

CZU: 330.46:504.05

UDC: 330.46:504.05

**PROIECTAREA UNUI MODEL
MATEMATIC AL PROBLEMELOR
DE PRODUCȚIE ȘI TRANSPORT,
CU RESTRICȚII DE POLUARE
A MEDIULUI**

Drd. Ștefan BLANUȚA, ASEM
stefan.blanuta@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2611-4279

Boris CIUMACOV, IC ANȘU, Kiev
tchoumb@gmail.com

ORCID:0009-0005-8606-4746

Conf. univ. dr. Anatol GODONOAGĂ, ASEM
godonoaga@ase.md

ORCID: 0000-0001-7459-9536

DOI: <https://doi.org/10.53486/econ.2023.125.111>

**DESIGN OF A MATHEMATICAL
MODEL ON PRODUCTION
AND TRANSPORT PROBLEMS
WITH RESTRICTIONS ON
ENVIRONMENTAL POLLUTION**

PhD candidate Ștefan BLANUȚA, ASEM
stefan.blanuta@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2611-4279

Boris CIUMACOV, IC ANȘU, Kiev
tchoumb@gmail.com

ORCID:0009-0005-8606-4746

Assoc. Prof. PhD Anatol GODONOAGA, ASEM
godonoaga@ase.md

ORCID: 0000-0001-7459-9536

DOI: <https://doi.org/10.53486/econ.2023.125.111>

În articolul dat, conform unei abordări cibernetice, se analizează sistemele de producție care pun accentul pe următorii indicatori economici: rentabilitatea optimă (profitul maximal); costul minim la achiziția și transportarea resurselor; costul minim pentru distribuția și transportul bunurilor spre piețele de consum; respectarea strictă a tuturor restricțiilor de producție, transport și a normelor de poluare a mediului ambiant. Toate aceste patru momente enumerate sunt redade, în mod sistemic, prin limbajul economico-matematic. Anterior, doar în unele forme simplificate, au fost cercetate câteva variante de modele de acest gen. Modelul elaborat poate fi utilizat, de exemplu, la evaluarea anumitor soluții propuse în dezbateri, la analiza unui oarecare eșantion de scenarii simulate, iar, în simbioză cu aplicarea metodelor de optimizare, poate fi eficient și în obținerea unor decizii eficiente.

***Cuvinte-cheie:** model matematic, profit, producție, transport, emisii nocive, funcții de poluare.*

***JEL:** C02, C61, D22.*

Introducere

Procesele de producție intensivă, deseori și excesivă, a bunurilor implică o serie de fenomene negative, unul dintre acestea fiind fenomenul de poluare a mediului ambiant [1-2]. Atât producerea propriu zisă, cât și transportarea resurselor la întreprinderi, dar și transportarea produselor finite spre piețele de consum, generează emisii nocive. Este foarte important de a cunoaște (de a cuantifica) vitezele fluxurilor de emisii. Deoarece, în caz contrar, s-ar putea constata, uneori cu mari întârzieri, dezechilibre nedorite în contextul ecologic, în con-

In the given article, according to the cybernetic approach, are analysed the production systems that focus on the following economic indicators: optimum profitability (maximum profit); minimum cost for the resources acquisition and transportation of; minimum cost for distributing and transporting goods to consumer markets; strict compliance with all production, transport and environmental pollution restrictions. All these four listed moments are reproduced in a systemic way through the economic-mathematical language. Previously, several variants of models of this kind were researched only in some simplified forms. The developed model can be used, for example, when evaluating certain solutions proposed in the debates, when analysing some sample of simulated scenarios, and, in symbiosis with the application of optimization methods, can be efficient in obtaining effective decisions.

***JEL:** C02, C61, D22.*

***Keywords:** mathematical model, advantage, production, transport, harmful emissions, pollution functions.*

Introduction

The processes of intensive, often excessive, production of goods involve a series of negative phenomena, one of which is the phenomenon of environmental pollution [1-2]. Both the actual production, as well as the transportation of resources to enterprises, as well as the transportation of finished products to consumer markets, generate harmful emissions. It is very important to know (quantify) the velocities of emission flows. Because, otherwise, unwanted imbalances in the ecological context could be detected, sometimes

textul sănătății populației, dar și în privința altor indicatori importanți.

Agenții economici, implicați în producerea bunurilor, în asigurarea cu factori de producție, în comercializarea produselor, gestionând sistemele de producție la un anumit nivel de rentabilitate, trebuie să ia în calcul și situațiile în care fiecare activitate, în mod separat, dar și în ansamblu, dăunează mediului ambiant.

Scopul lucrării constă în analiza integră a activităților sistemelor de producție, care: au ca obiectiv maximizarea profitului; organizează independent transportul resurselor și a bunurilor până la destinație; respectă regulile privind protecția mediului.

Metode aplicate

Metodele utilizate în acest studiu sunt metodele fundamentale ale ciberneticii economice, cum ar fi metoda modelării, metoda de analiză și metoda de sinteză. Desigur, pentru testarea modelului deja construit, dar și pentru aplicarea în practică a acestuia, de o importanță majoră ar fi și metoda de simulare [3].

Totodată, e important de remarcat că la optimizarea modelului propus sunt utile și unele cunoștințe temeinice din domeniul programării liniare și neliniare, analizei convexe [4-5]. Rezolvarea problemelor concrete necesită aplicarea metodelor de optimizare nediferențiabile, în simbioză cu metodele de decompoziție (deoarece, real, problema s-ar putea caracteriza ca o problemă de mari dimensiuni) [6].

Rezultate și discuții

În lucrare se analizează un model de tipul transport-producție-transport, în care resursa $i(i=\overline{1, m})$, în volum de x_i unități, este procurată de la un singur furnizor, iar bunul (produsul) $j(j=\overline{1, n})$, în cantitatea y_j , se oferă unui singur consumator (sau se realizează pe o singură piață) [7].

În realitate (sau mai adecvat), fiecare sistem de producție ar putea achiziționa resursa de tipul i de la mai mulți furnizori și, respectiv, comercializa produsul j mai multor consumatori (sau pe mai multe piețe de bunuri). O asemenea situație, dar fără a lua în calcul cele două componente de transport (a materiei prime de la furnizori până la întreprindere, dar și a bunurilor produse de la întreprindere până la consumatori), a fost analizată în publicația autorilor: A. Godonoagă, Șt. Blanuța, B. Ciumacov, editată în Kiev, anul 2019 [8].

Lucrarea menționată îmbină într-un întreg ideile expuse în lucrările citate anterior. Astfel, fie că fiecare factor de producție $i(i=\overline{1, m})$ poate fi procurat pe m_i piețe. Similar, produsul $j(j=\overline{1, n})$ ar putea fi direcționat (transportat) spre n_j piețe de bunuri și servicii.

with long delays, that of the population's health, but also regarding other important indicators.

Economic entities, involved in the production of goods, in providing production factors, in the marketing of products, managing production systems at a certain level of profitability, must also take into account the situations to which each activity separately, but also some activities as a whole, harm the environment.

The aim of the work consists in the integral analysis of the activities of the production systems, whose objective is to maximize profit, independently organizes the transportation of resources and goods to their destination and comply with environmental pollution requirements.

Research methodology

The methods used in the current research are the fundamental methods of economic cybernetics, such as the modelling method, the analysis method, and the synthesis method. Of course, for testing the already built model, but also for its practical application of major importance would be the simulation method [3].

At the same time, it is important to note that some thorough knowledge in the field of linear and non-linear programming is useful in optimizing the proposed model, convex analysis [4-5]. Solving concrete problems requires the application of non-differentiable optimization methods, in symbiosis with decomposition methods (because, in fact, the problem could be characterized as a large problem) [6].

Results and discussion

The given paper analyses the transport-production-transport type model, in which the resource $i(i=\overline{1, m})$, in volume of x_i unity, is procured from a single supplier, and the good (product) $j(j=\overline{1, n})$, in quantity y_j , is offered to a single consumer (or performed in a single market) [7].

In reality (or more appropriately) each production system could purchase the resource of type i from several suppliers, and, respectively markets product j and respectively markets product j to multiple consumers (or across multiple goods markets). Such a situation, but without taking into account the two transport components (of the raw material from the suppliers to the enterprise, but also of the goods produced, from the enterprise to the consumers), was analysed in the publication of the authors: A. Godonoagă, Șt. Blanuța, B. Ciumacov, edited in Kiev, year 2019 [8].

The above mentioned work combines into a whole the ideas presented in the previously cited works. Thus, let each factor of production $i(i=\overline{1, m})$ can be purchased on m_i markets. Similarly, the product $j(j=\overline{1, n})$ could be directed (transported) to n_j goods and services markets.

Se vor folosi următoarele notații:
 $s_i (s_i = \overline{1, m_i})$ – indicele pieței de resurse i ;
 $l_j (l_j = \overline{1, n_j})$ – indicele pieței de bunuri și servicii j ;
 $tr_i^{s_i} = 1, \dots, Tr_i^{s_i}$ – numărul traseului de la piața s_i de resurse i spre sistemul de producție (pentru comodate se va atribui: $k_1 = tr_i^{s_i}, K_1 = Tr_i^{s_i}$);
 $tb_j^{l_j} = 1, \dots, Tb_j^{l_j}$ – numărul traseului de la sistemul de producție spre piața l_j de bunuri j (se va atribui: $k_2 = tb_j^{l_j}, K_2 = Tb_j^{l_j}$);
 $x_i^{s_i, k_1} \in [0; \bar{x}_i^{s_i, k_1}]$ – cantitatea resursei i , care urmează a fi transportată de la piața de resurse s_i , spre sistemul de producție, pe traseul $k_1 (k_1 = \overline{1, K_1})$;
 $\bar{x}_i^{s_i, k_1}$ – capacitatea maximă de transport a resursei i de la piața s_i pe traseul k_1 spre întreprindere;
 $u_j^{l_j, k_2} \in [0; \bar{u}_j^{l_j, k_2}]$ – cantitatea bunului j care se va transporta de la sistemul de producție spre piața l_j de bunuri j pe traseul $k_2 (k_2 = \overline{1, K_2})$;
 $\bar{u}_j^{l_j, k_2}$ – capacitatea maximă de transport a bunului j spre consumatorul l_j pe traseul k_2 .

Pentru claritate, se propune schema din figura 1.

The following notations will be used:
 $s_i (s_i = \overline{1, m_i})$ – resource market index i ;
 $l_j (l_j = \overline{1, n_j})$ – goods and services market index j ;
 $tr_i^{s_i} = 1, \dots, Tr_i^{s_i}$ – route number from the market s_i of resources i to the production system (for convenience it will be assigned: $k_1 = tr_i^{s_i}, K_1 = Tr_i^{s_i}$);
 $tb_j^{l_j} = 1, \dots, Tb_j^{l_j}$ – route number from the production system to the market l_j of goods j (will be assigned: $k_2 = tb_j^{l_j}, K_2 = Tb_j^{l_j}$);
 $x_i^{s_i, k_1} \in [0; \bar{x}_i^{s_i, k_1}]$ – the amount of the resource i , which is to be transported, from the resource market s_i , to the production system, on the route $k_1 (k_1 = \overline{1, K_1})$;
 $\bar{x}_i^{s_i, k_1}$ – the maximum carrying capacity of the resource i from the market s_i on the route k_1 to the enterprise.
 $u_j^{l_j, k_2} \in [0; \bar{u}_j^{l_j, k_2}]$ – the amount of the good j which will be transported from the production system to the market l_j of goods j on the route $k_2 (k_2 = \overline{1, K_2})$;
 $\bar{u}_j^{l_j, k_2}$ – the maximum transport capacity of the good j to the consumer l_j on the route k_2 .

For clarity, the scheme in figure 1 is proposed.

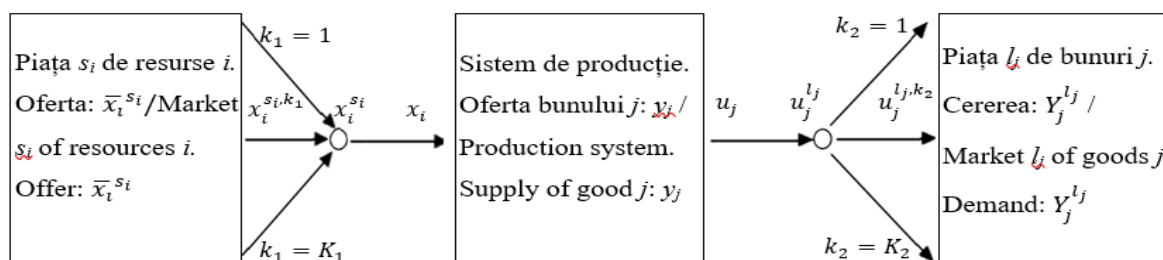


Figura 1. Schema de organizare a transportului resursei i și a bunului j /

Figure 1. Resource i and good j transport organization scheme

Sursa: elaborată de autori / Source: Developed by the authors

În contextul figurii 1, se va preciza:

In the context of figure 1, it will be specified:

$$x_i = \sum_{s_i=1}^{m_i} x_i^{s_i}, i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$x_i^{s_i} = \sum_{k_1=1}^{K_1} x_i^{s_i, k_1}; 0 \leq x_i^{s_i} \leq \bar{x}_i^{s_i}, \quad (2)$$

$$u_j = \sum_{l_j=1}^{n_j} u_j^{l_j} = \min \{y_j; \sum_{l_j=1}^{n_j} Y_j^{l_j}\}, \quad (3)$$

$$u_j^{l_j} = \sum_{k_2=1}^{K_2} u_j^{l_j, k_2} \leq \min \{y_j^{l_j}; Y_j^{l_j}\}, \quad (4)$$

$$y_j^{l_j} = \sum_{k_2=1}^{K_2} y_j^{l_j, k_2}, \quad (5)$$

unde:

where:

$y_j = \sum_{l_j=1}^{n_j} y_j^{l_j}$ – volumul total de ofertă a bunului j ;

$y_j = \sum_{l_j=1}^{n_j} y_j^{l_j}$ – the total supply volume of the good j ;

$y_j^{l_j, k_2}$ – oferta planificată pieței l_j , pe traseul k_2 ; $y_j^{l_j, k_2}$ – the planned supply to the market l_j on the route k_2 ;
 $y_j^{l_j}$ – volumul de ofertă a bunului j , pentru consumatorul (piața) l_j . $y_j^{l_j}$ – the supply volume of the good j for the consumer (market) l_j .
 Se va nota: It will be noted:

$$Cost_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{s_i=1}^{m_i} r_i^{s_i} \cdot x_i^{s_i}, \quad (6)$$

- costul tuturor resurselor care urmează a fi procurate pe piețele factorilor de producție, unde: $r_i^{s_i}(s_i = 1, m_i)$ este prețul resursei i pe piața s_i . Valoarea $r_i^{s_i}$ poate fi constantă sau dependentă de cantitatea $x_i^{s_i}$.
 - the cost of all resources, to be procured in the markets of the factors of production, where: $r_i^{s_i}(s_i = 1, m_i)$ is the price of resource i on the market s_i . The value $r_i^{s_i}$ can be constant or quantity dependent $x_i^{s_i}$;
 Transportul cantității x_i de la piața s_i până la sistemul de producție necesită costul sumar: Quantity transport x_i , from the market s_i to the production system requires summary costing:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1} r_i^{s_i, k_1} \cdot x_i^{s_i, k_1}, \quad (7)$$

iar traseului k_1 , se admite, îi corespunde funcția de poluare: and the route k_1 , admittedly, the function of pollution corresponds to it:

$$\varphi_i^{s_i, k_1} = d_i^{s_i, k_1} \cdot x_i^{s_i, k_1}, \quad (8)$$

aici $d_i^{s_i, k_1}$ este un coeficient proporțional lungimii traseului k_1 . here $d_i^{s_i, k_1}$ is a coefficient proportional to the length of the route k_1 .

Prin urmare, costul total, condiționat de transportarea tuturor resurselor de la toate piețele până la întreprindere, se estimează conform expresiei: Therefore, the total cost, conditional on transporting all resources from all markets to the enterprise, is estimated according to the expression:

$$Cost_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{s_i=1}^{m_i} \sum_{k_1=1}^{K_1} r_i^{s_i, k_1} \cdot x_i^{s_i, k_1}. \quad (9)$$

În mod similar, transportarea volumului $u_j^{l_j}$ de produs j până la consumatorul (piața) l_j implică un cost sumar egal cu: Similarly, volume transport $u_j^{l_j}$ the product j to the consumer (market) l_j implies a summary cost equal to:

$$\sum_{k_2=1}^{K_2} C_j^{l_j, k_2} \cdot u_j^{l_j, k_2} \quad (10)$$

și traseului k_2 , se presupune, îi corespunde funcția de poluare: and the route k_2 , presumably, it corresponds to the function of pollution:

$$\Psi_j^{l_j, k_2} = D_j^{l_j, k_2} \cdot u_j^{l_j, k_2}, \quad (11)$$

unde: $D_j^{l_j, k_2}$ se consideră o mărime proporțională lungimii traseului k_2 . Astfel, poate fi evaluat costul total al transportului tuturor bunurilor de la sistemul de producție până la toate piețele de consum: where: $D_j^{l_j, k_2}$ it is considered a quantity proportional to the length of the route k_2 . Thus, the total cost of transporting all goods from the production system to all consumer markets can be assessed:

$$Cost_3 = \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{n_j} \sum_{k_2=1}^{K_2} C_j^{l_j, k_2} \cdot u_j^{l_j, k_2}. \quad (12)$$

În raport cu bunul j și piața $l_j(l_j=1, n_j)$, se definește funcția [8]: In relation to the good j and the market $l_j(l_j=1, n_j)$ the function is defined [8]:

$$V_j^{l_j} (y_j^{l_j}, Y_j^{l_j}) = C_j^{l_j} \min \{y_j^{l_j}, Y_j^{l_j}\} - P_j^{l_j} \max \{0, y_j^{l_j} - Y_j^{l_j}\} - Q_j^{l_j} \max \{0, Y_j^{l_j} - y_j^{l_j}\}, \quad (13)$$

care exprimă venitul condiționat de comercializarea bunului j pe piața l_j , la prețul $C_j^{l_j}$, excluzând pierderile cauzate de situațiile în care oferta depășește cererea. which expresses the income conditional on the sale of the good j on market l_j at the price $C_j^{l_j}$, excluding losses caused by situations where supply exceeds demand.

șește cererea ($y_j^{lj} > Y_j^{lj}$) sau în care se creează situație de deficit ($Y_j^{lj} > y_j^{lj}$). exceeds demand ($y_j^{lj} > Y_j^{lj}$), or when a deficit situation is created ($Y_j^{lj} > y_j^{lj}$).

Venitul ipotetic al întreprinderii (V) se determină prin expresia: The hypothetical income of the enterprise (V) is determined by the expression:

$$V = \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{n_j} V_j^{l_j} (y_j^{l_j}, Y_j^{l_j}), \quad (14)$$

formula de calcul al profitului ipotetic (R) fiind: the formula for calculating the hypothetical profit (R) being:

$$R = V - Cost_1 - Cost_2 - Cost_3. \quad (15)$$

Desigur, se dorește o asemenea planificare (dar și realizare) a activităților, pentru care indicatorul R ar atinge valoarea maximă posibilă. Of course, such planning (but also realization) of the activities is desired, for which the R indicator would reach the maximum possible value.

În continuare, se vor expune restricțiile ce țin de procesul de producție, dar și cele care exprimă marjele de poluare a mediului, în raport cu activitățile de transport și cu activitățile de producție a bunurilor. Next, the restrictions related to the production process will be exposed, but also those that express environmental pollution margins in relation to transport activities and with goods production activities.

În mod logic, se deduce următorul model decizional, unde funcția obiectiv are aspectul: The following decision model is logically deduced. The objective function has the form:

$$R(X, y, U, Y) \rightarrow \max_{(X, y, U)}. \quad (16)$$

Restricțiile ce țin de transportarea resurselor *i* sunt: The restrictions, related to the transportation of resources *i*, are:

$$\sum_{s_i=1}^{m_i} \sum_{k_1=1}^{K_1} x_i^{s_i, k_1} = x_i, \quad (17)$$

$$x_i^{s_i} \leq \bar{x}_i^{s_i}, \quad (18)$$

$$x_i^{s_i, k_1} \leq \bar{x}_i^{s_i, k_1}, k_1 = \overline{1, K_1}. \quad (19)$$

Restricțiile, condiționate de livrarea bunurilor *j*, au următoarea formă: The restrictions, conditional on the delivery of goods *j* have the following form:

$$\sum_{l_j=1}^{n_j} \sum_{k_2=1}^{K_2} u_j^{l_j, k_2} = u_j, \quad (20)$$

$$u_j = \min \{y_j; \sum_{l_j=1}^{n_j} Y_j^{l_j}\}, \quad (21)$$

$$0 \leq u_j^{l_j, k_2} \leq \bar{u}_j^{l_j, k_2}, \quad (22)$$

$$\underline{y}_j \leq y_j \leq \bar{y}_j, j = \overline{1, n}, \quad (23)$$

unde: $[\underline{y}_j; \bar{y}_j]$ este intervalul estimat și acceptat de output-ul posibil pentru produsul *j*; where: $[\underline{y}_j; \bar{y}_j]$ is the estimated and accepted range of possible output for the product *j*;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq b_i + x_i, i = \overline{1, m}, \quad (24)$$

unde: where:

$a_{ij} \geq 0$ – coeficientul tehnologic (care semnifică cantitatea resursei *i* necesară pentru a produce o unitate de bun *j*); $a_{ij} \geq 0$ – the technological coefficient (which signifies the amount of resource *i* needed to produce a unit of good *j*);

b_i – cantitatea resursei *i* care ar fi deja în posesia producătorului. b_i – the amount of resource *i* that would already be in the producer's possession.

Urmează, în continuare, includerea în model și a acelor constrângeri (restricții) impuse pentru a nu încălca normele de poluare a mediului în procesul de transportare a resurselor, de obținere a bunurilor și de transportare a acestor bunuri spre consumatori. Acestea vor fi definite corespunzător, astfel: Next is the inclusion in the model of those constraints (the restrictions) imposed in order not to violate the rules of environmental pollution in the process of transporting resources, to obtain goods and transport these goods to consumers. These will be properly defined as follows:

$$\varphi_i^{s_i, k_1} \leq \bar{\varphi}_i^{s_i, k_1}, \tag{25}$$

$\bar{\varphi}_i^{s_i, k_1}$ – valoarea plafon de poluare pe traseul k_j în raport cu resursa i ; $\bar{\varphi}_i^{s_i, k_1}$ – the pollution ceiling value on the route k_j relative to the resource i ;

$$\sum_{s_i=1}^{m_i} \sum_{k_1=1}^{K_1} \varphi_i^{s_i, k_1} = \bar{\varphi}_i, \tag{26}$$

$\bar{\varphi}_i$ – valoarea plafon de poluare în raport cu resursa i , pe toate K_j trasee; $\bar{\varphi}_i$ – the pollution ceiling value in relation to the resource i on all K_j routes:

$$P(y) = \sum_{j=1}^n P_j(y_j) \leq \bar{P}, \tag{27}$$

$$P_j(y_j) \leq \bar{P}_j, \tag{28}$$

unde:

$P_j(y_j)$ – funcția de poluare, în raport cu bunul j , depinde de volumul y_j al acestui bun (poate fi liniară sau neliniară);

\bar{P}_j – valoarea plafon de poluare în raport cu bunul j ;

\bar{P} – marja superioară de poluare în raport cu toate cele n bunuri;

$$\Psi_j^{l_j, k_2} \leq \bar{\Psi}_j^{l_j, k_2} \tag{29}$$

$\bar{\Psi}_j^{l_j, k_2}$ – plafonul de emisii la organizarea transportului bunului j pe traseul k_2 ;

$\bar{\Psi}_j$ – valoarea maximă admisibilă de poluare a mediului la transportarea bunului j pe toate cele K_2 trasee.

where:

$P_j(y_j)$ – the pollution function in relation to the good j , it depends on the volume y_j of this good (can be linear or non-linear);

\bar{P}_j – the pollution ceiling value in relation to the good j ;

\bar{P} – the upper margin of pollution in relation to all the n goods;

$$\Psi_j^{l_j, k_2} \leq \bar{\Psi}_j^{l_j, k_2} \tag{29}$$

$\bar{\Psi}_j^{l_j, k_2}$ – the emission ceiling when organizing the transport of good j on the route k_2 ;

$\bar{\Psi}_j$ – the maximum admissible value of environmental pollution when transporting good j on all those K_2 routes.

$$\sum_{l_j=1}^{n_j} \sum_{k_2=1}^{K_2} \Psi_j^{l_j, k_2} \leq \bar{\Psi}_j; \tag{30}$$

Analiza modelului

Este important de menționat că în calitate de variabile de control, în cadrul modelului (16)-(30), cu elementele definite prin relațiile (1)-(15), servesc:

1) mărimile $x_i^{s_i, k_1}$ pentru : $k_1 = tr_i^{s_i} = 1, \dots, K_1 = Tr_i^{s_i}$; pentru $s_i = 1, \dots, m_i$; pentru $i = 1, \dots, m$;

2) mărimile $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$ pentru $k_2 = tb_j^{l_j} = 1, \dots, K_2 = Tb_j^{l_j}$; pentru $l_j = 1, \dots, n_j$; pentru $j = 1, \dots, n$;

Remarcă! Variabilele $x_i^{s_i}$ și x_i sunt total determinate de $x_i^{s_i, k_1}$, iar $u_j^{l_j}$, u_j și $y_j^{l_j}$, y_j - de $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$, corespunzător.

În condițiile pieței perfecte [9], atât pe piața factorilor de producție, cât și pe piața de bunuri și servicii, ușor se constată că funcția obiectiv $R(\bullet)$, ca funcție dependentă de variabilele $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$, este concavă în raport cu $y_j^{l_j, k_2}$ și liniară față de $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$. Suplimentar, toate restricțiile enumerate sunt descrise prin inegalități liniare, ceea ce denotă că modelul în întregime se referă la clasa modelelor convexe [5]. Prin urmare, una din căile

Analysis of the model

It is important to note that as control variables, within the model (16)-(30), with the elements defined by relations (1)-(15), they serve:

3) sizes $x_i^{s_i, k_1}$, for: $k_1 = tr_i^{s_i} = 1, \dots, K_1 = Tr_i^{s_i}$; for $s_i = 1, \dots, m_i$; for $i = 1, \dots, m$;

4) sizes $u_j^{l_j, k_2}$ and $y_j^{l_j, k_2}$ for $k_2 = tb_j^{l_j} = 1, \dots, K_2 = Tb_j^{l_j}$; for $l_j = 1, \dots, n_j$; for $j = 1, \dots, n$;

Remark! Variables $x_i^{s_i}$ and x_i are totally determined by $x_i^{s_i, k_1}$, but $u_j^{l_j}$, u_j și $y_j^{l_j}$, y_j - of $u_j^{l_j, k_2}$ and the appropriate $y_j^{l_j, k_2}$.

Under perfect market conditions [9], both in the factor market and in the goods market and services, it is easy to see that the objective function $R(\bullet)$, as a function dependent on the variables $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$, is concave with respect to $y_j^{l_j, k_2}$ and linear with respect to $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$. Additionally, all listed restrictions are described by linear inequalities, which denotes that the model as a whole refers to the class of convex models [5]. Therefore, one of the ways to numerically solve the model would be to apply the

de soluționare numerică a modelului ar fi aplicarea modificării metodei proiecției gradientului generalizat [6], care detaliat se descrie în lucrarea „Modele economice nediferențiabile. Aspecte decizionale” [10]. Doar că, este necesar și de specificat formulele de calcul ale gradientilor, mai bine zis a derivatelor parțiale, în raport cu variabilele $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$, ale funcției $R(\bullet)$. Acestea se vor nota astfel:

$$R'(x_i^{s_i, k_1}), R'(u_j^{l_j, k_2}) \text{ și } R'(y_j^{l_j, k_2}).$$

Reieșind din forma de reprezentare a funcției $R(\bullet)$, se deduc următoarele formule:

$$R'(x_i^{s_i, k_1}) = -r_i^{s_i} - r_i^{s_i, k_1},$$

$$R'(u_j^{l_j, k_2}) = -c_j^{l_j, k_2},$$

$$R'(y_j^{l_j, k_2}) = \begin{cases} c_j^{l_j}, & \text{dacă } \sum_{k_2=1}^{K_2} y_j^{l_j, k_2} = Y_j^{l_j}, \\ c_j^{l_j} + Q_j^{l_j}, & \text{dacă } \sum_{k_2} y_j^{l_j, k_2} < Y_j^{l_j}, \\ -P_j^{l_j}, & \text{dacă } \sum_{k_2} y_j^{l_j, k_2} > Y_j^{l_j}. \end{cases}$$

Remarcă! Modelul elaborat (16)-(30), din punct de vedere al optimizării, devine și mai complex, dacă cel puțin una dintre piețele descrise nu corespunde formei perfecte de piață. Aceste situații pot genera modele matematice, care, deja, nu pot fi analizate și optimizate folosind instrumentele aparatului convex. Desigur, asemenea cazuri prezintă interes teoretic, dar și aplicativ.

Modelul elaborat descrie situații complexe de proiectare a deciziilor pentru agenții economici din sectorul de producție. Complexitatea, în mare parte, e determinată de natura incertă a ofertei de resurse, a cererii de bunuri, dar și de formele de dependență a funcțiilor de poluare. Printre avantajele modelului pot fi enumerate următoarele: 1) este un instrument util, dar și comod, pentru analiza activităților unei mari diversități de întreprinderi; 2) nu prezintă dificultăți pentru realizarea unor simulări a factorilor de decizie; 3) în situații de certitudine, folosind algoritmi relativ simpli, oferă variante aproximative, dar eficiente, de decizie.

Concluzii

Luând în considerare legătura interdependentă dintre activitățile economice (preponderent cele de producție, dar și cele de transport) și mediul ambiant, se pot obține modele tot mai adecvate de descriere a realității. Deși, acestea din urmă pot avea diferite grade de complexitate în aspectul cercetării și aplicabilității, un lucru este cert: un model valid oferă foarte multe posibilități, înce-

modification of the generalized gradient projection method [6-Shor N.Z.], which is described in detail in the paper [10]. Except, it is worth mentioning that the calculation formulas of the gradients, or rather of the partial derivatives, in relation to the variables $x_i^{s_i, k_1}$, $u_j^{l_j, k_2}$ și $y_j^{l_j, k_2}$, of the function $R(\bullet)$. These will be noted respectively:

Based on the form of representation of the function $R(\bullet)$, the following formulas are deduced:

Remark! The elaborated model (16)-(30), from the point of view of optimization, becomes even more complex, if at least one of the described markets does not correspond to the perfect market form. These situations can generate mathematical models that cannot already be analysed and optimized using convex apparatus instrumentation. Of course, such cases are of theoretical, but also applied interest.

The elaborated model describes complex decision design situations for economic agents in the production sector. The complexity, to a large extent, is determined by the uncertain nature of the supply of resources, the demand for goods, but also by the forms of dependence of the pollution functions. Among the advantages of the model can be listed as follows: 1) it is a useful and convenient tool for analysing the activities of a wide variety of businesses; 2) it does not present difficulties for the realization of simulations of the decision-making factors; 3) in situations of certainty, using relatively simple algorithms, they offer approximate, but effective, decision options.

Conclusions

Taking into account the interdependent link between economic activities, (mainly those of production, but also those of transport) and the environment, more and more appropriate models can be obtained to describe reality. The latter can have varying degrees of complexity in terms of

pând cu compararea unor scenarii ipotetice și terminând cu fundamentarea unor variante „raționale” sau chiar optime.

Desigur, dacă s-ar cere propuneri concrete de soluții optime în asemenea procese de luare a deciziilor, ar fi necesar de analizat proprietățile modelului în cauză, de elaborat algoritmi numerici, care, în mod argumentat, ar asigura obținerea acestor soluții în timp real.

research and applicability. But one thing is certain: a valid model offers a lot of possibilities, starting with the comparison of some hypothetical scenarios and finishing with the substantiation of some “rational” or even optimal variants.

Obviously, if concrete proposals for optimal solutions were required in such decision-making processes, it would be necessary to analyse the properties of the model in question, to develop numerical algorithms, which, arguably, would ensure obtaining these solutions in real time.

Bibliografie/Bibliography:

1. JOHANNES ANDRÉEA, Bo Pieter, CHAMORROA, Andres, SPENCERA, Phoebe, KOOMENB, Eric, DOGOA, Harun. Revisiting the relation between economic growth and the environment; a global assessment of deforestation, pollution and carbon emission. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* [online]. 2019, vol. 114 [citat 01.10.2023]. Disponibil: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.06.028> Get rights and content
2. MÜLLERA, Sarah; WESTKÄMPER, Engelbert. Modelling of Production Processes: A Theoretical Approach to Additive Manufacturing [online]. In: *51st CIRP Conference on Manufacturing Systems*: Procedia CIRP 72. 2018, pp.1524-1529 [citat 01.10.2023]. Disponibil: <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.03.010>
3. SCARLAT, Emil; CHIRIȚĂ, Nora. *Cibernetica sistemelor economice*. București: Ed. ASE, 2003. 630 p. ISBN 973-594-277-1.
4. GAMEȚCHI, Andrei; SOLOMON, Dumitru. *Cercetări operaționale*. Chișinău: Evrica, 2015. vol.1. 456 p. ISBN 978-9975-3061-8-8.
5. РОКАФЕЛЛА, Ральф. *Выпуклый анализ*. Москва: Мир, 1973. 472 с.
6. SHOR, N. Z. *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. 358 p. ISBN: 978-0792349976.
7. BLANUȚA, Ștefan; CIUMACOV, Boris; GODONOAGĂ, Anatol. Model transport – producere – transport cu restricții antipoluare. In: *Модельовання і оптимізація у транспорті та логістиці: матеріали 7-ї міжнародної наукової конференції присвяченої 85-річчю з дня народження академіка НАН України Наума Зуселевича Шора, 21-25 березня 2022 року*. Kyiv, Chisinau, Vaku, 2022, pp. 45-50. (0,3 с.а.)
8. ГОДОНОВАГА, А. Ф.; БЛАНУЦА, Ш. А.; ЧУМАКОВ, Б. М. Алгоритм настройки входных и выходных потоков в процессе производства. *Теорія оптимальних рішень*. 2019, № 18, сс. 34-39. ISSN 2616–5619.
9. INTRILIGATOR, Michael D. *Econometric Models, Techniques, and Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1978. 638 p.
10. GODONOAGĂ, Anatol; BARACTARI, Anatolie. *Modele economice nediferențiable. Aspecte decizionale*. Chișinău: ASEM, 2011. 275 p. ISBN 978-9975-75-575-7.