6.62E-11
240	-0.0070521809	-4.17E-11
280	-0.0070521806	7.81E-12
320	-0.0070521798	1.92E-11
360	-0.0070521823	-6.37E-11
400	-0.0070521573	6.25E-10

Bu problemde doğruya en yakın çökme değerine karar verilirken eğimin işaret değiştirdiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre m=240 için hesaplanan -0.0070521809 değeri, düzenli antisimetrik çapraz tabakalı kare plak için boyutsuz çökme değeridir. Plak orta noktasında x yönündeki \bar{u}_0 boyutsuz deplasmanı ve y yönündeki \bar{v}_0 boyutsuz deplasmanı ise Navier SS-1 sınır şartlarına göre sıfırdır. Ayrıca, plakta en büyük \bar{u}_0 boyutsuz deplasmanı 0.00107689 olarak x=0 mesnedinin orta noktasında, en büyük \bar{v}_0 boyutsuz deplasmanı ise -0.00107689 olarak y=0 mesnedinin orta noktasında hesaplanmıştır.



Şekil 6. Düzenli simetrik çapraz tabakalı kare plak için boyutsuz çökme değerleri.



Şekil 7. Düzenli antisimetrik çapraz tabakalı kare plak için boyutsuz çökme değerleri.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada; klasik plak teorisinin tabakalı kompozitlere genişletilmesiyle elde edilen klasik kompozit tabakalı plak teorisi kullanılarak düşey yükleme etkisindeki kompozit tabakalı plaklar için denge denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denge denklemleri sonlu farklar yöntemiyle lineer denklem takımlarına dönüştürülmüştür. Örnek olarak; düzgün yayılı yükle yüklenmiş, Navier SS-1 sınır şartına uygun olarak dört kenarından basit mesnetli, özel ortotrop, düzenli simetrik ve düzenli antisimetrik kompozit tabakalı kare plaklar ele alınmıştır. Çözüm için özel ortotrop ve düzenli simetrik plaklar için Gauss eliminasyon yöntemi, düzenli antisimetrik plak için Gauss-Seidel iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Özel ortotrop plak örneğinde hesaplanan sonuç,

referans (Reddy, 1997) ile karşılaştırıldığında pratikte aynı kabul edilebilecek değerlere ulaşılmıştır. Düzenli simetrik ve düzenli antisimetrik 10 tabakalı plak örneklerinde hesaplanan sonuçların kıyaslanabileceği bir çalışmaya yazarların bilgisi dâhilinde rastlanılmamıştır. Çözülen örnekler için sonlu fark bölüm sayısı m ile plak orta noktası boyutsuz çökme değeri \bar{w}_0 arasındaki ilişkiler tablolar ve grafikler şeklinde sunulmuştur.

Farklı sınır şartlarına sahip plakların sonlu farklar yöntemi ile analizi için sonlu fark denklemlerinin tekrar düzenlenmesi gerektiğinden bu çalışmada yalnızca Navier SS-1 sınır şartına uygun olarak dört kenarından basit mesnetli plaklar incelenmiştir.

6. EKLER

6. 1. Kullanılan Sonlu Farklar Fonksiyon İfadeleri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \approx \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + 2u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + 2u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \approx \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + 2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{2(\Delta y)^3}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^4}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3} \approx \frac{u_{i+2,j+1} - u_{i+2,j-1} - 2u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j-1} + 2u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j-1} - u_{i-2,j+1} + u_{i-2,j-1}}{4(\Delta x)^3 \Delta y}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^3 \partial x} \approx \frac{u_{i+1,j+2} - 2u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j-2} - u_{i-1,j+2} + 2u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j-2}}{4(\Delta y)^3 \Delta x}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \approx \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{(\Delta y)^4}$$

KAYNAKLAR

Akavcı, S.S., Arslan, H.M. ve Bikçe, M. 2003. "Tabakalı kompozit plakların analizi", Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi. 18 (2), 149-159.

Aydoğdu, M. 2009. "A new shear deformation theory for laminated composite plates", Compositie Structures. 89 (1), 94-101.

Doğan, A.ve Arslan, H.M. 2004."Fiber çubuklarla güçlendirilmiş tabakalı plakların plak düzlemine dik yükleme etkisindeki davranışı", Ç.Ü. Müh. Mim. Fak.Dergisi. 19 (2), 173-189.

Ergün, A.ve Kumbasar, N. 2003. "İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi", İTÜ Dergisi/d Mühendislik. 2 (1), 35-44.

Mohite, P. M. and Upadhyay, C. S. 2007. "Region-by-region modeling of laminated composite plates", Computers and Structures. (85), 1808-1827.

Moleiro, F., Mota Soares, C.M., Mota Soares, C.A. and Reddy, J.N. 2008. "Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates", Computers and Structures. (86), 826-838.

Reddy, J. N. 1997. "Mechanics of laminated composite plates-Theory and analysis", 1st Edn, CRC Press.

Urthaler, Y. and Reddy, J.N. 2008. "A mixed finite element for the nonlinear bending analysis of laminated composite plates based on FSDT", Mechanics of Advanced Materials and Structures. 15 (5), 335-354.

Yıldız, A. ve Eröz, M. 2006. "Sonlu elemanlar yöntemi ile kompozit bir plaktaki yer değiştirme ve gerilme analizi", SAÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 10 (2), 24-30.