



## RETORNOS DE ESCALA EM DEA: CRÍTICAS AO BCC E NOVO MODELO

### RETURNS TO SCALE IN DEA: BCC AND CRITICAL TO NEW MODEL

Juliana Benício

Doutoranda em Engenharia de Produção pela Universidade Federal Fluminense, UFF  
Mestre em Economia pela Universidade Federal Fluminense, UFF  
Diretora da Faculdade Cenecista da Ilha do Governador, FACIG.

João Carlos C. B. Soares de Mello

Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ  
Professor Associado 1 da Universidade Federal Fluminense, UFF.  
Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq – Nível 1D.

#### Resumo

Tomando como base o clássico modelo DEA CCR utilizado para medir a eficiência de DMUs analisadas (Decision Making Units), o presente artigo tem como objetivo apresentar um modelo capaz de medir retornos de escala variáveis; crescentes, constantes e decrescentes. Muitos estudos já alertam para problemas na formulação do modelo DEA BCC, entre eles: eficiências negativas, eficiências por default, a invalidez do fator de escala para soluções múltiplas e a incapacidade do modelo verificar retornos crescentes de escala. Segundo é desenvolvido neste estudo, o modelo DEA BCC não vislumbra em seus resultados uma análise de escala real conforme defendida pelos autores. A fronteira eficiente exposta pelo modelo BCC sempre apresenta retornos de escala decrescentes, negligenciando retornos crescentes de escala. Para tanto apresenta-se uma interpretação dos reais significados dos resultados do modelo BCC e, posteriormente, o estudo apresenta um algoritmo que solucione tal problema.

**Palavras-Chave:** DEA, BCC, Eficiência de Escala.

#### Abstract

Based on the classic CCR DEA model used to measure the efficiency of analyzed DMUs (Decision Making Units), this article aims to present a model capable of measuring variable returns to scale; increasing, constant and decreasing. Many studies have warned about problems in the formulation of DEA BCC, including: negative efficiencies, efficiencies by default, the invalidity of the scale factor for multiple solutions and the inability of the model verify increasing returns to scale. As is developed in this study, BCC DEA model does not present its results that analyses the real scale as advocated by the authors. The efficient frontier exposed by the BCC model always presents decreasing returns scale, neglecting increasing returns of scale. For this purpose, this study presents an interpretation of the real meaning of the results of BCC model, and subsequently an algorithm that solves such a problem.

**Key-words:** DEA, BCC, scale efficiency.

## 1. Introdução

O modelo DEA (Data Envelopment Analysis - Análise Envoltória dos Dados) é capaz de avaliar o grau de eficiência de unidades produtivas que realizam uma mesma atividade, quanto à utilização dos seus recursos. A medida de eficiência é obtida através da razão da soma ponderada dos produtos (outputs) pela soma ponderada dos insumos (*inputs*). Segundo Thanassoulis (2001, 17) “As eficiências estimadas são comparativas ou relativas porque permitem alterações a uma unidade, tanto relacionadas a recursos de entrada quanto aos recursos de saída, quando comparadas a outras unidades benchmark, ao invés de comparar a algum senso absoluto”. Esta técnica permite analisar desempenho de unidades produtivas (DMUs) em produzir múltiplos outputs através de múltiplos inputs (Jubran, 2006) quando comparada com as outras unidades observadas.

O resultado do modelo é a construção de uma fronteira de produção, também denominada de fronteira eficiente, de tal forma que as DMUs que possuírem a melhor relação "produto/insumo" serão consideradas mais eficientes e estarão situadas sobre esta fronteira e, as menos eficientes estarão situadas numa região inferior à fronteira, conhecida como envelope (Périco, 2009). O modelo original CCR (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978) constrói a fronteira eficiente não paramétrica linearmente convexa, onde é impossível aumentar qualquer output, sem aumentar qualquer input; ou ainda, se reduzir *inputs* sem a redução de outputs, mantendo o retorno de escala constante.

Banker, Charnes, e Cooper (1984) desenvolveram um modelo DEA, BCC, que incorporasse a noção econômica de retornos de escala (Banker, Thrall, 1990). O objetivo principal do modelo é calcular eficiências que levassem em conta a eficiência da escala que a unidade avaliada (DMU) se encontra. Ou seja, uma DMU que se encontra em escalas onde o retorno de escala é crescente ou decrescente, não necessita, necessariamente, apresentar uma relação de output virtual/output virtual como a da DMU mais eficiente. Sendo assim, a condição de proporcionalidade do CCR não é garantida neste modelo.

Sendo assim, o modelo BCC busca agregar valor interpretativo ao modelo DEA ao possibilitar que a tecnologia exiba propriedades de retorno à escala diferentes ao longo de sua fronteira, ou seja, permite que a produtividade máxima varie ao longo de sua fronteira.

Barbot e Castro (1997) destacam as seguintes razões que contribuem para que a tecnologia apresente rendimentos crescentes à escala:

- Existência de indivisibilidades técnicas ou custos fixos, que se diluem com o aumento da escala de produção (exemplo: custos da rede de telefones móveis, design de produto, produção musical ou cinematográfica).
- A divisão do trabalho e especialização pode permitir ganhos de eficiência (exemplo: linha de montagem).
- As necessidades de estoque aumentam normalmente menos do que à escala (exemplo: hipermercados).

- Relações geométricas: por exemplo, duplicar as paredes de um armazém, quadruplica a área disponível.

Barbot e Castro (1997) descrevem, ainda, razões que contribuem para a existência de rendimentos decrescentes à escala:

- Excesso de divisão de trabalho e conseqüente perda da visão global da empresa e seus objetivos (fruto da grande complexidade organizacional);
- Dificuldades de supervisão/gestão: à medida que a escala de produção aumenta, a hierarquia de supervisores tende a aumentar e a respectiva eficiência a diminuir (também fruto da grande complexidade organizacional);
- Limitação do produto (indústrias extrativas).

Belloni (2000) defende que o indicador de eficiência resultante da aplicação do BCC permite identificar a ineficiência técnica, isolando da ineficiência produtiva o componente associado à ineficiência de escala. Contudo, ao se confrontar os pressupostos básicos do modelo BCC, algumas inconsistências aparecem quando o relacionamos aos conceitos da microeconomia.

Segundo arcabouço econômico o rendimento de escala traduz a relação entre um aumento das quantidades de *inputs* e o correspondente aumento de *outputs*. Portanto, uma fronteira eficiente que traduzisse as DMUs eficientes em cada escala analisada deveria representar também àquelas DMUs que, na escala que estão atuando, apresentasse a produtividade máxima (Simon e Blume, 1994). Ou seja, para uma determinada DMU ser considerada ineficiente, na escala em que atua, outra DMU deve apresentar maior que a mesma.

Conforme será defendido neste estudo, o modelo BCC apresenta uma fronteira com retornos variáveis, contudo esta fronteira apenas considera a possibilidade de retornos decrescentes e constantes de escala, conforme será provado.

Isso porque a existência de retornos variáveis de escala está diretamente relacionada ao comportamento não uniforme da fronteira. Sendo assim, a fronteira com retorno crescente de escala deve apresentar a segunda derivada da curva maior que zero, ou seja, a curva é convexa voltada para cima, representando que se a escala aumentar será verificado um ganho de produtividade. No caso de retornos decrescentes, a segunda derivada da fronteira de produção é menor que zero, ou seja, a curva é convexa voltada para baixo, pois a cada aumento de escala existe uma perda de produtividade. Neste sentido, defende-se que o modelo BCC mensura eficiências apenas baseando-se em uma fronteira com retornos decrescentes ou contatantes. Apesar do modelo incorporar a possibilidade de apresentar DMUs eficientes com diferentes retornos de escala; contudo estes nunca são crescentes.

## 1.1 Objetivo

O presente artigo tem como objetivo apresentar um modelo que calcule eficiências considerando retornos de escala variáveis: crescente, decrescente e constante.

Para tanto, defenderá a importância da aplicação do mesmo, baseado nas críticas que fará à incapacidade da fronteira BCC apresentar retornos crescentes de escala.

Tal crítica está inserida em um arcabouço bibliográfico abrangente, que expõem diferentes críticas ao BCC. Com base nisso, o artigo tem como objetivo, primeiramente, apresentar inconsistências do BCC, mostrando que eficiências de escala crescentes não existem no modelo e posteriormente, será proposto um modelo alternativo para medir a eficiência de escala de DMUs.

## 2. Eficiência de escala e o modelo BCC

O objetivo de DEA consiste em comparar certo número de DMUs que realizam tarefas similares e se diferenciam nas quantidades de *inputs* que consomem e de *outputs* que produzem. Há dois modelos DEA clássicos: o modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes, 1978), que considera retornos de escala constantes, e o modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper, 1984), que considera retornos variáveis de escala e não assume proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*.

O modelo BCC, apresentou uma alteração na formulação do CCR, interpretando o fato de que, em diferentes escalas, as DMUs poderiam apresentar parâmetros diferentes de eficiência, já que, as condições que influenciam a produtividade da produção, também são diversas. Para tanto, Banker, Charnes e Cooper (1984) introduzem o conceito de tamanho da escala mais produtiva (most productive scale size\_ mpss). Uma mpss é um ponto ou segmento de reta limítrofe, mas que, também deve maximizar a produtividade ( $y/x$ ). A Figura 1 apresenta todos os pontos do segmento de reta que correspondem a uma mpss (Jutsuzumi et Nakamura, 2003).

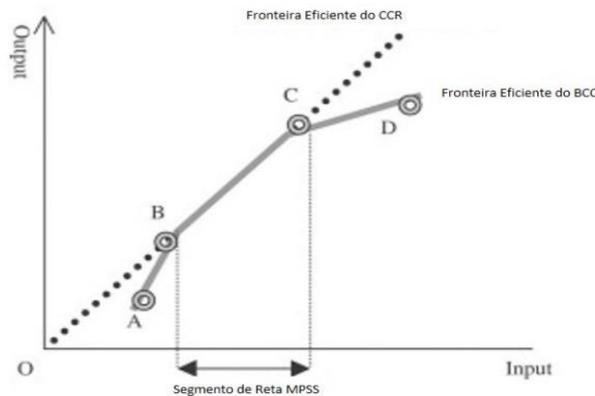
Posteriormente, foi introduzido ao BCC (Banker et Thral, 1990) a formulação de um modelo para várias soluções ótimas para a estimação do retorno variável de escala. Considerando-se uma produção de múltiplos *inputs* ( $X$ ) e *outputs* ( $Y$ ), definiu-se  $T$  o conjunto de possibilidade de produção onde:  $\{(X, Y) \parallel Y \text{ pode ser produzido com output } X\}$ .

Dada a convexidade garantida pelo postulado 1 (Banker, Charnes, Cooper, 1987) por:  $Se (X, Y) \in T \text{ e } (X', Y') \in T, \text{ então } (\lambda X + (1 - \lambda)X', \lambda Y + (1 - \lambda)Y') \in T \text{ para qualquer } \lambda \in [1, 0]$

Então o conjunto de possibilidades de produção é determinado por (1):

$$T \equiv \{(X, Y) \parallel X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\} \quad (1)$$

**Figura 1: Segmento de reta na fronteira de escala mais produtiva**



A fronteira deste conjunto convexo consiste em pedaços de hiperplanos com  $k \leq n$  vértices, representados pela menor distância possível entre dois pontos. Sendo assim, a projeção de qualquer DMU não eficiente neste hiperplano, poderá ser representado por uma equação definida pelo postulado 1. Ou seja, a DMU não eficiente projetada em um ponto de um segmento de reta da fronteira será representado por uma equação de combinação linear, onde a soma das contribuições das DMUs eficientes ( $\lambda_j$ ) tem que resultar em 1.

## 2.1 Revisão da formulação de retornos variáveis de escala proposto pelo modelo BCC

Contrariamente ao fato de que a fronteira gerada pelo modelo BCC apresentar a produtividade marginal negativa ao longo de toda a curva, os autores do modelo (Banker et al., 1984) consideram que, em diferentes escalas as DMUs podem apresentar tanto retornos decrescentes, quanto crescentes e constantes de escala. Em um modelo de um input e um output, conforme Figura 1, pode apresentar, segundo os autores, retornos crescentes de escala (a região AB), retornos constantes de escala (região BC) e retornos decrescentes de escala (região CD). A justificativa para tal argumento vem do resultado apresentado pelo modelo dos multiplicadores (2):

$$\text{Max } h_0 = \sum_{i=1}^m u_i y_{i0} + u^*$$

sujeito a:

$$-\sum_{r=1}^s v_r x_{rj} + \sum_{i=1}^m u_i y_{ij} + u^* \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^s v_r x_{r0} = 1$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

Pelo PPL apresentado em (2), o modelo BCC inclui a chamada variável de escala  $u^*$ , que indicará se a DMU eficiente se encontra em retornos crescentes, decrescentes ou constantes de escala. Banker et Thrall (1990) definem que caso a DMU apresente  $u^*=0$  a DMU se encontra em retornos constantes de escala. Se a DMU apresentar  $u^*<0$  ela se encontrará em retorno decrescente de escala e, finalmente, se apresentar  $u^*>0$ , a DMU estará com retornos crescentes de escala.

Tal resultado é contraditório ao fato de a fronteira gerada pelo modelo BCC ter a convexidade voltada para baixo, e por este motivo, apresentar apenas retornos decrescentes de escala.

Sendo assim, visto que, o modelo dos multiplicadores pode apresentar tanto  $u^*$  positivo ou negativo, avança-se no sentido de interpretar, segundo fundamento argumentativo apresentado, o significado da variável de escala encontrada no modelo dual do BCC. Como se segue:

*a. O sinal do fator de escala*

Como foi visto, procura-se reinterpretar o significado do resultado apresentado pelo modelo dos multiplicadores do BCC, tendo em vista que seu primal apresenta fronteira convexa voltada para baixo e que, portanto, tal fronteira apresentaria retornos decrescentes de escala ao longo de toda curva.

Segundo modelo (2) inclui-se a variável de escala  $v^*$  ( $u^*$ ) é incluída na função objetivo e nas restrições, e o valor desta variável estaria indicando o retorno de escala da DMU.

Quando o modelo BCC, relaxa a proporcionalidade entre inputs e outputs, gerando uma fronteira convexa eficiente, observa-se que, em um exemplo com 1 input e 1 output, algumas DMUs antes ineficiente ( $\theta \leq 1$ ), passam a ser consideradas eficientes ( $\theta = 1$ ). Isso ocorre, pois, em uma orientação input, uma DMU poderia apresentar mais inputs, comparativamente com o modelo CCR, para atingir a proporção da média ponderada entre inputs e outputs virtual considerada eficiente. Nesta nova condição, a DMU passa a apresentar novo valor para seu peso  $v$ . Seu peso  $u$  continua fixo em uma formulação de orientação input. Nesta formulação, para que ocorra a otimização, a restrição referente à DMUmpss passa a apresentar valor igual a zero, ou:  $v x_{mpps} - u y_{mpps} + v^* = 0$

Sabendo que  $u y_{mpps}$  é conhecido e fixo ( $k$ ); então:

$$v^* = k - v x_{mpps} \quad (3)$$

Ao substituir esta equação em cada PPL a ser resolvido de cada DMU analisada, chega-se a:  
 $Min f_0 = \sum v x_{i0} + k - v x_{mpps}$

Percebe-se que, quando:

$x_{mpps} > x_o \Rightarrow$  o coeficiente de  $v$  terá valor negativo. Se a função objetivo minimiza, o coeficiente  $v$  será aumentado em relação ao resultado do CCR.

$x_{mpps} < x_o \Rightarrow$  o coeficiente de  $v$  terá um valor positivo. Se a função objetivo minimiza, o coeficiente  $v$  será diminuído em relação ao resultado do CCR.

Ao se aumentar o coeficiente  $v$ , pela equação (3) verifica-se que a variável  $v^*$  deverá assumir um valor negativo para compensar o incremento do peso  $v$ . Na segunda situação, ao se diminuir o coeficiente  $v$ , a variável  $v^*$  deverá assumir um valor positivo para compensar o decréscimo do peso  $v$ .

Ou seja, o coeficiente do fator de escala apresentado pelo BCC não relaciona-se à retornos variáveis de escala e sim à compensação de alteração dos pesos devido a DMU estar antes ou depois da DMUmpss.

Neste sentido, a variável  $v^*$  ser positiva significa que o peso do input (no caso da orientação input) foi reduzido em relação ao CCR. Ou seja, significa que a projeção da DMU observada pertence a uma parte da fronteira onde, na sequência de escala as DMUs se aproximam da mpss.

Inversamente, se a variável  $v^*$  for negativa significa que o peso do input (no caso da orientação input) foi aumentado em relação ao CCR. Ou seja, significa que a projeção da DMU observada pertence a uma parte da fronteira onde, na sequência de escala as DMUs se aproximam da mpss.

**Portanto, esse fator de escala pode ser considerado uma medida de eficiência de escala de um modelo de retornos não-crescentes.** As variáveis  $u^*$  e  $v^*$ , apesar de significarem a variação de retornos de escala, seus sinais negativos e positivos, não significam retornos decrescentes ou crescentes (respectivamente), mas sim a compensação feita pelo modelo, que passa a levar em consideração a POSIÇÃO da DMU, tendo em vista a busca pela otimização na nova fronteira eficiente.

### ***b. Interpretação Gráfica do fator de escala***

A análise gráfica tomará como base a interpretação feita por Golony et Yu (1997). Nesta formulação, os autores buscam interpretar o valor de  $u^*$  e  $v^*$  graficamente.

Considere  $\alpha_o$ , a variação proporcional em todos outputs da DMUo e  $\beta_o$ , a variação proporcional nos inputs. O conjunto de todas as variações proporcionais (radiais) possíveis associadas a DMUo, pode ser definida por (4):

$$F(X_o, Y_o) = \{(\alpha_o, \beta_o) / \beta_o \cdot X_o \geq \sum_{j=1}^n X_j \cdot \mu_j, \alpha_o \cdot Y_o \leq \sum_{j=1}^n Y_j \cdot \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \mu_j \geq 0\} \quad (4)$$

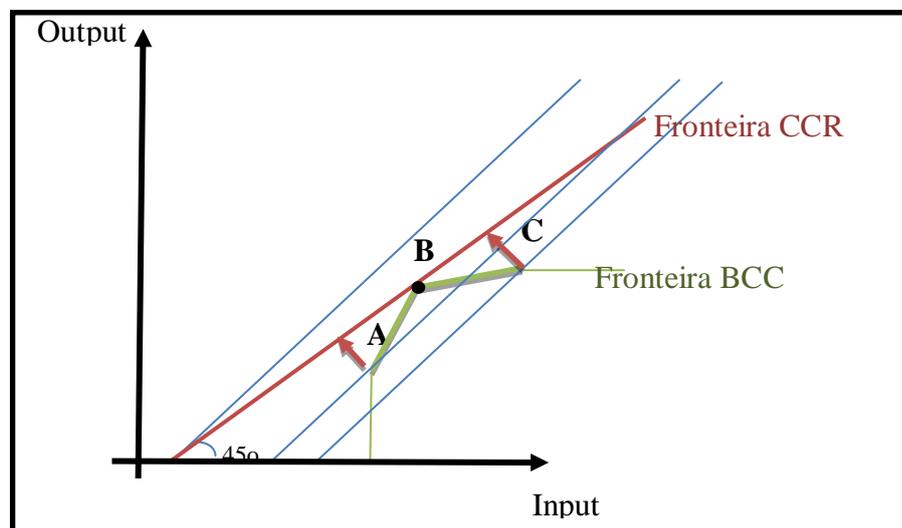
Para achar-se o maior incremento de produtividade possível uma DMUo deve minimizar  $\beta_o$  (variação dos inputs) e maximizar  $\alpha_o$  (variação dos outputs); ou, ainda, minimizar  $\beta_o / \alpha_o$  ou maximizar  $\alpha_o / \beta_o$ .

A partir do exposto, sabe-se que, a solução ótima deve satisfazer  $\alpha_o \geq \beta_o$ , resultando em todas as regiões projetáveis acima ou sobre a reta de 45°, onde  $\alpha = \beta$ . As DMUs que se tornaram eficientes no BCC, mas que não eram eficientes no CCR, ao se aplicar variações proporcionais onde,  $\alpha = \beta$ , suas projeções seriam ineficientes.

Sendo assim, tem-se que “a direção ótima para minimizar  $\beta_o / \alpha_o$ , ou maximizar  $\alpha_o / \beta_o$  é aquela perpendicular à reta de 45°”. Tal teorema é comprovado em Golony et Yu (1997, 30). Portanto, pode-se concluir que o fator de escala, sendo uma variável calculada por um PLL de otimização, também representará a distância vetorial entre a DMUo e a reta CCR, no sentido perpendicular à reta de 45°, conforme demonstrado na Figura 4 pelas setas vermelhas. As retas azuis são aquelas que possuem um ângulo de 45° e as retas verde e vermelhas representam, respectivamente, a fronteira CCR e BCC.

Observa-se que o fator de escala ( $v^*$  ou  $u^*$ ), conforme apresentado no tópico (a) da seção 4.2, é um fator compensatório à busca de otimização do PPL, mas que apenas vislumbra retornos não-crescentes, já que a curva que é tomada como base para tal mensuração, é uma curva convexa, voltada para baixo.

**Figura 4: Interpretação Gráfica do Fator de Escala do BCC**



Destaca-se, ainda, que ao se aproximar da DMUmpss a distância diminui. Por este motivo o fator de escala também diminui, em módulo, assim como demonstrado anteriormente.

### 3. Revisão da literatura crítica ao BCC

O modelo BCC, por meio de uma reformulação do problema original do CCR propõe interpretar os retornos variáveis de escala na análise de eficiência do modelo DEA. Ou seja, o modelo BCC calcula eficiências considerando a escala em que a DMU atua. Contudo, a formulação deste modelo é alvo de críticas de diferentes bases argumentativas. De forma geral, essas críticas podem ser agrupadas nos seguintes grupos:

O **primeiro** grupo de críticas destacam a existência de eficiências negativas implícitas, o que descaracteriza a propriedade desejada para uma eficiência na modelagem que garanta que a eficiência

seja  $>0$  (Gomes Junior et al, 2013). Estas eficiências negativas foram previamente detectados por Soares de Mello et al (2002), quando se utiliza uma fronteira DEA suavizadas, orientada input em uma Avaliação Cruzada. Wu et al (2009), Appa et al (2006) e Soares de Mello et al. (2013) também destacaram o problema da eficiência negativa em modelos BCC de Avaliação Cruzada. Já Gomes Junior et al. (2013) verificou eficiências negativas em projeções não radiais.

De qualquer forma, essas críticas explicitam a inadequação em algumas variações de aplicações do modelo BCC à modelagem clássica. O **segundo** grupo de críticas levantam a inapropriação de DMUs com inputs muito baixos, ou output muito alto serem consideradas eficientes, por não terem DMU em escalas comparáveis. Essas DMUs são definidas eficientes por default, ou à partida (Soares de Mello et al, 2005). Rubem et al (2013) destaca que a orientação do modelo BCC pode trazer comparações inadequadas, pois uma determinada DMU, dependendo de sua localização pode ter sua eficiência medida relativamente a uma DMU muito grande ou muito pequena (Ali et al, 2009 e Dulá, 2002).

A **terceira** crítica ao modelo BCC a ser destacada baseia-se no fato que, dependendo da localização de uma DMU ineficiente, suas projeções eficientes (orientada a output ou a input) podem apresentar retornos de escala diferentes. Dependendo da localização uma determinada DMU ineficiente pode ser projetada a *input* e ter retornos crescentes, e ser projetada a *output* e ter retornos decrescentes.

O **quarto** grupo de críticas argumentam que o fator de escala gerado no resultado do BCC não é válido para modelos de soluções múltiplas, portanto propõem uma análise qualitativa do mesmo. Um grupo de autores adotaram modelos alternativos ao BCC para estimar retornos os escala em DEA; Fare, Grosskopf et Lovell (1983), Fare, Grosskopf et Lovell (1985), Fare et Grosskopf (1985), comparam a eficiência baseando-se em 3 bases tecnológicas: retornos constantes, crescentes e decrescentes de escala; ou seja realizam um estudo da eficiência se a projeção se desse em diferentes retornos de escala. Zhu e Shen (1995), Seiford e Zhu (1999) e Tone (1995) argumentam que tanto o BCC quanto o arcabouço teórico de Fare, chegam a classificações idênticas. o fato do modelo apresentar soluções múltiplas enfraquecem a validação do valor do fator de escala do BCC como um mensurador de escala, para tanto, apresentaram modelos que procuraram classificar qualitativamente retornos de escala com soluções múltiplas. Tone (1995) defende que o modelo BCC tem eficiências inequívocas apenas para as DMUs eficientes da fronteira, contudo o fator de escala das DMUs ineficientes projetadas na fronteira BCC por apresentarem soluções múltiplas, mudam completamente a forma de análise. Chang e Ghu (1991) invalidaram o modelo BCC e estimaram o retorno de escala conceitualmente diferente do BCC. O uso de estimadores projetados em um ponto interior à fronteira pode ser aprimorado ao se agregar a análise da elasticidade do fator de escala (Krivonozhko et Forsund, 2009; Forsund, 1996; Forsund et Hjalmarsson, 2004). De acordo com Krivonozhko et Forsund (2009), apesar do hiperplano de soluções não ser único, a base de soluções do primal e do

dual do BCC pode determinar fator de retornos de escala a partir de um ponto projetado na fronteira, e é neste sentido que os autores realizam sua análise de elasticidade.

No ponto de vista deste estudo, independente do viés do estudo desses autores, as críticas de que a multiplicidade de soluções invalidarem o fator de escala do BCC são críticas inválidas, já que seu sinal nunca é ambíguo; o que, segundo o modelo, indicará o retorno crescente ou decrescente. Além disso, o fator de escala poderia ser mensurado a partir de uma fronteira suavizada.

Este artigo invalida o fator de escala argumentando que diante da convexidade de sua fronteira, a produtividade marginal é sempre negativa, ou seja, os retornos de escala são decrescentes. Em Nacif, Soares de Mello et Meza (2009) e Soares de Mello et al (2008) os autores já sinalizam paradoxos do modelo neste sentido. Para tanto o modelo BCC será revisitado à luz dos fundamentos básicos da teoria da produção como forma de realizar um estudo comparativo e investigar se existe convergência conceitual dos mesmos, no que se refere à interpretação de retornos variáveis de escala feita pelo BCC.

#### 4. A onipresença dos retornos crescentes de escala do BCC

Diante das possibilidades de produção, a fronteira eficiente de uma função de produção pode apresentar as seguintes variações:

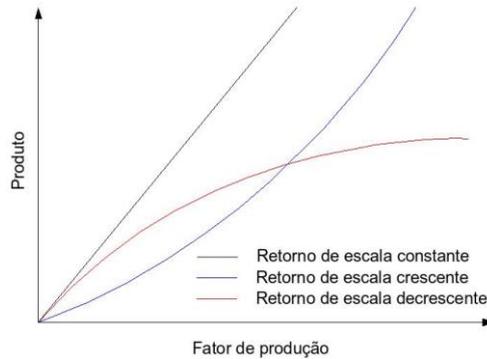
Caso a variação dos insumos seja a mesma dos produtos, a produção apresentaria um retorno constante de escala. Ou seja, ao se multiplicar os insumos por  $\gamma$  ( $X_1$  e  $X_2$ ), o output  $Y$  sofrerá uma variação igual a  $\gamma$ :  $Y(\gamma X_1, \gamma X_2) = \gamma Y(X_1, X_2)$ ,  $\forall \gamma > 0$

Ainda, se a variação dos insumos fosse maior que dos produtos, a produção apresentaria um retorno de escala decrescente. Ou seja, ao se multiplicar os insumos por  $\gamma$  ( $X_1$  e  $X_2$ ), o output  $Y$  sofrerá uma variação menor que  $\gamma$ :  $Y(\gamma X_1, \gamma X_2) < \gamma Y(X_1, X_2)$ ,  $\forall \gamma > 0$

E finalmente, se a variação do total produzido fosse maior que a variação dos insumos a produção apresentaria um retorno de escala crescente. Ou seja, ao se multiplicar os insumos por  $\gamma$  ( $X_1$  e  $X_2$ ), o output  $Y$  sofrerá uma variação maior que  $\gamma$ :  $Y(\gamma X_1, \gamma X_2) > \gamma Y(X_1, X_2)$ ,  $\forall \gamma > 0$

A Figura 3 demonstra os possíveis retornos de escala proveniente da alteração da quantidade dos fatores de produção utilizados ou da quantidade de output produzido. Ao adicionarmos inputs de produção, diferentes comportamentos da curva da fronteira de possibilidade de produção podem ser verificados (Varian, 1992). No caso da curva do retorno decrescente de escala, onde a convexidade da curva é para baixo, a produtividade marginal é sempre negativa.

**Figura 3: Retornos de escala**



No BCC é apresentada convexidade da fronteira eficiente segundo formato apresentado pela Figura 2, e acaba por gerar uma curva nos moldes da fronteira vermelha apresentada pela Figura 3, onde ao longo de toda curva se apresenta retornos decrescentes de escala.

O modelo DEA BCC projeta a eficiência das DMUs em uma fronteira formada por segmentos de reta (no caso de 1 input e de 1 output), não se caracterizando, portanto, uma curva diferenciável. Neste sentido, a interpretação do significado da curvatura da fronteira do modelo BCC dar-se-á por segmentos de reta. As diferentes concavidades estudadas, conforme Figura 4, podem ter seus segmentos de reta expressos da seguinte forma:

Nas curvas vermelhas e azuis da Figura 3 tem-se  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ , pois ambas as curvas são crescentes. Contudo, ao analisar-se a variação da variação, percebe-se que:

No caso da curva AZUL:  $\frac{\Delta(\Delta(y_{n+1}-y_n)-\Delta(y_n-y_{n-1}))}{\Delta(\Delta(x_{n+1}-x_n)-\Delta(x_n-x_{n-1}))} \geq 0$ ; ou seja ao longo da curva verifica-se retornos crescentes de escala.

No caso da curva VERMELHA:  $\frac{\Delta(\Delta(y_{n+1}-y_n)-\Delta(y_n-y_{n-1}))}{\Delta(\Delta(x_{n+1}-x_n)-\Delta(x_n-x_{n-1}))} \leq 0$ ; ou seja ao longo da curva verifica-se retornos decrescentes de escala.

Conforme apresentado na seção anterior, a curva BCC tem o formato da curva da curva vermelha que, portanto, apresenta apenas retornos decrescentes de escala.

Soares de Mello et al (2008) e Nacif, Pimenta e Soares de Mello (2005), em seus estudos de suavização de fronteira, (que consiste na substituição da fronteira original - linear por partes - por outra suavizada, de modo que esta fronteira suavizada seja próxima da original, e que tenha derivadas contínuas em todos os pontos) sinalizaram que ao gerar-se uma fronteira suavizada da fronteira DEA-BCC (Soares de Mello, 2002), observaram que a mesma tem sempre concavidade para baixo, ou seja,  $\frac{d^2O}{dI^2} \leq 0$ . Sendo assim, conclui-se que, ao apresentar a segunda derivada negativa ao longo de toda

curva, a fronteira BCC (FBCC) apresenta, por sua vez, retornos decrescentes de escala. Resumidamente, a fronteira do BCC, impõe ao modelo uma análise da eficiência calculada com base no fato que ao se ampliar a produção o incremento da produtividade diminui.

#### 4.1 Exemplo

Nesta seção busca-se explicitar, em exemplo de 1 input e 1 output, os argumentos apresentados.

Primeiramente, há que definir os conceitos de produtividade média e marginal, conforme a seguir:

- A produtividade média de um fator (PMe) é calculada como o quociente entre o output (y) e a quantidade utilizada do input em questão (x). Algebricamente:  $PM_e(x_i) = \frac{y}{x_i}$
- A produtividade marginal de um fator (PMg) é calculada como o quociente entre a variação na quantidade de output (y) e a variação na quantidade utilizada do input em

$$\text{questão (x), ou seja: } PM_g(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Sabendo-se que a partir da DMU de menor escala de *input* a produtividade marginal deve crescer, e que, a partir da escala de input da DMUmpss, a produtividade marginal decresce continuamente. Neste exemplo procurou-se trabalhar com dados em que, ao se aumentar a quantidade de input, a produtividade marginal não seguiu a tendência de alta ou de queda. Ou seja, quando a tendência é de aumento da produtividade marginal com o aumento da quantidade de input utilizado (Na Tabela 1\_da DMU1 à DMU5), uma certa DMU apresenta PMg menor que a PMg de uma DMU com quantidade utilizada de inputs menor. Da mesma forma, quando a tendência é de diminuição da PMg, com o aumento da quantidade de input utilizado, uma certa DMU apresenta PMg menor que uma DMU com quantidade utilizada de inputs maior (Na Tabela 1\_da DMU5 à DMU9). Neste caso, percebe-se que as DMUs destacadas (E1, E2 e E3) possuem Pmg menor que as DMUs 1, 3 e 6; respectivamente. As DMUs E1, E2 apresentam produtividades marginais menores que a DMU de menor quantidade de input (DMU3 e DMU1, respectivamente). E a DMU E3, da mesma forma, também apresenta uma produtividade marginal menor que a DMU com quantidade de input maior (DMU7).

*Resumidamente, para DMUs de menor escala de input que a DMUmpss, a perda de produtividade deve ser menor que das DMUs anteriores, (o que não ocorreu com as DMUs E1 e E2). Para DMUs de maior escala de input que a DMUmpss, o ganho de produtividade das DMU também deve ser menor que as das DMUs posteriores (o que não ocorre com a DMU E3).*

**Tabela 1: Dados das DMUs estudadas**

DMU	INPUT	OUTPUT	PMédia	PMg	Resultados do CCR	Resultados do BCC
1	0,5	0,5	1	1	0,321429	1,000000
x	1	0,7	0,7	0,4	0,225000	0,320000
2	1,5	3	2	1	0,642857	0,774194
3	2,5	6	2,4	3	0,771429	0,827586
y	3	7	2,333333	2	0,750000	0,783217
4	3,5	9	2,571429	5	0,826531	0,847059
5	4,5	14	3,111111	5	1,000000	1,000000
6	6	18	3	2,666	0,964286	1,000000
z	7	19	2,714286	1	0,872449	0,950000
7	7,5	21	2,8	2	0,900000	1,000000
8	8	22	2,75	2	0,883929	1,000000
9	8,5	22,5	2,647059	1	0,850840	1,000000

Ao aplicar-se o modelo CCR, observa-se que o mesmo padrão ocorre no cálculo das eficiências. Ou seja, as DMUs anteriores à mpss, as DMUs E1 e E2, apresentam perda de eficiência maior que as DMUs seguintes (DMUs 3 e 1 respectivamente). Da mesma forma, a DMU posterior à mpss, a DMUc, apresenta queda de eficiência maior que a DMU7. A aplicação do modelo BCC neste caso, deixa obvio que sua fronteira convexa negligencia as DMUs anteriores à mpss e que apresentam retornos crescentes de escala, como é evidenciado no cálculo da produtividade marginal.

## 5. Proposta de modelo de retornos variáveis de escala

Conforme defendido anteriormente, o modelo BCC não é capaz de calcular retornos crescentes de escala. Desta forma, o presente estudo propõe apresentar um modelo que calcule eficiências que considerem retornos variáveis de escala: crescente, constante e decrescente.

O algoritmo a ser apresentado será capaz de calcular a eficiência de escala das DMUs, para 1 input e 1 output, com base em fronteira eficiente gerada que apresenta retornos decrescentes e crescentes.

No Grafico 1, como exemplo, expõe-se a fronteira eficiente do exemplo, onde as DMUs E1, E2 e E3 estão representados pelos pontos x, y e z, respectivamente.

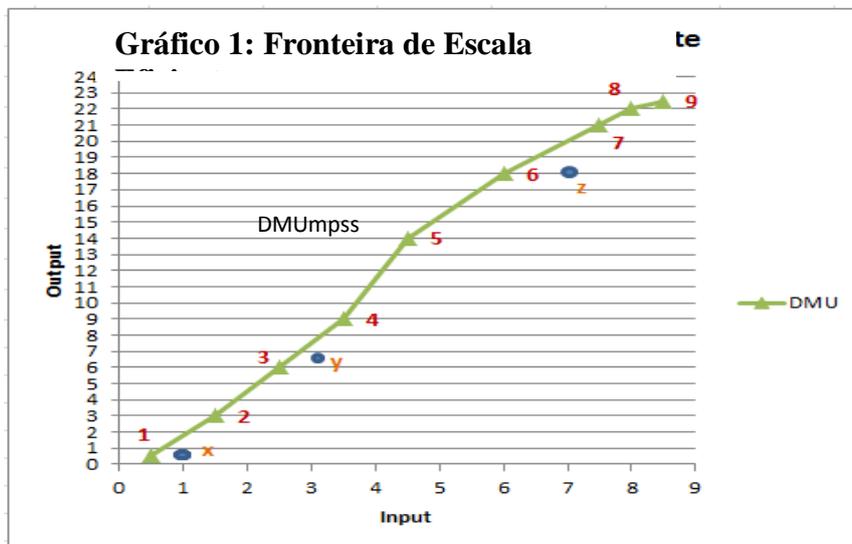
O algoritmo proposto produz uma fronteira com as seguintes características:

- A DMUmpss é caracterizado por um ponto de inflexão na fronteira, invertendo, portanto, o retorno de escala.
- Ser uma DMU eficiente segundo este modelo significa:
  - Ter eficiência EFreal igual a 1;

- Que a produção na fronteira é máxima para cada escala de input verificado. Todas as DMUs que estiverem abaixo da fronteira serão consideradas ineficientes;
- Levando em consideração os valores dos inputs das DMUs analisadas, A DMU antecessora E a DMU sucessora, AMBAS, apresentam valores de eficiência CCR mais altos (no caso de retornos crescentes de escala) ou mais baixos (no caso de retornos decrescentes de escala).

Para apresentar o algoritmo, algumas definições são convencionadas:

- A escala da DMU observada está relacionada à quantidade de input utilizado pela DMU;
- Escala da DMUmpss será chamada de Escala  $n_0$ ;
- A eficiência da DMUmpss será chamada de  $Ef_{mpps}$  e corresponde à Eficiência CCR;
- A DMU de maior escala, anterior à DMUmpss, terá a escala definida como Escala  $n_{-1}$ ; e assim sucessivamente.
- A DMU de menor escala, posterior à DMUmpss, terá a escala definida como Escala  $n_{+1}$ ; e assim sucessivamente.



Para apresentar o algoritmo, algumas definições são convencionadas:

- Escala da DMUmpss = Escala  $n_0$  com relativa eficiência =  $Ef_{mpps}$
- A DMU de maior escala, anterior à DMUmpss, terá a escala designada como = Escala  $n_{-1}$ ; e assim sucessivamente.
- A DMU de menor escala, posterior à DMUmpss, terá a escala designada como = Escala  $n_{+1}$ ; e assim sucessivamente.

No exemplo apresentado as definições seriam da seguinte forma aplicadas:

**Quadro 1: Definições das variáveis segundo algoritmo apresentado**

DMUs	Input	Resultados do CCR	Escala	Eficiência
1	0,5	0,321429	$n_{-6}$	$Ef_{-6}$
E1	1	0,225000	$n_{-5}$	$Ef_{-5}$
2	1,5	0,642857	$n_{-4}$	$Ef_{-4}$
3	2,5	0,771429	$n_{-3}$	$Ef_{-3}$
E2	3	0,750000	$n_{-2}$	$Ef_{-2}$
4	3,5	0,826531	$n_{-1}$	$Ef_{-1}$
5	4,5	1,000000	$n_0$	$Ef_0$
6	6	0,964286	$n_{+1}$	$Ef_{+1}$
E3	7	0,872449	$n_{+2}$	$Ef_{+2}$
7	7,5	0,900000	$n_{+3}$	$Ef_{+3}$
8	8	0,883929	$n_{+4}$	$Ef_{+4}$
9	8,5	0,850840	$n_{+5}$	$Ef_{+5}$

Dada as definições apresentadas segue o algoritmo apresentado:

**Etapa 1: CALCULAR A EFICIÊNCIA CCR**

Identificar a DMUmpss.

Definir a variável que se quer analisar o retorno variável de escala; esta variável deverá ser organizada de forma crescente. Neste algoritmo toma-se como base o input das DMUs.

**Etapa 2: IDENTIFICAR RETORNOS DE ESCALA REAIS.**

Tendo como base a variável a ser analisada:

BLOCO\_d: Comporão este bloco todas as DMUs que o input cresce enquanto suas eficiências CCR decrescem. Este bloco será designado de Bloco com retornos decrescentes de escala.

BLOCO\_c: Todas as DMUs em que o input cresce enquanto suas eficiências CCR também crescem. Este bloco será designado de Bloco com retornos crescentes de escala.

A DMU mpss apresenta retorno constante de escala e dividirá esses dois blocos.

**Etapa 3: IDENTIFICAR AS DMUs EFICIENTES E INEFICIENTES**

Conforme foi elaborado anteriormente, as eficiências CCR seguem o mesmo padrão das produtividades marginais. Portanto no BLOCO\_c as produtividades marginais e as eficiências CCR das DMUs são crescentes. Da mesma forma, no BLOCO\_d as produtividades marginais e as eficiências CCR das DMUs são decrescentes.

Serão consideradas EFICIENTES as DMUs que apresentarem  $\Delta_n^{ef} < 0$ , tal que:

- No caso do BLOCO\_c :  $\Delta_n^{ef} = (Ef_0 - Ef_n) - (Ef_0 - Ef_{n-1})$ ;
- No caso do BLOCO\_d :  $\Delta_n^{ef} = (Ef_0 - Ef_n) - (Ef_0 - Ef_{n+1})$ ;

Serão consideradas INEFICIENTES as DMUs que apresentarem  $\Delta_n^{ef} > 0$ , tal que:

- No caso do BLOCO\_c :  $\Delta_n^{ef} = (Ef_0 - Ef_n) - (Ef_0 - Ef_{n-1})$ ;
- No caso do BLOCO\_d :  $\Delta_n^{ef} = (Ef_0 - Ef_n) - (Ef_0 - Ef_{n+1})$ .

**a. Aplicação do modelo ao Exemplo Apresentado**

Etapa 1: A DMUmpss é a DMU5. Será analisado o efeito da escala da variável input, ou seja, o efeito sobre a eficiência de se acrescer o decrescer a quantidade de input. Ver Quadro 2.

Etapa 2: As DMUs de 1,E1,2,3,E2 e 4 compõem o bloco das DMUs com retornos crescentes de escala. As DMUs 6,E3,7,8 e 9 compõem o bloco das DMUs com retornos decrescentes de escala (Quadro 2).

**Quadro 2: Aplicação do Algoritmo segundo exemplo B**

DMUs	Input	Resultados do CCR	Etapa 2	Etapa 3
<b>1</b>	0,5	0,321429	Retornos crescentes de escala	$\Delta_{-6}^{ef} < 0$
<b>E1</b>	1	0,225000		$\Delta_{-5}^{ef} > 0$
<b>2</b>	1,5	0,642857		$\Delta_{-4}^{ef} < 0$
<b>3</b>	2,5	0,771429		$\Delta_{-3}^{ef} < 0$
<b>E2</b>	3	0,750000		$\Delta_{-2}^{ef} > 0$
<b>4</b>	3,5	0,826531		$\Delta_{-1}^{ef} < 0$
<b>5</b>	<b>4,5</b>	1,000000	Retorno Constante de escala	$Ef_0$
<b>6</b>	6	0,964286	Retornos decrescentes de escala	$\Delta_{+1}^{ef} < 0$
<b>E3</b>	7	0,872449		$\Delta_{+2}^{ef} > 0$
<b>7</b>	7,5	0,900000		$\Delta_{+3}^{ef} < 0$
<b>8</b>	8	0,883929		$\Delta_{+4}^{ef} < 0$
<b>9</b>	8,5	0,850840		$\Delta_{+5}^{ef} < 0$

Etapa 3: No Modelo proposto as DMUs: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 são eficientes e asDMUs E1, E2 e E3 são ineficientes (Quadro 2).

**6. Cálculo da eficiência segundo projeções na fronteira**

Conforme definido na seção anterior, as DMUs eficientes apresentam: **EFreal** =1.

As DMUs ineficientes têm suas “ineficiências” calculadas por meio de projeções na fronteira conforme modelagem do CCR e do BCC. Contudo, diferentemente do modelo BCC, a orientação da projeção deve ter orientação (input ou output) específica ao bloco de retorno de escala que ela

pertence. Se a DMU observada estiver no bloco das DMUs de retorno crescente ela deve ser orientada output, pois assim ela maximizaria sua produção. Da mesma forma, se a DMU observada estiver no bloco das DMUs de retorno decrescente ela deve ser orientada input, pois reduzindo os recursos ela também maximizaria sua produção. Tal regra impossibilita de uma  $EF_{real}$  calculada com diferentes projeções (input ou output) apresentem diferentes retornos de escala.

**Etapa 4: CÁLCULO DA EFICIÊNCIA DA DMU.**

A Eficiência das DMUs,  $EF_{real}$ , assim como no modelo CCR e BCC, será calculada pelo ratio entre a projeção da DMU na fronteira eficiente e seu valor (dependendo da variação input ou output). Chamaremos de EF, o calculo da eficiência conforme proposto no algoritmo.

$$EF_{real\ OUT} = \frac{INPUT\ PROJEÇÃO\ DMU_{inef}}{INPUT\ DMU_{inef}}$$

$$EF_{real\ IN} = \frac{OUTPUT\ PROJEÇÃO\ DMU_{inef}}{OUTPUT\ DMU_{inef}}$$

Portanto, as DMUs eficientes terão  $EF_{real}=1$ .

O Quadro 3 apresenta os resultados das DMUs analisadas no exemplo B. O Quadro 3 apresenta os resultados das DMUs analisadas no exemplo.

**Quadro 3: Resultados**

DMU	INPUT	OUTPUT	EF CCR	EF (output)	BCC (output)	EF (input)	BCC (input)
1	0,5	0,5	0,321429	1	1,000000		
x	1	0,7	0,225	0,4	0,320000		
2	1,5	3	0,642857	1	0,774194		
3	2,5	6	0,771429	1	0,827586		
y	3	7	0,75	0,933333	0,783217		
4	3,5	9	0,826531	1	0,847059		
5	4,5	14	1	1	1,000000	1	1,00000
6	6	18	0,964286			1	1,00000
z	7	19	0,872449			0,928571	0,928571
7	7,5	21	0,9			1	1,00000
8	8	22	0,883929			1	1,00000
9	8,5	22,5	0,85084			1	1,00000

Equação da fronteira em que a DMU E3 será projetada dar-se-á por:  $y = 2x + 6$ .

Com orientação input, o valor de y se mantém fixo (igual a 19), portanto, o ponto da projeção eficiente na fronteira eficiente será (6,5, 19).

Sabendo que os insumos utilizados pela DMU E3 foi de 7, mas que eficientemente, a DMU utilizaria 6,5, chega-se ao seguinte resultado:

$$EF_{real\ da\ DUM\ E3} = \frac{6,5}{7} = 0,928571429$$

O calculo das EFs das DMUx e DMUy, que terão apenas orientação output, já que se encontram entre DMUs em retorno *crescente de escala* segue exemplificado:

**EFreal** da DUM E1: Equação da fronteira em que a DMUz será projetada dar-se-á por:  $y = 2.5x - 0.75$ .

Com orientação output, o valor de x se mantém fixo (igual a 1), portanto, o ponto da projeção eficiente na fronteira eficiente será (1, 1.75).

Sabendo que a produção da DMU E1 foi de 0.7, mas que eficientemente, a DMU produziria 1.75, chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{EFreal da DUM E1 = 0.7/1.75 = 0,4}$$

EF da DMU E2: Equação da fronteira em que a DMUz será projetada dar-se-á por:  $y = 3x - 1.5$ .

Com orientação output, o valor de y se mantém fixo (igual a 3), portanto, o ponto da projeção eficiente na fronteira eficiente será (3, 7.5).

Sabendo que a produção da DMUx foi de 7, mas que eficientemente, a DMU produziria 7.5, chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{EFreal da DUM E2 = 7/7.5 = 0,9333333}$$

É importante destacar que, as eficiências calculadas pelo método são idênticas às calculadas pelo BCC, no caso daquelas DMUs que apresentam retorno decrescente de escala. Tal resultado comprova que o BCC é um modelo válido para retornos decrescentes de escala, visto que, o valor da sua eficiência, no BLOCO\_d é igual à EFreal; contudo no BLOCO\_c seus resultados são diferentes. Como exemplo, demonstra-se a seguir, os cálculos da **EFz** que terá apenas orientação input, já que a DUM z se encontra entre as DMUs com retornos decrescentes de escala.

## 7. Considerações finais

O presente estudo apresentou indicações que o modelo BCC, pelo formato da sua fronteira, convexa, não apresenta retornos crescentes de escala, conforme defendido pelos seus autores. Portanto as DMUs que pertencem à sua fronteira eficiente não ganham produtividade ao se aumentar a escala de produção.

O modelo apresentado no estudo se mostra mais efetivo em analisar os retornos variáveis de escala, já que em sua fronteira eficiente podem ser vislumbrados retornos constantes, crescentes e decrescentes de escala.

## 8. Referências bibliográficas

- ALI, J.; SURENDRA P.; SINGHB, S.P.; EKANEMC, E. Efficiency and productivity changes in the indian food processing industry: Determinants and policy implications. *International Food and Agribusiness Management Review*, vol. 12, n. 1, pp. 43-66, 2009.
- APPA, G., N. Argyris, and H. P. Williams. A methodology for cross-evaluation in DEA. In Working Paper: LSEOR 06.81: *London School of Economics and Political Science*, 2006.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, vol. 30(9), p. 1078-1092, 1984.
- BANKER, R.; THRALL, R. Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis. *European Journal Of Operational Research*, vol. 62, p. 74-84, 1990.
- CHANG, K.P.; GUH, Y.Y. Linear Production Functions and the Data Envelopment Analysis. *European Journal Of Operational Research*, vol. 52, p. 215-223, 1991.
- CHARNES, A.; COOPER, W .W. Preface to Topics in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, vol. 2, p. 59-94, 1985.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal Of Operational Research*, vol. 2(6), p. 429-444, 1978.
- DULÁ, J. H. Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, vol.22, No.2, pp.165-182, 2002.
- FARRELL, M.J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistic Society*, série A, parte 3, p. 253-290, 1957.
- GOMES JUNIOR, S. F. Índice de Eficiência Não Radial em DEA Baseado em Propriedades Vetoriais. 2010. 118 páginas. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Escola de Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2010.
- GOMES JUNIOR, S. F.; MELLO, J. C. Soares de; e MEZA, L. Angulo (2013). Dea nonradial efficiency based on vector properties. *International Transactions in Operational Research*, 20 (3), 341-364.
- FORSUND, F. On the Calculation of the Scale Elasticity in DEA Models. *Journal of Operational Research Society*, vol. 55 (10), pag. 1023-1038, 2004.
- FORSUND, F.; HJALMARSSON, L. Calculation Scale Elasticity in DEA Models. *Journal of Productivity Analysis*, vol. 7, pag. 283-302, 1996.
- GOLONY, B.; Yu, G. Estimating Returns to Scale in DEA. *European Journal Of Operational Research*, vol. 103, p. 28-37, 1997.

JUTSUZUMI, T.; NAKAMURA, A. Measuring DEA efficiency in cable television network facilities: what are appropriate criteria for determining the amounts of governmental subsidies? *Socio-Economic Planning Sciences*, vol.37 (1), pag. 29-43, 2003.

KRIVONNOZHKO, V.; FORSUND, F. Returns to Scale Properties in DEA Models: The Fundamental Role of Interior Points. Memorandum number 15 do Departamento de Economia da Universidade de Oslo, 2009.

NACIF, F; PIMENTA, H.; MELLO, J.C. Soares de. Suavização da Fronteira DEA: O Caso BCC N-Dimensional com multiplicidade simultânea dos inputs e dos outputs. Anais do XXXVII SBPO, Gramado, 2005.

RUBEM, A. P; MELLO, J.C. Soares de; MEZA, L. Angulo; GOMEZ JÚNIOR, S. Análise da eficiência de companhias aéreas com um modelo DEA e clusters dinâmicos, *anais do Centro de Análise de Sistemas Navais*, 2013.

SEIFORD, L.M.; ZHU, J. An investigation of returns of scale under Data Envelopment Analysis. *Omega* 27, 1-11, 1999.

MELLO, J.C. Soares de. Suavização da Fronteira DEA com uso de métodos Variacionais. *Engenharia de Produção*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

MELLO, J.C. Soares de; MEZA, L. Angulo; GOMES, E. G. e BIONDI NETO, L. Curso de Análise Envoltória de Dados. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Gramado, 2005.

MELLO, J.C. Soares de; MEZA, L. Angulo; GOMES, E.; BIONDI NETO, L. Alguns Paradoxos em modelos DEA-BCC: Eficiências Negativas e Inexistência de Retornos de Escala. *XXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Rio de Janeiro, 2008.

MELLO, J. C. Soares de; MEZA, L. Angulo; SILVEIRA, J. Q.; GOMES, E. G. About negative efficiencies in cross evaluation bcc input oriented models. *European Journal of Operational Research*, 229 (3), 732-737, 2013.

TALLURI, S. Data Envelopment Analysis: Models and Extensions. *Production/ Operations Management*, pp. 8-11, 2000.

TONE, K. A Simple Characterization of Returns to Scale in DEA. *Journal of Operational Research*, vol. 39, n. 4, 1996.

VARIAN, H. Microeconomic Analysis. London: W.W. Norton & Company, 1992.

VARIAN, H. Microeconomia: Princípios Básicos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

WU, J.; LIANG, L.; CHEN, Y. DEA game cross-efficiency approach to Olympic Rankings. *Omega*, vol.37, n. 4, pp. 909–918, 2009.

ZHU, J.; SHEN, Z.H. A discussion of testing DMU's returns of scale. *European Journal of Operational Research*, vol. 81, 590-596, 1995.