Impact Factor:

ISRA (India)	= **6.317**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **1.582**	**РИНЦ** (Russia)	= **3.939**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.771**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **7.184**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2022 **Issue:** 07 **Volume:** 111

Published: 21.07.2022 **http://T-Science.org**

Issue **Article**

Shuxrat Isroilovich Jo'raev
Bukhara State University
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
Bukhara, Republic of Uzbekistan

ON EQUIVALENT LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GIVEN KERNELS

***Abstract**: An elastic problem is considered and its analytical solution is constructed. Was proved the theorem that a linear differential equation with polynomial coefficients corresponds to an equivalent Voltaire type integral equation of the 2nd kind with degenerate kernels containing only power and exponential functions, and the exponents can be specified in advance. As an example, the Bessel equation is given.*

***Key words**: differential equation, polynomial coefficient, images, integral equation, Bessel equation.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Jo'raev, Sh. I. (2022). On equivalent linear integro-differential equations with given kernels. *ISJ Theoretical & Applied Science, 07 (111),* 135-139.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-111-15 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.07.111.15

***Scopus ASCC**: 2200.*

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО -ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАДАННЫМИ ЯДРАМИ

***Аннотация**: Рассматривается упругая задач и строится ее аналитическое решение. Доказана теорема, что линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами соответствует эквивалентное интегральное уравнение типа Вольтерра 2-го рода с вырожденными ядрами, содержащими только степенные и экспоненциальные функции, причем показатели экспонент могут задаваться заранее. В качестве примера приводится уравнение Бесселя.*

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение, полиномиальной коэффициент, изображение, интегральное уравнение, уравнение Бесселя.*

Введение

Рассматривается упругая задач для тела с модулями упругости G', K' и строится ее аналитическое решение. В этом решении напряжения, деформации, перемещения, объемные силы и граничные функции заменяются их изображениями, а модули упругости - преобразованными функциями материала. Затем применяют обратное преобразование Лапласа и находят решение задачи, где отсутствует условие однородности. Интегральные операторы зависят от координат, поэтому нельзя применять метод разделения переменных. Преобразования Лапласа нельзя применять для решения задач с переменными коэффициентами.

Основные соотношения теории вязко упругости имеют вид [1,2,3]

$$\vec{S}^*_{jk} = 2G[1-r^*]e^*_{jk}\ ;\ \ \sigma^* = K'\Theta^*;$$

$$S^*_{jk} = 2G'e^*_{jk}\,; G' = G[1-r^*].$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которая применяется для решения задач вязко упругости. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$P_n(t)y^n + P_{n-1}(t)y^{n-1} + \ldots +$$
$$+P_1(t)y' + P_0(t)y = f(t), \qquad (1)$$

где $P_n(t), P_{n-1}(t), \ldots, P_0(t)$ - полиномы степени не выше m, $f(t)$ - некоторая кусочно-непрерывная функция.

По теореме дифференцирования изображения [4,5]

$$t^m y(t) \leftarrow\!\!\!\!\cdot\!\!\!\!- (-1)^m p \frac{d^m}{dp^m}\left[\frac{Y(p)}{p}\right]. \quad (2)$$

Причем $J(p) \xrightarrow{\cdot} y(t)$, и после операционного преобразования уравнению (1) соответствует линейное дифференциальное уравнение m - го порядка

$$R(p)p\frac{d^m}{dp^m}\frac{Y}{p} + R_{m-1}(p)p\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\frac{Y}{p} +$$

$$+ ... + R_1(p)p\frac{d}{dp}\frac{Y}{p} + R_0(p)Y = F(p) \quad (3)$$

где $R_m(p), R_{m-1}(p), ..., R_0(p)$ - полиномы степени не выше n $(\leq n)$, $F(t)$ - функция, содержащая начальные значения и изображение правой части уравнения (1).

Пусть, например, $R_k(p)$ - полином степени n, т.е. степени не меньшей, чем степени остальных полиномов $R_m(p), ..., R_{k+1}(p), R_{k-1}, ..., R_0(p)$.

Тогда в развитии (1) имеет место следующая теорема.

Теорема. Линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами соответствует эквивалентное ему интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с вырожденными ядрами, содержащими только степенные или степенные и экспоненциальные функции, причем показатели экспонент могут задаваться заранее.

Доказательство. Пусть полином $R_k(p)$ записывается как

$$R_k(p) = a_n^{(k)}p^n + a_{n-1}^{(k)}p^{n-1} +$$

$$+ ... + a_1^{(k)}p + a_0^k. \quad (4)$$

Представим (4) в виде

$$R_k(p) = a_n^{(k)}p^n + Q_k(p), \quad (5)$$

где $Q_k(p)$ - полином степени не выше (n-1) $\leq n-1$. Тогда из (3) получаем

$$a_n^{(k)}p\frac{d^k}{dp^k}\frac{Y}{p} = \frac{F(p)}{p^n} - \frac{R_0(p)}{p^n}Y -$$

$$- ... - \frac{R_{k-1}(p)}{p^n}p\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\frac{Y}{p} -$$

$$-\frac{Q_k(p)}{p^n}p\frac{d^k}{dp^k}\frac{Y}{p} - \frac{R_{k+1}(p)}{p^n}p\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\frac{Y}{p} -$$

$$- ... - \frac{R_m(p)}{p^n}p\frac{d^m}{dp^m}\frac{Y}{p} \quad (6)$$

Поскольку n высшая степень показателя, то после почленного деления числителей дробей на p^n, соотношение (6) переписывается как

$$a_n^k p\frac{d^k}{dp^k}\frac{Y}{p} = \frac{F(p)}{p^n} -$$

$$-\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{b_{rs}}{p^r}p\frac{d^s}{dp^s}\frac{Y}{p}. \quad (7)$$

Найдем оригиналы отдельных членов соотношения (7). Изображение первого члена правой части (7) находится обычными способами. Пуст

$$\frac{F(p)}{p^n} \xrightarrow{\cdot} \psi(t) \quad (8)$$

Для членов под знаками суммирования, очевидно, будет

$$\frac{b_{rs}}{p^r}p\frac{d^s}{dp^s}\frac{Y}{p} =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{b_{rs}}{p^{r-1}}p\frac{d^s}{dp^s}\frac{Y}{p} \xrightarrow{\cdot} (-1)^s\frac{b_{rs}}{(r-s)!}\int_0^t (t-\tau)^{r-1}\tau^s y(\tau)d\tau,$$

$$b_{os}p\frac{d^s}{dp^s}\frac{Y}{p} \xrightarrow{\cdot} (-1)^s b_{os}t^s y(t), \quad (9)$$

$$r = 1, 2, ..., m; s = 0, 1, ..., n$$

Значит, исходному дифференциальному уравнению (1) соответствует эквивалентное интегральное уравнение

$$\left[(-1)^k a_n^{(k)}t^k + \sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{os}t^s\right]y(t) =$$

$$= \Psi(t) - \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{b_{rs}}{(r-s)!}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t (t-\tau)^{r-1}\tau^s y(\tau)d\tau, \quad (10)$$

Представим теперь (4) в виде

$$R_k(p) = a_n^{(k)}(p-p_1)^{V_1}(p-p_2)^{V_2}\cdot$$

$$\cdot ...(p-p_N)^{V_N} + M_k(p), \quad (11)$$

где $V_1, V_2, ..., V_N$ - целые числа , такие, что $V_1 + V_2 + ... + V_N = n$; $T_k(p)$ - остаточный полином степени не более $n-1$; $p_1, p_2, ..., p_N$ - желаемые показатели экспонент в ядрах. Тогда из (3)

$$a_n^{(k)}p\frac{d^k}{dp^k}\frac{Y}{p} = \frac{F(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}} -$$

$$-\frac{R_0(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}} - ... -$$

$$-\frac{R_{k-1}(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}p\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\frac{Y}{p}-$$

$$-\frac{T_k(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}p\frac{d^{k}}{dp^{k}}\frac{Y}{p}-$$

$$-\frac{R_{k+1}(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}p\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\frac{Y}{p}-\ldots-$$

$$-\frac{R_m(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}p\frac{d^{m}}{dp^{m}}\frac{Y}{p} \qquad (12)$$

Разлагая далее отношения полиномов на простые дроби, переписываем (12) как

$$a_n^{(k)}p\frac{d^k}{dp^k}\frac{Y}{p}=\frac{F(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}-$$

$$-\sum_{n=1}^{m}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{V_r}\frac{C_{rs\lambda}}{(p-p_r)^s}p\frac{d^\lambda}{dp^\lambda}\frac{Y}{p}-$$

$$-\sum_{\lambda=0}^{m}C_\lambda p\frac{d^m}{dp^m}\frac{Y}{p} \qquad (13)$$

Изображение первого члена правой части (13) находится обычными способами. Пусть

$$\frac{F(p)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)^{V_i}}\ \dot{=}\!\!\to \varphi(t) \qquad (14)$$

Для членов под знаками суммирования, очевидно, будет

$$\frac{1}{p}\frac{C_{rs\lambda}}{(p-p_r)^s}p\frac{d^\lambda}{dp^\lambda}\ \dot{\to}$$

$$\dot{\longrightarrow}\frac{C_{rs\lambda}}{(s-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{s-1}e^{p_r(t-\tau)}\tau^\tau y(\tau)d\tau \qquad (15)$$

Значит, исходному дифференциальному уравнению (I) соответствует эквивалентное ему интегральное уравнение

$$\left[a_n^{(k)}(-1)t^k+\sum_{\lambda=0}^{m}C_\lambda(-1)^\lambda t^\lambda\right]y(t)=\varphi(t)- \qquad (16)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{V_r}\frac{C_{rs\lambda}}{(s-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{s-1}e^{p_r(t-\tau)}\tau^\tau y(\tau)d\tau$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, в качестве величин $P_1,P_2,\ldots,P_N$ могут быть взяты корни полинома $R_k(p)$. Тогда $Q_k(p)=0$. Если же величины $P_1,P_2,\ldots,P_N$ - комплексные, попарно сопряженные, то ядро будет содержать гармонические функции заданного периода. Нулевые корни не вносят принципиальных трудностей. Наличие вполне определенных функций под знаками интеграла интересно для итерационных и вычислительных процессов [6,7].

Пример. Уравнение Бесселя

$$t^2\ddot{y}+t\dot{y}+(t^2-n^2)y=0. \qquad (17)$$

После операционного преобразования, имеем

$$(1-n^2)F(p)+3p\frac{dF(p)}{dp}+$$

$$(p^2+1)\frac{d^2F(p)}{dp^2},$$

где

$$F(t)=\frac{Y(p)}{p},\qquad Y(p)\ \dot{\longrightarrow}\ y(t),$$

Отсюда

$$\frac{d^2F(p)}{dp^2}=-\frac{3p}{p^2+1}\frac{dF}{dp}+\frac{n^2-1}{p^2+1}F(P)$$

и, находя оригиналы отдельных членов, получаем интегральное уравнение

$$t^2y(t)=3\int_0^t\tau y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau+$$

$$+(n^2-1)\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau. \qquad (18)$$

Заметим, что все вышеприведенные выкладки можно применить и к нелинейным дифференциальным уравнениям, например, к уравнению Дюффинга

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+(x+\alpha x^3)=f(t). \qquad (19)$$

Действительно, делая преобразование Лапласа, получаем из (19)

$$(mp^2X-p^2x_0-p\dot{x}_0)+h(pX-px_0)+$$

$$+kx+k\alpha Z\left\{x^3\right\}=F(P), \qquad (20)$$

где $X(p)\ \dot{\longrightarrow}\ x(t)$,

$F(p)\ \dot{\longrightarrow}\ f(t), Z\left\{x^3\right\}\ \dot{\longrightarrow}\ x^3.$

Возможны два варианта:

1) делим обе части (20) на p^2 , что после обратного преобразование дает (см. также (3))

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \\ +\frac{h}{m}\int_0^t [x_0 - x(\tau)]d\tau - \\ -\frac{k}{m}\int_0^t (t-\tau)\left[x(\tau)+\alpha x^3(\tau)\right]d\tau + \\ +\frac{1}{m}\int_0^t (t-\tau)\, f(\tau)d\tau \;; \qquad (21)$$

2) перепишем (20) в виде

$$X(p) = \frac{mp^2 x_0 + (m\dot{x}_0 + hx_0)p}{mp^2 + hp + k} - \\ \frac{k\alpha}{mp^2+hp+k} Z\left\{x^3\right\} + \frac{F(p)}{mp^2+hp+k}. \qquad (22)$$

Теперь после обратного преобразования получим интегральное уравнение с вырожденным ядром, содержащим экспоненты от собственных чисел линейной части исходного дифференциального уравнения. Нетрудно видеть, что если поделить обе части (20) на соответствующий полином 4-го порядка по P , то можно получить в интегральном уравнении ядра с желаемыми показателями экспонент [8,9].

Общее определяющее уравнение нелинейной вязко упругости, следуя идее Фреше, Вольтерра предложил записать в следующем виде

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J_1(t-\tau_1)d\sigma(\tau_1) + \\ +\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} J_2(t-\tau_1, t-\tau_2)d\sigma(\tau_1)d\sigma(\tau_2) + \ldots \qquad (23)$$

Эта идея была забыта на протяжении полувека, и лишь в 60-х годах ею стали пользоваться для интеграции опытных данных. Авторы удерживали в формальном ряде (23) лишь два члена и описывали поведение материала с помощью двух ядер $J_1(x)$ и $J_3(x,y,z)$, так называемая кубическая нелинейная теория вязко упругости. Если увеличивать число членов в разложении (23), расчётные трудности резко возрастают. Используют упрощенный вариант теории.

Нелинейная модель А. Н. Работнова:

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \kappa(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau. \qquad (24)$$

Уравнение (2) является частным случаем уравнения (24). Справедлива гипотеза: изохронные кривые $\sigma - \varepsilon$, t подобны. Пусть все функции ползучести в (23) имеют одну структуру, т. е.

$$J_k(t-\tau_1, \ldots, t-\tau_k) = a_k \prod_{m=1}^{k} J_0(t-\tau_m).$$

Положим теперь

$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} J_0(t-\tau)d\sigma(\tau) = (1+K)\sigma$$

где K - оператор, тогда имеем формальный ряд, который определяет ε как функцию S .

Предположив возможности ее обращения, запишем

$$S = \varphi(\varepsilon)$$

или

$$\varphi[\varepsilon(t)] = (1+K)\sigma = \sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \kappa(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \kappa(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right]^k$$

В случае подобия кривых ползучести, уравнения нелинейной последовательности могут быть представлены в форме Лидермана-Розовского [10,11]

$$\varepsilon(t) = \phi(\sigma) + \int_0^t \kappa(t-\tau)F[\sigma(\tau)]d\tau.$$

Вариант нелинейной теории, учитывающий зависимость механических характеристик от величины гидростатического давления.

Эти зависимости не учитываются классическими моделями, в которых разделяются соотношения между девятерными величинами и соотношения между первыми инвариантами напряжений и деформаций.

Модель В. В. Москвитина:

$$\phi_1(\varepsilon_u, \theta)e_{ij} = f_1(\sigma_u, \sigma)S_{ij} + \\ +\int_0^t \kappa(t-\tau) f_1(\sigma_u, \sigma)S_{ij}d\tau \qquad (25) \\ \phi_2(\theta, \varepsilon_u)K_0\theta = f_2(\sigma, \sigma_u)\sigma + \\ +\int_0^t \kappa_1(t-\tau) f_2(\sigma, \sigma_u)\sigma(\tau)d\tau.$$

Здесь σ_u - интенсивность напряжений; K_0 - объемный модуль

$$\sigma_u = \left(\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}\right)^{1/2}, \quad \sigma_u = \sqrt{3}T, \; \varepsilon_u = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}},$$

ε_u - интенсивность деформаций.

Если $r(t)$ и $r_1(t)$ - результат, соответствующий ядру ползучести $\kappa(t)$ и $\kappa_1(t)$, то из (4) получаем:

$$f_1(\sigma_u, \sigma)S_{ij} = \phi_1(\varepsilon_u, \theta)e_{ij} - \\ -\int_0^t r(t-\tau)\phi_1(\varepsilon_u, \theta)e_{ij}(\tau)d\tau.$$

Предполагается, что функции f_1, ϕ_1 и f_2, ϕ_2 являются универсальными, не зависящими от вида напряженного состояния. Эти функции и ядра определяют из опытов на ползучесть и релаксацию.

References:

1. Karamishkin, V.V. (1976). Perexod ot lineynogo differensial'nogo uravneniya s polinomial'nimi koeffisientami k integral'nomu uravneniyu pri pomoshi operasionnogo ischisleniya. *PMM*, t.12, vip.4, pp.553-554,
2. Timoshenko, S.P. (1959). *Kolebaniya v injenernom dele*. (p.372). Moscow: Fizmatgiz.
3. Skuchik, Ye. (1971). *Prostie i slojnie kolebatel'nie sistemi*. (p.297). Moscow: Mir.
4. Andreev, L.V., Dyshko, A.L., & Pavlenko, I.D. (1988). *Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses*. (p.200). Moscov. (In Russian).
5. Sivak, V.F., & Sivak, V.V. (2002). Experimental Investigation into the Vibrations of Shells of Revolution with Added. *International Applied Mechanics*, vol. 38, no.5, pp. 623-627. DOI: http://dx.doi.org/10.1023/A:1019770206949
6. Amabill, M. (2008). *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates.* (p.392). New York, USA, Cambridge university press.
7. Safarov, I.I, Akhmedov, M. Sh., & Boltaev, Z.I. (2014). Waveguide Propagation in Extended Plates of Variable Thickness. *Open Access Library Journal*, Vol.1, pp.2-9.
8. Safarov, I.I., Boltaev, Z.I., & Axmedov, M.Sh. (2015). Setting the Linear Oscillations of Structural Heterogeneity Viscoelastic Lamellar Systems with Point Relations. *Applied Mathematics*, Vol.6. pp. 228-234.
9. Safarov, I.I., Teshaev, M.Kh., & Madjidov, M. (2014). *Dempfirovanie kolebaniy mexanicheskix sistem.* (p.97). LAP LAMBERT Academik Publishing.
10. Koltunov, M.A. (1976). *Polzuchest' i relaksasiya*. (p.277). Moscow: Visshaya skola.
11. Safarov, I.I. (1992). *Kolebaniya i volni v dissipativno neodnorodnix sredax i konstruksiyax*. (p.252). Tashkent: Fan.