

## Fitzhugh-Nagumo nöron modelinin rotasyon dönüşüm prosedürü ve donanım doğrulaması

### The rotation-transition procedure of the Fitzhugh-Nagumo neuron model and its hardware verification

Nimet KORKMAZ<sup>1\*</sup> 

<sup>1</sup>Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık ve Tasarım Fakültesi, Kayseri Üniversitesi, Kayseri, Türkiye.  
nimetkorkmaz@kayseri.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 13.01.2023

Düzeltilme Tarihi/Revision: 09.06.2023

doi: 10.5505/pajes.2023.82809

Kabul Tarihi/Accepted: 12.06.2023

Araştırma Makalesi/Research Article

#### Öz

Biyolojik anlamlılığa sahip olan biyolojik nöron modelleri, canlı vücudundaki nöronların karakteristiklerini tanımlamaktadır. Bu modeller, osilatörlere benzer şekilde tanımlanabilmektedir. Osilatör yapılarının karakteristiklerini tanımlayan kararlılık kontrolü ve senkronizasyon kontrolü gibi teoremlerin pek çoğu, biyolojik nöron modellerinin incelenmesi için de kullanılabilir. Son zamanlarda, doğrusal olmayan dinamik sistem uygulamalarında rotasyon dönüşüm işlemi de dikkat çeken bir konu haline gelmiştir. Rotasyon dönüşüm işlemi sonrasında; doğrusal olmayan bir sistemin dinamik çakeri, rotasyon açısının değişimi ile arzu edilen herhangi bir doğrultuya yönlendirilebilmektedir. Literatürde doğrusal olmayan dinamik sistemlerin en bilinen örneklerinden biri kaotik osilatör yapılarıdır. Kaotik osilatörlerin dinamik çakerinin rotasyon dönüşümü vasıtası ile kontrolü üzerine yapılan pek çok çalışma literatürde mevcuttur. Bununla birlikte; gerçek biyolojik sistemlerin dinamik karakteristiklerinde rotasyon değişimi gözlemlenmesine rağmen, biyolojik nöron modellerinin dinamik çakerinin rotasyon kontrolünü ele alan bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu sebeple bu çalışmada, Fitzhugh-Nagumo (FHN) modelinin rotasyon dönüşüm işlemi ele alınmıştır. Rotasyonlu FHN nöron modelinin karakteristik çıktıları elde etmek için denge noktaları hesaplanmıştır. Rotasyon dönüşüm işlemi sonrasında, FHN nöron modelinin dinamik çakerinin rotasyonundaki değişim nümerik simülasyon sonuçlarıyla gözlemlenmiştir. Son olarak hem rotasyon dönüşüm işleminin işlevselliğini desteklemek hem de biyolojiden esinlenerek geliştirilen sistemler için ihtiyaç duyulan gerçek zamanlı işaretleri elde etmek amacıyla; rotasyonlu FHN nöronu programlanabilir ve yeniden yapılandırılabilir bir eleman olan 'Alan Programlanabilir Kapı Dizisi-(FPGA)' ile de gerçekleştirilmiştir. Böylece, önerilen rotasyon dönüşüm işlemi sayesinde nöral sistemlerde herhangi bir kuplajlama tanımlamasına ihtiyaç duyulmadan sistem dinamiklerinin faz ayarlamasına müdahale edilebildiği gösterilmiştir. Bu görüşten yola çıkarak; rotasyonlu FHN nöron modeli; matematiksel olarak modellenmiş, nümerik simülasyonlarla desteklenmiş ve donanım gerçekleştirim çalışması ile de doğrulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Fitzhugh-Nagumo nöron modeli, Rotasyon dönüşüm yöntemi, Euler rotasyon teoremi, Alan programlanabilir kapı dizisi (FPGA).

#### Abstract

The biological neuron models, which have the biologically significant, describe the characteristics of neurons in the living body. These models can be defined similar to oscillators. A great of the theorems that describe the characteristics of oscillator structures, such as stability control and synchronization control, can also be used to examine the biological neuron models. Recently, the rotation-transition process has become a remarkable issue in the nonlinear dynamical system applications. After the rotation-transition process; the dynamical attractor of a nonlinear system can be directed to any desired direction by changing the rotation angle. One of the most known examples of the nonlinear dynamical systems is the chaotic oscillator structures. There are many studies on the dynamical attractor control of the chaotic oscillators by means of rotation-transition in the literature. However; although the rotation changes are observed in the dynamical characteristics of the real biological systems, there isn't any study dealing with the rotation controls of the dynamical attractors of biological neuron models. Therefore, the rotation-transition procedure of the Fitzhugh-Nagumo (FHN) model has been handled in this study. The equilibrium points of the rotated FHN neuron model are calculated for getting its characteristic outputs. After the rotation-transition process, the changes on the rotation of the dynamic attractors of the FHN neuron have been observed by numerical simulation results. Finally, the rotated-controlled FHN neuron has also been realized with the 'Field Programmable Gate Array-(FPGA)', which is a programmable and reconfigurable device, in order to both support the functionality of the rotation transformation process and to obtain the real-time signals requiring for the bio-inspired systems. Thus, it has been shown that thanks to the proposed rotation-transition process, the phase adjustment of the system dynamics in neural systems can be intervened without requiring any coupling definition. Based on this view; the mathematical descriptions of the rotated-FHN neuron model has been pointed out, this model is promoted by the numerical simulations and confirmed by the hardware implementation studies.

**Keywords:** Fitzhugh-Nagumo neuron model, Rotation-Transition method, Euler rotation theorem, Field programmable gate array (FPGA).

## 1 Giriş

Nöronlar, hücre zarı yüzeyinde oluşan iyonik akışlar sayesinde kendilerine özgü elektriksel potansiyeller üretmektedir. Üretilen bu biyolojik işaretler sinaps yapıları aracılığı ile bir nörondan diğerine aktarılmaktadır. Üretilen biyolojik işaretin

genliği, frekansı, fazı, tetiklenme süresi, iletim hızı ve yayılım şekli gibi karakteristikleri özelleşerek canlının vücudunda bir haberleşme ağı oluşturmaktadır. Bu haberleşme ağının spesifik özelliklerinin anlaşılabilmesi için nöron hücrelerinin ağdaki işlevlerinin incelenmesi oldukça önemlidir. Bu sebeple, literatürde nöronların modellenmesi, simülasyonu ve

\*Yazışılan yazar/Corresponding author

gerçekleştirmesi üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Nöronun hücre zarı yüzeyindeki iyonik akışı modelleyen pek çok nöron modeli vardır [1]-[6]. Bu modeller nöronun hücre zarı yüzeyinde üretilen aksiyon potansiyeli işaretini başarılı bir şekilde tanımlarlar. Dahası, canlı vücudunda üretilen aksiyon potansiyeli işareti, biyolojik nöron modelleri kullanılarak osilatör yapılarına benzer şekilde elektronik donanımlarla gerçekleştirilebilmektedir [7]. Böylece taklit edilen aksiyon potansiyeli işareti, canlı vücudundan esinlenerek geliştirilen sistemlerde kullanılabilir ya da nöron yapıları için önerilen hipotezlerin, aksiyon potansiyeli karakteristiği üzerindeki etkilerinin canlı vücudu dışında incelenebilmesine imkân sağlamaktadır.

Osilatör yapıları için önerilen kararlılık, kontrol ve senkronizasyon teoremleri gibi birçok algoritma, biyolojik sistemlerin karakteristiklerini incelemek için biyolojik nöron modellerine de uygulanabilmektedir [8]-[10]. Örneğin, Pacora ve Carroll'un osilatör yapılarının senkronizasyonu için önerdikleri senkronizasyon teoremi, pek çok nöral senkronizasyon çalışmasına uyarlanmıştır [11]. Canlı vücudundaki merkezi desen üretici yapılarını osilatörlerle ilişkilendirilerek modelleyen çalışmalarda bu uyarlamalar için bir diğer örnektir [12]-[14]. Son zamanlarda lineer olmayan sistemleri ele alan çalışmaların bir kısmında "rotasyon" kavramı dikkat çekmektedir [15]. Rotasyonlu çeker yapıları; akışkanlar dinamiğinde, yarıiletken lazerlerde, biyolojik sistemlerde, elektrokimyasal hücrelerde, fiziksel sistemlerde ve gecikmeli kuplajlanan nöron yapılarında gözlemlenmiştir [16]-[18]. Rotasyon dönüşümlü sistemlerde bir takım kaotik modelleme ve simülasyon çalışmaları Sakidas ve Sakidas tarafından önerilmiştir [19]. Önerilen yöntem hem sürekli hem de ayrık eşitlik formları için rotasyonlu dönüşüm yöntemlerinin temellerini içermektedir. Referans [20]'de üç bileşenli bir fraktal algoritma üç boyutlu uzayda fraktal dönüşüm elde edilebilmesi için önerilmiştir. İlgili algoritma Lorenz sistemi, rotasyonlu Lorenz sistemi ve birleşik kaotik sistemlere uygulanmıştır. Referans [21]'de, bir memristif kaotik sistemdeki çekerlerin rotasyonu, durum değişkenlerinin başlangıç koşullarına bağlı olarak belirlenmiştir. Lineer olmayan sistemlerde faz çevirme işlemi ise Chua osilatörü, Rössler osilatörü, Van der Pol osilatörü, bir lazer sistemi, Fitzhugh Nagumo nöron modeli yapılarını kapsayan çalışmaları ele alınmıştır [22]. Bu çalışmaların yanı sıra, rotasyonlu osilatörlerin temel karakteristikleri Rössler, Lorenz, Sprott, Pikovsky-Robinovich modelleri için birkaç çalışmada incelenmiştir [23]-[24]. Yukarıda bahsedilen çalışmaların pek çoğunda nümerik simülasyon çalışmalarına ilaveten rotasyonlu sistemlerin donanım doğrulama çalışmaları da yapılmıştır. Donanım doğrulama çalışmalarında çoğunlukla ayrık elemanlarla gerçekleştirim yöntemi tercih edilmiştir [21-23]. Ayrık elemanlarla gerçekleştirim yöntemleri, eleman temini ve kısa tasarım süresi açısından avantaj sağlar. Bununla birlikte, son zamanlarda esnek tasarıma imkân sağlayan, hızlı prototiplendirme imkânı sunan ve düşük güç tüketimi sergileyen; programlanabilir ve yeniden yapılandırılabilir elemanlar literatürde oldukça dikkat çekmektedir. Bu elemanlardan biri de FPGA elemanıdır. FPGA elemanları esnek tasarım sürecine ve hızlı bir paralel çalışma prosedürüne sahiptir ve lineer olmayan dinamik sistemlerin prototiplendirilmesi için de pratik bir tasarım platformudur. Bu gömülü elemanlar rotasyon geçişli lineer olmayan sistemlerin gerçekleştiriminde de kullanılabilir. Öyle ki, literatürde rotasyonlu kaotik Lorenz sistemi Referans [25] ve Referans

[26]'da FPGA elemanı kullanılarak başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Çekerlerin rotasyonu kavramını ele alan çalışmaların pek çoğunda konu edinilen doğrusal olmayan sistemler kaotik osilatör yapılarıdır. Bununla birlikte biyolojik sistemlerin dinamiklerinde de rotasyon kavramı ile karşılaşmaktadır [27]-[29]. Osilatör yapılarına benzer teoremlerle incelenen ve biyolojik anlamlılığı ile pek çok çalışmaya esin kaynağı olan Fitzhugh Nagumo nöron modelinin rotasyonu ile ilgili bir çalışma bildiğimiz kadarıyla literatürde mevcut değildir. Bu eksikliği telafi etmek ve biyolojik sistem modellemelerine esin kaynağı olmak amacıyla, bu çalışmada Fitzhugh Nagumo (FHN) nöron modelinin rotasyon dönüşüm işlemi yapılmıştır. Rotasyonlu FHN nöron modelinin sistem karakteristikleri rotasyon açısının değişimi dikkate alınarak denge noktalarının hesaplanması ile analiz edilmiştir. FHN nöron modeli; nöronların karakteristiklerini detaylı olarak tanımlayabilen, bununla birlikte donanım gerçekleştirimi oldukça zor olan Hodgkin-Huxley nöron modelinin sadeleştirilmesi ile elde edilen bir biyolojik nöron modelidir. Bu modelin biyolojik sistemlerden esinlenerek geliştirilen yapılarda kullanımı için farklı donanımlarla gerçekleştirildiği pek çok çalışma literatürde mevcuttur [30],[31].

Bu çalışmada FHN nöron modelinin rotasyon dönüşümü işlemlerinin detaylarının ele alınmasının ardından, rotasyonlu FHN nöron modeli FPGA elemanı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Nöral sistemlerde nöronların/nöron modellerinin kuplajlanması sonucunda, nöron dinamikleri arasında faz farklılıkları meydana gelmektedir. Kuplajlanan nöronlar arasındaki frekans, faz ya da genlik değerlerinin eşzamanlılığı üzerine birçok çalışma yapılmaktadır. Nöral senkronizasyon çalışmalarında, nöron dinamikleri arasındaki faz farklılıklarının kontrol edilebilmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmada, önerilen rotasyon dönüşümü ile nöral sistemde herhangi bir kuplajlama tanımlanmasına ihtiyaç duyulmadan sistem dinamiklerinin faz ayarlamasına müdahale edilebildiği görüldü; matematiksel olarak modellenmiş, nümerik simülasyonlarla desteklenmiş ve donanım gerçekleştirim çalışması ile de doğrulanmıştır.

Bu kapsamda öncelikle, Bölüm 2'de FHN nöron modelinin Euler'in rotasyon dönüşümü yöntemi kullanılarak modelin rotasyon dönüşümü için matematiksel modelleme sürecinin detayları ele alınacaktır. Ardından rotasyonlu FHN nöron modelinin denge noktaları, 0-360° arasında 30°'lik aralıklarla hesaplanacaktır. Bu aralıkta nümerik simülasyonlarla analiz edilen sistemin zaman domeni ve faz çekerleri gösterimleri sunulacaktır. Bölüm 3'te 30°, 120°, 210° ve 300° için döndürülen rotasyonlu FHN nöron modelinin FPGA gerçekleştirim detayları ve sonuçları sunulacaktır. Elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ise son bölümde sunulacaktır.

## 2 Rotasyonlu FHN nöron modeli

Hodgkin-Huxley nöron modeli nöron dinamiklerini tanımlamakta en başarılı model olmakla birlikte, tanımlamalarındaki komplekslik nedeniyle bazı uygulamalarda modelin sadeleştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur [1]. Hodgkin-Huxley nöron modelindeki değişken sayısını azaltmak için Fitzhugh tarafından bazı çalışmalar yapılmıştır. Buna göre; " $m$ ", " $n$ " ve " $h$ " ile ifade edilen voltaj kapı değişkenlerinin birbirleri ile ilişkili olduğu belirlenmiştir. Bu değişkenlerin voltaj kapılarının açık olma olasılıklarını temsil ettiği ve " $n+h$ " toplamının yaklaşık olarak 0.8'e eşit olduğu belirlenmiştir. Bu kabulün ardından, hızlı-yavaş faz eksen modeli olarak

isimlendirilen ve iki değişkenle tanımlanabilecek kadar indirgenen sistem Denklem (1)'de verilmektedir:

$$\begin{aligned} C_M \frac{dV}{dt} &= -\bar{g}_K n^4 (V - E_K) + \\ \bar{g}_{Na} m^3 h (0.8 - n) (V - E_{Na}) + \bar{g}_L (V - E_L) + I & \quad (1) \\ n_w (V) \frac{dn}{dt} &= n_\infty (V) - n \end{aligned}$$

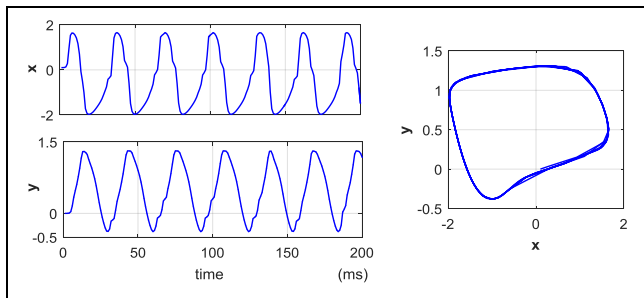
Voltaj kapılı iyonların tanımlanmasında yapılan sadeleştirilmenin ardından, hücre zarı potansiyelinin üçüncü dereceden bir fonksiyon ve "n" değişkeninin de doğrusal değiştiği kabulü yapılmıştır. Bu kabullerle birlikte hücre zarı potansiyelinin Denklem (2)'deki gibi bir modele indirgenmesi önerilmiştir [32].

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x - \alpha)(1 - x) - y + I \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(x - \gamma y) \end{aligned} \quad (2)$$

Bu kabuller sonrasında, Van Der Pol osilatör modelinde bazı değişimler yapılarak, Denklem (3)'te verilen FitzHugh-Nagumo Nöron modeli tanımlanmıştır [33].

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c(x - y + I - y^3/3) \\ \frac{dy}{dt} &= (x - by + a)/c \end{aligned} \quad (3)$$

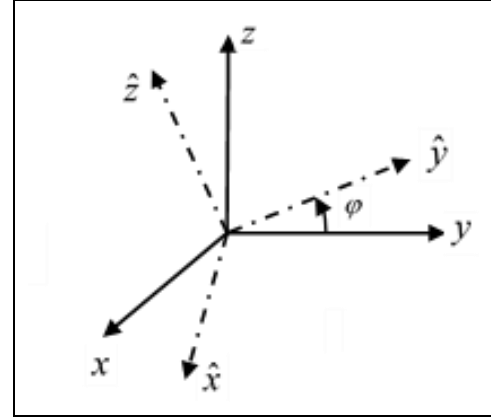
Burada hücre zarı potansiyeli "x" ile tanımlanırken, nöronun dinlenme evresine dönmesini sağlayan toparlanma parametresi "y" değişkeni ile tanımlanmıştır. "I" hücre zarına uygulanan dış kaynaklı bir akımı temsil etmektedir ve değeri  $I=0.34$  olarak seçilmiştir. "a", "b" ve "c" parametreleri ise sabit değerlere ayarlanmaktadır. Burada yapılan nümerik simülasyonda  $a=0.7$ ,  $b=0.8$ ,  $c=3$  değerlerinde seçilmiştir [16]. FHN nöron modelinin ilgili parametre değerlerinde yapılan nümerik simülasyonlara ait sonuçlar Şekil 1'de verilmektedir. Şekil 1a'da modelin durum değişkenlerine ait sonuçlar görülürken; Şekil 1b'de x-y değişkenine ait faz portresi gösterimi sunulmaktadır.



Şekil 1. FHN nöron modelinin nümerik simülasyon sonuçları. (a): Zaman gösterimi. (b): x-y faz portresi gösterimi.

Figure 1. The numerical simulation results of the FHN neuron model. (a): Time illustration. (b): x-y phase portrait illustration.

Denklem (3)'teki diferansiyel denklemler Kartezyen Koordinat Sistemi'nde  $(x, y, z)$  ile tanımlanmaktadır. Rotasyon dönüşüm işleminden önce, kartezyen koordinat sisteminde  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  ile tanımlanan ikinci bir küme tanımlanabilir. Bu tanımlamaya göre birinci ve ikinci kümelerin orijinde çakışık olduğu, fakat doğrultularının farklı olduğu kabulü yapılabilir. İkinci küme, birinci küme ile orijinde çakışık olarak, Şekil 2'deki gibi döndürülmüştür.



Şekil 2. Kartezyen koordinat sisteminde ortogonal tanımlı birinci ve ikinci küme.

Figure 2. The orthogonal defined first and second sets in the Cartesian coordinate system.

Ortogonalite koşulunun sağlanması için eksenlerde bir döndürme işlemi yapılsa da vektörlerin uzunlukları sabit kalmalıdır. Buna göre iki boyutta rotasyon işlemi sonrası değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir [23],[25]:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x \cos\varphi - y \sin\varphi \\ \hat{y} &= x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Rotasyon işlemi doğrusal bir karakteristiğe sahiptir. Bu nedenle birinci ve ikinci küme eksenleri arasındaki dönüşüm bir matris eşitliği ile tanımlanabilir  $(\hat{x} = R x)$ . Bu eşitlikte "R" matrisi rotasyon matrisi olarak tanımlanır ve Denklem (5)'teki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}^R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Buna göre Denklem (3)'teki FHN nöron modeli tanımlaması Denklem (5)'te yerine yazılarak çarpım işlemi yapırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos\varphi \left[ \frac{dx}{dt} \right] - \sin\varphi \left[ \frac{dy}{dt} \right] \\ \hat{y} &= \sin\varphi \left[ \frac{dx}{dt} \right] + \cos\varphi \left[ \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Denklem (6)'daki tanımlamalarda durum değişkenleri ikinci kümenin elemanları ile temsil edilirken, sağ taraftaki eşitliklerde birinci kümenin elemanları kullanılmaktadır. Rotasyon matrisinin tersi alınarak  $(x = R^{-1} \hat{x})$  yapılan düzenleme ile;

$$\begin{aligned} T_1 &= x = \hat{x} \cos\varphi + \hat{y} \sin\varphi \\ T_2 &= y = -\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde bir tanımlama elde edilebilir. Buna göre Denklem (5) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenmiştir:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos\varphi \left[ \frac{dT_1}{dt} \right] - \sin\varphi \left[ \frac{dT_2}{dt} \right] \\ \hat{y} &= \sin\varphi \left[ \frac{dT_1}{dt} \right] + \cos\varphi \left[ \frac{dT_2}{dt} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

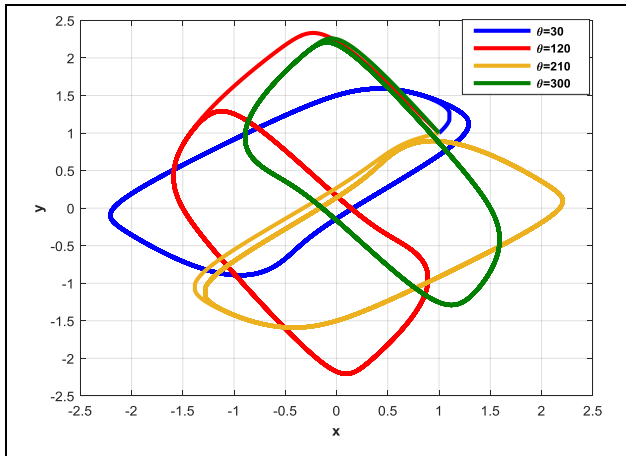
Denklem (8) ile tanımlanan sistemin Jacobian matrisi ve denge noktaları, Denklem (3) ile tanımlanan orijinal modelinkinden farklıdır. Buna göre; 0-360° derece arasında 30° aralıklarla hesaplanan denge noktalarının değerleri Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. Rotasyonlu FHN nöron modelinin farklı açı değerleri için denge noktaları.

Table 1. The equilibrium points of the rotated-FHN neuron model for different angle values.

Rotasyonlu FHN nöron modelinin denge noktaları		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0°	-0.1333+0.9911i	-0.1333-0.9911i
30°	-0.8333	-2.0314
60°	-0.8333	-2.0314
90°	-0.1333+0.9911i	-0.1333-0.9911i
120°	0.1402	2.1912
150°	0.1402	2.1912
180°	-0.1333+0.9911i	-0.1333-0.9911i
210°	-0.8333	-2.0314
240°	-0.8333	-2.0314
270°	-0.1333+0.9911i	-0.1333-0.9911i
300°	0.1402	2.1912
330°	0.1402	2.1912
360°	-0.1333 + 0.9911i	-0.1333-0.9911i

Tablo 1’de elde edilen sonuçlar incelendiğinde sonuçların  $(x = y)$  ve  $(x = -y)$  doğrularına göre simetrik olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin  $\varphi=30^\circ$  ile  $(x = y)$  doğrusuna göre simetriği  $\varphi=60^\circ$  açılarında ve bu açı değerlerinin  $(x = -y)$  doğrusuna göre simetriği olan  $\varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=240^\circ$ ’lerde hesaplanan denge noktalarının değerleri birbirine eşittir. Benzer şekilde  $\varphi=120^\circ$  ile  $(x = y)$  doğrusuna göre simetriği  $\varphi=330^\circ$  açılarında ve bu açı değerlerinin  $(x = -y)$  doğrusuna göre simetriği olan  $\varphi=150^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  değerlerinde hesaplanan denge noktaları da birbirine eşittir. Denge noktalarının hesaplanmasının ardından, rotasyonlu görüntülerinin  $(\hat{x}, \hat{y})$  ekseninde  $\varphi=30^\circ, \varphi=120^\circ, \varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  değerleri için birbiri üzerine çizdirilerek elde edilen nümerik simülasyon sonucu Şekil 3’te verilmektedir. Şekil 3’te FHN nöron modelinin dinamik çekerinin rotasyon değişimi kolaylıkla gözlemlenebilmektedir.

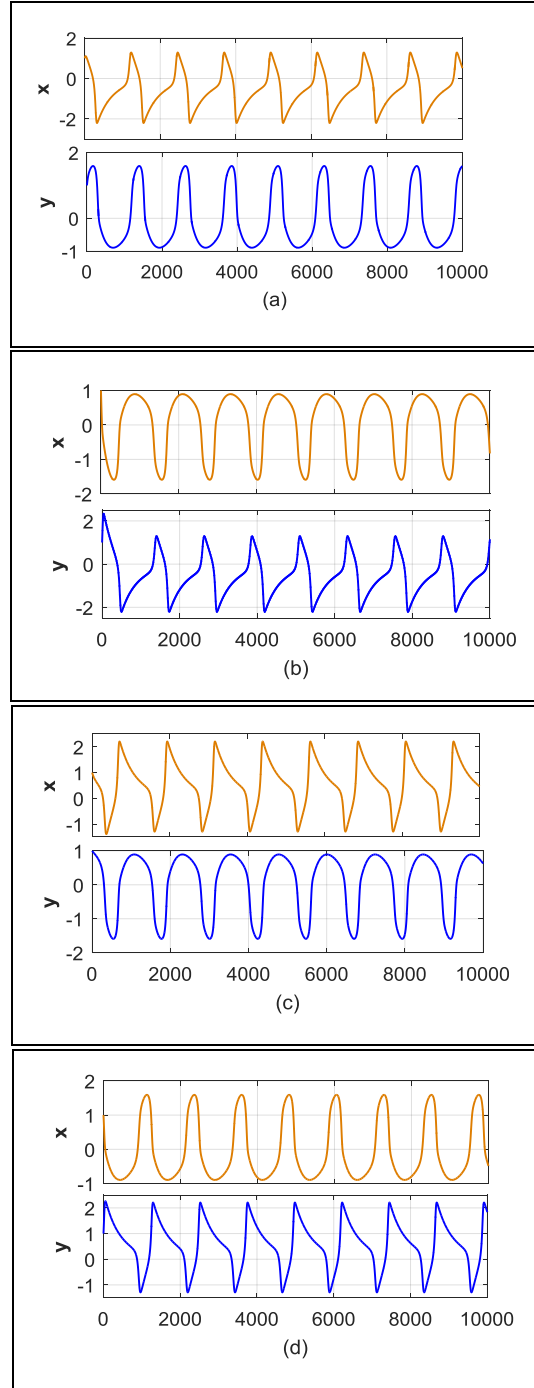


Şekil 3. Rotasyonlu FHN nöron modelinin  $(\hat{x}, \hat{y})$  ekseninde çizdirilen dinamik çeker görüntüleri.

Figure 3. The dynamical attractor images, which are plotted on the  $(\hat{x}, \hat{y})$  axis, of the rotated FHN neuron model.

Bu gösterimin ardından nümerik simülasyon çalışmaları  $\varphi=30^\circ, \varphi=120^\circ, \varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  derece açı değerleri için ayrı ayrı tekrar edilmiştir. Bir sonraki bölümde ele alınacak olan rotasyonlu FHN nöron modelinin FPGA tabanlı gerçekleştirim çalışmalarından elde edilecek sonuçlar da,

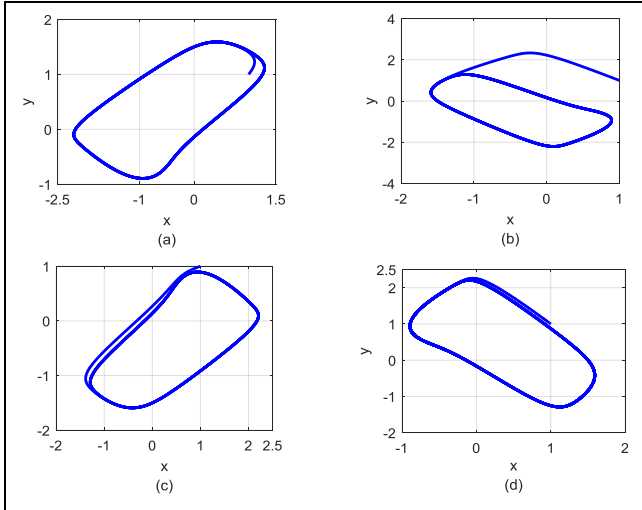
nümerik simülasyonlar sonrasında elde edilen sonuçlarla aynı formatta sunulacaktır. Böylece nümerik simülasyon sonuçları ile donanım gerçekleştirim çalışmalarının sonuçlarının benzerliklerinin daha kolay gözlemlenmesi amaçlanmaktadır.  $\varphi=30^\circ, \varphi=120^\circ, \varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  değerleri için zaman domeni sonuçları bu değerler için sırasıyla Şekil 4(a)-(d)’de verilirken, aynı değerler için dinamik çeker görüntüleri sırasıyla Şekil 5(a)-(d)’de sunulmaktadır.



Şekil 4. Nümerik simülasyon sonuçları. Modelin a)  $\varphi=30^\circ$ , b)  $\varphi=120^\circ$ , c)  $\varphi=210^\circ$  ve d)  $\varphi=300^\circ$  derece için zaman domeni cevapları.

Figure 4. The numerical simulation results. The time domain responses of the model in a)  $\varphi=30^\circ$ , b)  $\varphi=120^\circ$ , c)  $\varphi=210^\circ$  and d)  $\varphi=300^\circ$  degrees.





Şekil 5. Nümerik simülasyon sonuçları. Modelin a)  $\varphi=30^\circ$ , b)  $\varphi=120^\circ$ , c)  $\varphi=210^\circ$  ve d)  $\varphi=300^\circ$  derece için faz portresi gösterimleri.

Figure 5. The numerical simulation results. The phase portrait illustrations of the model in a)  $\varphi=30^\circ$ , b)  $\varphi=120^\circ$ , c)  $\varphi=210^\circ$  and d)  $\varphi=300^\circ$  degrees.

Şekil 3, 4 ve 5'ten de görüldüğü gibi modelin dinamik çekerinde herhangi bir değişim meydana gelmezken, faz uzayındaki çekerin pozisyonunda bir değişim mevcuttur. Böylece, FHN nöron modelinin  $(\hat{x}, \hat{y})$  eksenindeki çekerinin faz geçişleri herhangi bir kuplajlama tanımlamasına ihtiyaç duyulmadan kontrol edilebilmiştir. Burada elde edilen sonuçlarla FHN nöron modelinin rotasyon dönüşüm işlemi matematiksel olarak tanımlanmış ve elde edilen ifadelerin doğruluğu nümerik simülasyon sonuçları ile desteklenmiştir.

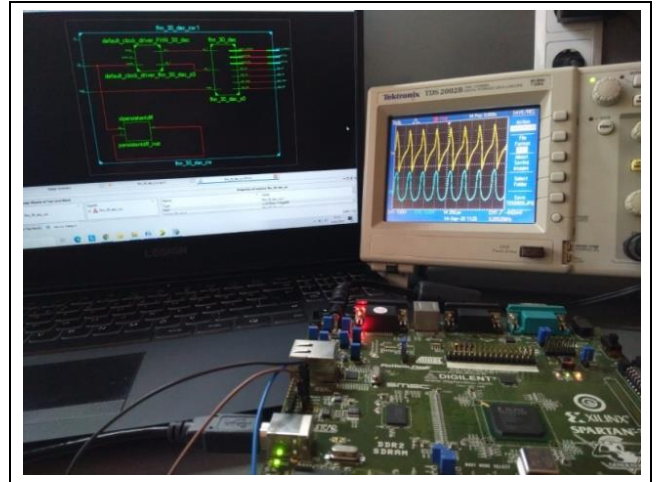
### 3 Rotasyonlu FHN nöron modelinin donanım doğrulaması

Rotasyonlu FHN nöron modelinin modelleme ve simülasyon çalışmalarının ardından, bu modelin donanım doğrulamasına ilişkin detaylar çalışmanın bu kısmında sunulacaktır. Daha önce de bahsedildiği gibi rotasyonlu sistemlerin donanım doğrulaması çalışmalarında malzeme temini ve gerçekleştirim pratikliği açısından ayrı donanımla gerçekleştirim çalışmaları tercih edilmesine rağmen, son zamanlarda gömülü sistemlerle yapılan gerçekleştirim çalışmaları da literatürde mevcuttur. Programlanabilir ve yeniden yapılandırılabilir elemanlar esnek tasarım prosedürleri, hızlı prototiplendirme ve düşük güç tüketimi gibi özelliklerinden dolayı, literatürde oldukça dikkat çekmektedirler. Bu gömülü sistem elemanlarının en çok kullanılanlarından biri de alan programlanabilir kapı elemanları (FPGA)'dır. FPGA elemanları standart işlemcilerin aksine tamamen paralel çalışma prosedürüne göre işletilen tümdevrelerdir. FPGA elemanları doğrusal olmayan dinamik sistemlerin prototiplendirilmesi için de pratik bir tasarım platformudur.

FPGA elemanı üzerinde yapılacak olan tasarımlarda, elemanın dijital doğası sebebiyle sürekli zamanda tanımlı olan sistemlerin ayrıklaştırma yöntemleri kullanılarak ayrık zamanda tanımlı hale dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu sebeple Denklem (8)'de sürekli zamanda tanımlanan rotasyonlu FHN nöron modeli Euler ayrıklaştırma yöntemi kullanılarak Denklem (9)'daki gibi ayrık zamanlı hale dönüştürülmüştür.

$$\begin{aligned}\hat{x}(n+1) &= \{\cos\varphi[T_1(n)] - \sin\varphi[T_2(n)]\}\Delta h + \hat{x}(n) \\ \hat{y}(n+1) &= \{\sin\varphi[T_1(n)] + \cos\varphi[T_2(n)]\}\Delta h + \hat{y}(n)\end{aligned}\quad (9)$$

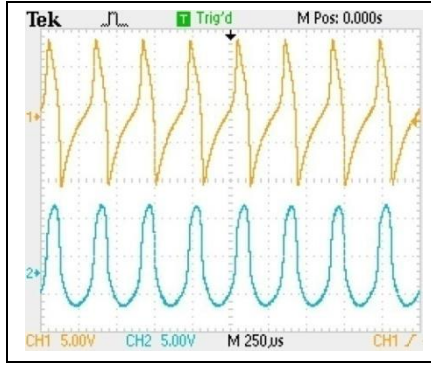
Ayrıklaştırma işleminin ardından rotasyonlu FHN nöron modeli "DSP'ler için Sistem Üretici (System Generator for DSP-XILINX™-SGDSP)" programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu işlemlerde 32-bit sabit noktalı aritmetik kullanılmıştır. SGDSP programı, MATLAB-SIMULINK™'te yapılan benzetimlerden, XILINX™ FPGA platformları için gerekli olan IP core'lar arasında otomatik bir dönüşüm sağlamaktadır. Böylece SIMULINK™'te tasarlanan bir model, derlenerek doğrudan FPGA'lere gömülebilmektedir. SGDSP programı; farklı uygulamalar için (matematiksel işlemler, hafıza elemanları, dijital işaret işleme... vs) önceden tanımlı grafiksel bloklara sahiptir. SGDSP programındaki bu önceden tanımlı bloklar kullanılarak tasarlanan modeller, SIMULINK programı ile oluşturulan benzetim modellerine oldukça benzemektedir. Gerçekleştirimlerde XILINX™ firmasına ait Spartan-3AN bordu kullanılmıştır. Bu bord üzerinde dâhili olarak bir "Dijital-Analog Dönüştürücü" (LTC2624) bulunmaktadır. Kart üzerinde bulunan dâhili DAC entegresi kullanıcı tanımlı bir blok tasarlanarak kontrol edilmiştir. Denklem (9) ile tanımlanan rotasyonlu FHN nöron modelinin SGDSP programı kullanılarak yapılan tasarımında, programda önceden tanımlı olan hazır bloklar kullanılmıştır. Bu blokların çıkışları ile DAC arasında bit uyumluluğu sağlayabilmek için bit ölçekleme işlemi yapılmıştır. Sistemin deney düzeneğine ait bir fotoğraf Şekil 6'da görülmektedir.



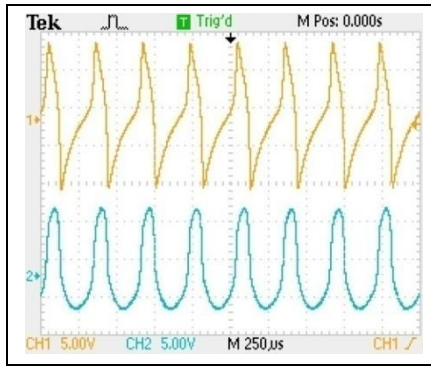
Şekil 6. Rotasyonlu FHN nöron modelinin gerçekleştiriminde kullanılan deney düzeneği.

Figure 6. Experimental setup used for the realization of the rotaed-FHN neuron model.

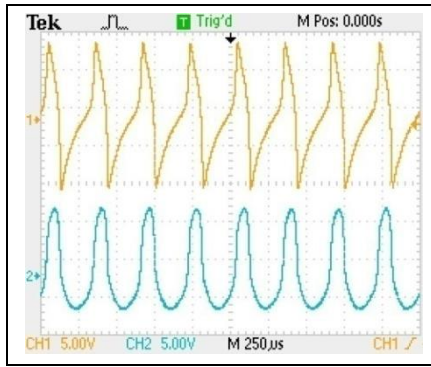
Rotasyonlu FHN nöron modelinin FPGA tabanlı gerçekleştirimine ait deney sonuçları Şekil 7 ve 8'de verilmektedir. FHN nöron modelinin FPGA tabanlı gerçekleştiriminde  $\varphi=30^\circ$ ,  $\varphi=120^\circ$ ,  $\varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  açı değerleri için elde edilen zaman domeni sonuçları sırasıyla Şekil 7(a)-(d)'de verilirken, faz portresi gösterimleri sırasıyla Şekil 8(a)-(d)'de verilmektedir.



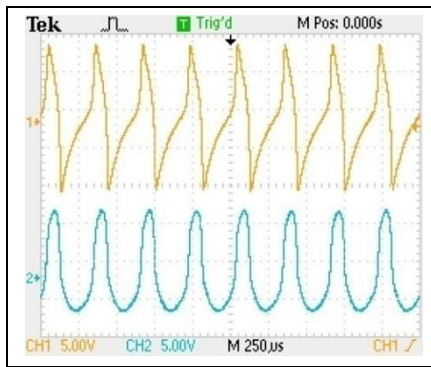
(a)



(b)



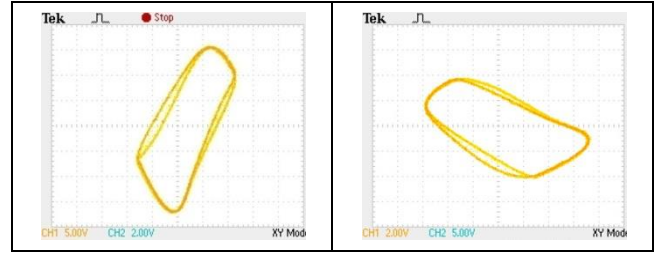
(c)



(d)

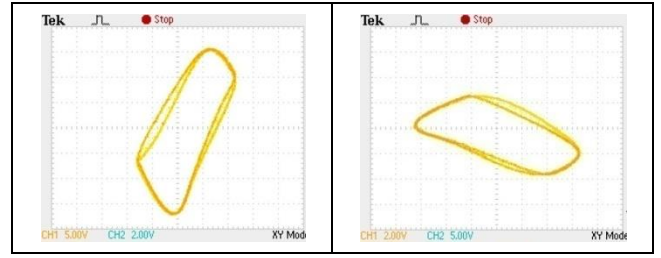
Şekil 7. FPGA tabanlı gerçekleştirme sonuçları. Modelin: (a):  $\varphi=30^\circ$ . (b):  $\varphi=120^\circ$ . (c):  $\varphi=210^\circ$  ve (d):  $\varphi=300^\circ$  derece için zaman domeni cevapları.

Figure 7. The FPGA based implementation results. The time domain responses of the model in (a):  $\varphi=30^\circ$ . (b):  $\varphi=120^\circ$ . (c):  $\varphi=210^\circ$  and (d):  $\varphi=300^\circ$  degrees.



(a)

(b)



(c)

(d)

Şekil 8. FPGA tabanlı gerçekleştirme sonuçları. Modelin: (a):  $\varphi=30^\circ$ . (b):  $\varphi=120^\circ$ . (c):  $\varphi=210^\circ$  ve (d):  $\varphi=300^\circ$  derece için faz portresi gösterimleri.

Figure 8. The FPGA based implementation results. The phase portrait illustrations of the model in (a):  $\varphi=30^\circ$ . (b):  $\varphi=120^\circ$ . (c):  $\varphi=210^\circ$  and (d):  $\varphi=300^\circ$  degrees.

Bu sonuçlardan da görüldüğü gibi rotasyonlu FHN nöron modeli FPGA elemanı kullanılarak başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Rotasyonlu FHN nöron modelinin Şekil 7 ve 8'de sunulan gerçekleştirme sonuçları ile Şekil 4 ve 5'te sunulan nümerik simülasyon sonuçları birbir uyumludur. Elde edilen sonuçlarla; matematiksel olarak tanımlanan rotasyonlu modelin, gerçek zamanlı işaretlere ihtiyaç duyulan uygulamalarda kullanılabilmesi için yapılan gerçekleştirme sonuçları da elde edilmiştir. Böylece gerçek zamanlı işaretlerin kullanılması gereken biyolojiden esinlenen sistemlerin gerçekleştirimi için de bir ön çalışma yapılmıştır. Bu süreçte takip edilen adımlar pek çok farklı çalışma için ilham kaynağı olacak niteliktedir.

#### 4 Sonuçlar

Bu çalışmada Fitzhugh-Nagumo nöron modelinin rotasyon dönüşümü ile ilgili kapsamlı bir çalışma yapılmıştır. Öncelikle modelin rotasyon dönüşümü için gerekli matematiksel dönüşümler verilmiştir. Ardından matematiksel olarak modellenen sistemin nümerik analizi yapılarak rotasyon dönüşümü simülasyonlarla gözlemlenmiştir. Son olarak rotasyonlu sistemin FPGA donanımı ile gerçekleştirimi yapılmış ve elde edilen nümerik sonuçlar donanım gerçekleştirimi ile desteklenmiştir. Böylece, nöral sistemlerde nöron dinamikleri arasındaki eşzamanlılık için yapılan çalışmalarda nöron çekerleri arasındaki faz farklılıkları kuplajlama ile kontrol edilirken; bu çalışmada bir biyolojik nöron modelinin dinamik çekerleri herhangi bir kuplajlama ya da kontrol işlemine ihtiyaç duyulmaksızın rotasyon dönüşüm işlemi ile kontrol edilebilmiştir.

Rotasyonlu FHN nöron modelinin tanımlanmasında Euler rotasyon teoremi kullanılmıştır. Rotasyonlu sistemin 0-360° arasında 30° aralıklarla denge noktaları hesaplanmıştır ve denge noktaları arasındaki simetri durumları belirlenmiştir. Modelleme aşamasının ardından, nümerik simülasyon aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada, rotasyonlu

modelin işlevselliği açı değerleri değiştirilerek test edilmiştir. Nümerik simülasyonlar  $\varphi=30^\circ$ ,  $\varphi=120^\circ$ ,  $\varphi=210^\circ$  ve  $\varphi=300^\circ$  için ayrı ayrı koşturulmuştur. Elde edilen simülasyon sonuçları yorumlanarak şu çıkarımlarda bulunulabilir.

Tablo 2.  $\varphi=30^\circ$  derece için FPGA tabanlı gerçekleştiriminin sentez sonuçları.

Table 2. The synthesis results of the FPGA-based realization for  $\varphi=30^\circ$  degree.

Kullanılan/ Toplam REGISTER Sayısı	108/11777 (%1)
Kullanılan/ Toplam 4 GİRİŞ LUT Sayısı	2963/11776 (%25)
Kullanılan/ Toplam SLICE Sayısı	1577/5888 (%26)
Kullanılan/ Toplam BUFGMUX Sayısı	2/24 (%8)
Kullanılan/Toplam MULT18X18SIO Sayısı	8/20 (%40)
Maksimum Gecikme (ns)	1.098

Rotasyon dönüşüm işlemi, FHN nöron modelinin dinamik çeker formunu etkilememiştir, bununla birlikte faz uzayında çekerin sadece pozisyon değişimi söz konusudur. Son olarak, nümerik simülasyonlarla elde edilen sonuçların desteklenmesi ve gerçek zamanlı işaretlerin kullanımına ihtiyaç duyulan uygulamalara bir ön çalışma sağlanması amacıyla, rotasyonlu FHN nöron modelinin belirlenen aynı açı değerleri için FPGA tabanlı gerçekleştirmeleri yapılmıştır. Donanım gerçekleştirimi ile elde edilen sonuçlar nümerik simülasyon sonuçlarına benzer bir gösterimle sunulmuştur. Elde edilen tüm sonuçlar kıyaslandığında, sonuçların birebirleri ile uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, FPGA elemanında kullanılan kaynakların görülebilmesi amacıyla,  $\varphi=30^\circ$  derece için oluşturulan sisteme ait sentez sonuçları da Tablo 2'de verilmektedir.

## 5 Conclusions

A comprehensive study about the rotation-transition of the Fitzhugh-Nagumo neuron model has been carried out in this study. First of all, the required mathematical transformations have been given for the rotation transformation of this model. Then, the rotation transformation has been observed with the simulations by analyzing the mathematical modeled numerically. Finally, the rotation system has been implemented with FPGA hardware and the obtained numerical results have been supported by the hardware implementation. Thus, while the phase differences between neuron attractors are controlled by coupling for synchronicity between neuron dynamics, the dynamic attractors of a biological neuron model are able to control by rotation transformation without requiring any coupling or control operation in this study. The rotation theorem of Euler has been used in order to define the rotated-FHN neuron. Its equilibrium points have been calculated at intervals of  $30^\circ$  degrees between  $0-360^\circ$  degrees and the symmetry conditions have been determined between the equilibrium points. After the modeling stage, the numerical simulation stage has been executed. At this stage, the performance of the rotated-model has been checked by changing the degrees. Numerical simulations of the system have been performed for  $\varphi=30^\circ$ ,  $\varphi=120^\circ$ ,  $\varphi=210^\circ$  and  $\varphi=300^\circ$

degrees. The following outcomes are able to be made by interpreting the obtained simulation results:

Table 2. The synthesis results of the FPGA-based realization for  $\varphi=30^\circ$  degree.

Number of the Used/ Total REGISTER	108/11777 (1%)
Number of the Used/ Total 4 INPUTs LUT	2963/11776 (25%)
Number of the Used/ Total SLICE	1577/5888 (26%)
Number of the Used/ Total BUFGMUX	2/24 (8%)
Number of the Used/ Total MULT18X18SIO	8/20 (40%)
Maximum Delay (ns)	1.098

The rotation transformation procedure has produced no effect on the dynamic attractor form of the model; however, there is only a change on the position of the attractor in phase domain. Finally, the FPGA-based implementations of the rotated-FHN neuron model have been carried out for the same degrees in order to support obtained numerical simulations results and to provide a preliminary study for the applications that need the usage of the real-time signals. The obtained hardware implementation results have been presented with a similar representation to the numerical simulation results. When the all obtained results are compared, it is observed that these results are compatible with each other. In addition, the synthesis results of the system created for  $\varphi=30^\circ$  degrees are also given in Table 2 in order to mark the used sources in the FPGA device.

## 6 Yazar katkı beyanı

Gerçekleştirilen çalışmada; fikrin oluşması, literatür taraması, matematiksel analizlerin yapılması, nümerik simülasyonların yapılması, donanım gerçekleştirim süreci, sonuçların elde edilmesi ve değerlendirilmesi süreçlerinin hepsinde Nimet KORKMAZ katkı sağlamıştır.

## 7 Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

"Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur".  
"Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır".

## 8 Kaynaklar

- [1] Hodgkin A, Huxley A. "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve". *The Journal of physiology*, 117, 500-544, 1952.
- [2] Morris C, Lecar H. "Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber". *Biophysical Journal*, 35, 193-213, 1981.
- [3] Wilson HR, Cowan J.D. "Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons". *Biophysical Journal*, 12(1), 1-24, 1972.
- [4] FitzHugh R. *Mathematical Models for Excitation and Propagation in Nerve*. Editor: Schawm, H.P. Biological Engineering, 1-85, New York, USA, McGraw-Hill, 1969.



- [5] Hindmarsh JL, Rose RM. "A model of neural bursting using three couple first order differential equations". *Proceedings of the Royal Society of London. Series B*, 221(1222), 87-102, 1984.
- [6] Izhikevich EM. "Simple model of spiking neurons". *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(6), 1569-1572, 2003.
- [7] Korkmaz N, Öztürk İ, Kılıç R. "Multiple perspectives on the hardware implementations of biological neuron models and programmable design aspects". *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 24(3), 1729-1746, 2016.
- [8] Ciszak M, Euzzor S, Geltrude, Arecchi FT, Meucci R. "Noise and coupling induced synchronization in a network of chaotic neurons". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(4), 938-945, 2013.
- [9] Wei DQ, Luo XS, Zhang B, Qin YH. "Controlling chaos in space-clamped FitzHugh-Nagumo neuron by adaptive passive method". *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(3), 1752-1759, 2010.
- [10] Doruk R, İhniş H. "Bifurcation control of Fitzhugh-Nagumo models". *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, 22, 375-391, 2018.
- [11] Andrievsky B, Fradkov AL, Liberzon D. "Robustness of Pecora-Carroll synchronization under communication constraints". *Systems & Control Letters*, 111, 27-33, 2018.
- [12] Chen Q, Wang J, Yang S, Qin Y, Deng B, Wei X. "A real-time FPGA implementation of a biologically inspired central pattern generator network". *Neurocomputing*, 244, 63-80, 2017.
- [13] Minati L, Frasca M, Yoshimura N, Koike Y. "Versatile locomotion control of a hexapod robot using a hierarchical network of nonlinear oscillator circuits". *IEEE Access*, 6, 8042-8065, 2018.
- [14] Cristiano J, Puig D, Garcia MA. "Efficient locomotion control of biped robots on unknown sloped surfaces with central pattern generators". *Electronics Letters*, 51(3), 220-222, 2015.
- [15] Tabor M. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: an Introduction*. New York, USA, John Wiley & Sons, 1989.
- [16] Kim MY, Roy R, Aron JL, Carr TW, Schwartz IB. "Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: theory and experiment". *Physical Review Letters*, 94(8-088101), 1-4, 2005.
- [17] Cruz JM, Escalona J, Parmananda P, Karnatak R, Prasad A, Ramaswamy R. "Phase-flip transition in coupled electrochemical cells". *Physical Review E*, 81(4), 046213, 2010.
- [18] Adhikari BM, Prasad A, Dhamala M. "Time-delay-induced phase-transition to synchrony in coupled bursting neurons". *Chaos*, 21(2-023116), 1-8, 2011.
- [19] Skiadas CH, Skiadas C. "Chaotic modeling and simulation in rotation-translation models". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(10), 3023-3031, 2011.
- [20] Dai S, Sun K, He S, Ai W. "Complex chaotic attractor via fractal transformation". *Entropy*, 21(11), 1115, 2019.
- [21] Wang M, Deng Y, Liao X, Li Z, Ma M, Zeng, Y. "Dynamics and circuit implementation of a four-wing memristive chaotic system with attractor rotation". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 111, 149-159, 2019.
- [22] Prasad A, Dana SK, Karnatak R, Kurths J, Blasius B, Ramaswamy R. "Universal occurrence of the phase-flip bifurcation in time-delay coupled systems". *Chaos*, 18(2-023111), 1-9, 2008.
- [23] Bhowmick SK, Ghosh D, Dana SK. "Synchronization in counter-rotating oscillators". *Chaos*, 21(3), 1-9, 2011.
- [24] Prasad A. "Universal occurrence of mixed-synchronization in counter-rotating nonlinear coupled oscillators". *Chaos, Solitons & Fractals*, 43(1-12), 42-46, 2010.
- [25] Sayed WS, Radwan AG, Elnawawy M, Orabi H, Sagahyoon A, Aloul F, El-Sedeek A. "Two-dimensional rotation of chaotic attractors: Demonstrative examples and FPGA realization". *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 38(10), 4890-4903, 2019.
- [26] Orabi H, Elnawawy M, Sagahyoon A, Aloul F, Elwakil AS, Radwan AG. "On the Implementation of a Rotated Chaotic Lorenz System on FPGA". *IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems (APCCAS)*, Bangkok, Thailand, 11-14 November 2019.
- [27] Takagi S, Ueda T. "Emergence and transitions of dynamic patterns of thickness oscillation of the plasmodium of the true slime mold *Physarum polycephalum*". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(3), 420-427, 2008.
- [28] Hargreaves EL, Yoganarasimha D, Knierim, JJ. "Cohesiveness of spatial and directional representations recorded from neural ensembles in the anterior thalamus, parasubiculum, medial entorhinal cortex, and hippocampus". *Hippocampus*, 17(9), 826-841, 2007.
- [29] Bhowmick SK, Bera BK, Ghosh D. "Generalized counter-rotating oscillators: Mixed synchronization". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3), 692-701, 2015.
- [30] Binczaka S, Jacquir S, Bilbaulta JM, Kazantsev VB, Nekorkinb VI. "Experimental study of electrical MFHN neurons". *Neural Networks*, 19, 684-693, 2006.
- [31] Chen M, Qi J, Wu H, Xu Q, Bao B. "Bifurcation analyses and hardware experiments for bursting dynamics in non-autonomous memristive FitzHugh-Nagumo circuit". *Science China Technological Sciences*, 63, 1035-1044, 2020.
- [32] Keener J, Sneyd J. *Mathematical Physiology*. New York, USA, Springer, 1998.
- [33] FitzHugh R. "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane". *Biophysical Journal*, 1(6), 445-466, 1961.