SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2022 Issue: 03 Volume: 107
Published: 26.03.2022 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Nilufar Okbaeva
Karshi State University
Senior Lecturer,
Karshi, Republic of Uzbekistan
oqboyeva@internet.ru

PASCAL'S TRIANGLE, ITS PLANAR AND SPATIAL GENERALIZATIONS

Abstract*: This article discusses historical information about the appearance of Pascal's triangle and binomial coefficients, and their new properties obtained by mathematicians in the last 40 years (forty years).*

Generalized Pascal triangles of the s-th order, Pascal's pyramid and hyperpyramids, as well as Fibonacci, Luke, Catalan triangles, etc. are studied. Generalized binomial coefficients of the s-th order, polynomial coefficients and other analogues of binomial coefficients are considered. [18]

Key words*: Pascal's triangles, binomial coefficients, generalized binomial coefficients of the s-th order, trinomial coefficients, polynomial coefficients.*

Language*: Russian*

Citation: Okbaeva, N. (2022). Pascal's triangle, its planar and spatial generalizations. *ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (107)*, 815-823.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-107-56 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.03.107.56

Scopus ASCC*: 2600.*

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ, ЕГО ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Аннотация*: В этой статье рассматривается исторические сведения о появлении треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов, и их новых свойства, полученные математиками в последние 40 летия (сороколетия).*

Изучаются обобщенные треугольники Паскаля s – го порядка, пирамида и гиперпирамиды Паскаля а также треугольники Фибоначчи, Люка, Каталана и др. Рассматриваются обобщенные биномиальные коэффициенты s – го порядка, полиномиальные коэффициенты и другие аналоги биномиальных коэффициентов. [18]

Ключевые слова*: Треугольника Паскаля, биномиальные коэффициенты, обобщенные биномиальные коэффициенты s – го порядка, триномиальные коэффициенты, полиномиальные коэффициенты.*

Введение

Развитие методов комбинаторного анализа в математике и их приложение к построению математических модулей и решению конкретных задач техники и естествознания вызвало большой интерес к изучению арифметических и геометрических свойств так называемых “арифметических треугольников”. Классическим примером таких треугольников является треугольник Паскаля. В последние пол веке расширился круг исследований как самого треугольника Паскаля, так и его плоски и пространственных аналогов и обобщений. [23]

Изучению треугольника Паскаля и других арифметических треугольников посвящено большое число научных и методических статей, и главным образом зарубежных математиков.

В монографии Б.А.Бондаренко так называемый “Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля их фрактали, графы и приложения” посвящена более глубоким вопросам связанным с изучением треугольника Паскаля, его плоских и пространственных аналогов. В ней рассмотрены проблемы делимости биномиальных, триномиальных, полиномиальных и других коэффициентов на простое P, их распределение по модулю P и P^s в соответствующих арифметических треугольниках, пирамиде и гиперпирамиде.

В монографии Бенуа Мандельброта описываются фрактали, полученные на основе треугольника Паскаля и других арифметических треугольников, а также результаты изучения свойств обобщенных арифметических графов, частными случаями которых являются графовые модели обобщенного треугольника Паскаля и там строятся и изучаются матрицы и детерминанты, составленные из биномиальных, обобщенных биномиальных, триномиальных коэффициентов и различных специальных чисел.[19]

Особое внимание уделяется разработке эффективных комбинаторных методов и алгоритмов построения и изучения базисных систем полиномиальных решений уравнений в частных производными.

Изучаются обобщенные треугольники Паскаля $s-$го порядка, пирамида и гиперпирамида Паскаля, а также треугольники Фибоначчи, Люка, Каталана и др. Рассматриваются обобщенные бигармонические коэффициенты $s-$го порядка, полиномиальные коэффициенты, гауссовы, Фибоначчиевы и других аналоги бигармонические коэффициентов.[21]

1.Треугольник Паскаля и его свойства

Одной из самых известных таблиц в истории математики является так называемый “арифметический треугольник” названный треугольником Паскаля в честь выдающегося французского математика и философа XVII в. Блеза Паскаля (1623-1662). Результаты своих исследований Паскаль изложил в трактате “Traite du triangle arithmetique” [1], опубликованном после смерти автора. Паскаль обобщил известные и привел много новых свойств треугольника, которые сформулированы в девятнадцати теоремах.

Различные свойства чисел, образующих арифметический треугольник, Паскаль выписал в общем виде, без алгебраической записи результатов.

С арифметическими и теоретико – вероятностными исследованиями Паскаля непосредственно связаны некоторые принципиально важные его открытия: метод полной математической индукции, применение арифметического треугольника к задачам теории вероятностей и др.[17]

Исследования треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов в связи с возникновением и развитием комбинаторного анализа связаны с именами Лейбница, Бернулли, Эйлера, Люка, Лежандра и других выдающихся математиков XVIII и XIX вв. **[20]**

Интерес к треугольнику Паскаля не ослабевает и в наши дни. Это связано с открытием новых и часто неожиданных свойств, относящихся к проблемам делимости и распределения его элементов по модулю p, построению и изучению фракталей и графов, а также с приложениями к различным практическим задачам.[23]

Мы знаем, что треугольник Паскаля часто выписывают в виде равнобедренного треугольника (рис.1)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
……………………………………………………………………………………

Рис.1

Строка с номером n состоит из коэффициентов разложения бинома $(1+x)^n$, которые в литературе обозначаются различно. Здесь будем обозначать их символам $\binom{n}{m}$, введенным ещё Эйлером вместо обозначения C_n^m, появившегося в XIX в.

2.Биномиальные коэффициенты и их обобщения

Как известно, элементами треугольника Паскаля являются биномиальные коэффициенты, которые были известны ещё до появления треугольника Паскаля. Однако первым их начал применять и дал определения Паскаль [1].

Биномиальные коэффициенты являются простейшими комбинаторными объектами, определяющими число различных сочетаний из- n элементов по m. Биномиальные коэффициенты можно получить путем разложения производящей функции, являющейся степенью бинома:

$$(1+x)^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m, \qquad (1.1)$$

Где $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $\quad n=0,1,\ 2,\ \ldots\ldots,$ $m\le n$.

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m},\ \binom{0}{0}=1. \qquad (1.2)$$

а также простейшим равенствам

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\quad \binom{n}{m}=\binom{n}{n-m},$$

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}=2^n,\quad \sum_{m=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{m}=0 \qquad (1.3)$$

$$\binom{n+m}{l}=\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k},$$

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2. \qquad (1.4)$$

В XX веке между биномиальными коэффициентами установлены новые соотношения. Приведем некоторые из них:

1. M.Boscarol [5], для неотрицательных целых n и m получил тождество

$$\sum_{l=0}^{m}\frac{\binom{n+i}{i}}{2^{n+1}}+\sum_{h=0}^{n}\left(\frac{n+m-h}{2^{n+m-h}}\right)=2$$

2. H.Scheid [16] показал, что число различных простых множителей в биномиальном коэффициенте $\binom{n}{m}$ больше $(m\log 2)/(\log 2m)$, если $2<2m\le n$.

Биномиальные коэффициенты, их тождества и различные соотношения играют важную роль при решении многих задач математики, механики и физики. Это послужило основанием для всевозможных обобщений биномиальных коэффициентов. Обобщенные биномиальные коэффициент и s-го порядка $\binom{n}{m}_s$, и полиномиальные коэффициенты $(n;n_1,n_2,n_3,..n_s)$, будут подробно исследовать дальше. Некоторые из обобщений рассмотрим здесь:

$$(a_1)=a_1;\ (a_1;a_2)=\binom{a_1}{a_2};\quad (a_1;\ a_2;\ a_3)=\left(\begin{matrix}\binom{a_1}{a_2}\\ a_3\end{matrix}\right)$$

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;...;\ a_n)=((a_1;\ a_2;\ a_3;...;a_{n-1});a_n).$$

Для итерированных биномиальных коэффициентов при конкретных значениях n и a_i, $i=1,2,..n$, устанавливаются различные тождества, неравенства, формулы преобразований, асимптотические и другие формулы и соотношения.

3. Гауссовы биномиальные коэффициенты, которые часто называют $q-$биномиальными коэффициентами, определяются так [2]:

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q=\prod_{k=1}^{m}\frac{q^{n-k+1}-1}{q^k-1},\quad 0<m\le n, \qquad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix}n\\o\end{bmatrix}_q=1,\quad \begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q=0,\quad m<0,\quad m>n \qquad (1.6)$$

Где n и $m-$неотрицательные целые числа, $q-$действительное число. Известно, что $q-$биномиальные коэффициенты входят в разложение.

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+q^{m-1}x\right)=\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}m(m-1)}x^m, \qquad (1.7)$$

из которого следует, что $q-$биномиальные коэффициенты представляют собой полиномы относительно q, a при $q\to 1$ обращаются в обычные биномиальные коэффициенты $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$ коэффициенты $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q$ удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$\begin{bmatrix}n+1\\m\end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}n\\m-1\end{bmatrix}_q q^{n-m+1},\ \begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}_q=1. \qquad (1.8)$$

В работе G. Polya, G. L. Alexanderson [6] изучаются различные комбинаторные интерпретации и свойства q-биномиальны коэффициентов, а также строятся и исследуются их многомерные аналоги.

M. Sved [7] описывает известные и новые свойства q-биномиальных коэффициентов, изучает их геометрический смысл, строит из q-биномиальных коэффициентов треугольные таблицы при значениях q = 2, 3, 4, 5, аналогичные треугольнику Паскаля.Формулы (1.5) — (1.8), суммирования и другие соотношения для g-биномиальных коэффициентов сопоставляются с аналогичными формулами и соотношениями для биномиальных коэффициентов. [22]

L. Carlitz [8] обобщает некоторые теоремы, относящиеся к q-биномиальным коэффициентам на многомерный случай. В работах

R. D. Fray [9], F. T. Howard [10] рассматриваются проблемы делимости q-биномиальных коэффициентов на простые делители.Подробнее об этом будет сказано во второй главе.

Другим обобщением биномиальных коэффициентов является введение так называемых фибономиальных коэффициентов [3]

$$\left(\binom{n}{m}\right)_F = \frac{F_n F_{n-1} \cdot \ldots \cdot F_{n-k+1}}{F_m F_{m-1} \cdot \ldots \cdot F_1}, \quad (1.9)$$

где F_k — последовательность чисел Фибоначчи [4]; *n, k* -неотрицательные целые числа, причем

$$\left(\binom{n}{0}\right)_P = \left(\binom{n}{n}\right)_F = 1$$

для всех n = 0, 1, 2.......

В работе G.Polya, G. L. Alexanderson, L. F. Klosinski [3] изучаются гауссовы фибономиальные коэффициенты

$$\left[\binom{n}{k}\right] = \frac{(x^{F_n}-1)(x^{F_{n-1}}-1)\cdot\ldots\cdot(x^{F_{n-k+1}}-1)}{(x^{F_k}-1)(x^{F_{k-1}}-1)\cdot\ldots\cdot(x^{F_1}-1)}, \quad (1{,}10)$$

где *n, k* - неотрицательные целые числа, причем

$$\left[\begin{vmatrix} n \\ 0 \end{vmatrix}\right]_F = \left[\begin{vmatrix} n \\ n \end{vmatrix}\right]_F = 1$$

для всех n = 0, 1, 2.......

3. Обобщенные треугольники Паскаля и обобщенные биномиальные коэффициенты

Обобщенными треугольниками Паскаля S-го порядка называются треугольные таблицы, составленные из коэффициентов разложения по степеням x выражения

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^{s-1}\right)^n = \sum_{m=0}^{(s-1)n} \binom{n}{m}_s x^m, \; s \geq 2. \quad (3.1)$$

Коэффициенты $\binom{n}{m}_s$ назовем обобщенными биномиальными коэффициентами S-го порядка.

При $s=2$ они обращаются в обычные биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}_2 = \binom{n}{m}$, а соответствующая треугольная таблица в треугольник Паскаля. Обобщенные треугольники Паскаля иногда называют S – арифметическими треугольниками.

Обобщенные треугольники Паскаля s-го порядка могут быт выписаны, как и треугольник Паскаля, в форме равнобедренных или прямоугольных треугольников. Приведем обобщенные треугольники Паскаля 3-го и 4-го порядков в форме прямоугольных треугольников.

Имеем

В первом треугольнике (s = 3) каждый элемент равен сумме

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

. . . .

1

1 1 1 1

1 2 3 4 3 2 1

1 3 6 10 12 12 10 6 3 1

1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1

. . . .

Рис.2

Трех чисел предыдущей строки: числа, стоящего над ним, и двух соседних слева. В нулевом столбце все елементы равны единица причем недостающие элементы слева полагаем равными нулю. Аналогично вычисляются элементы второго треугольника (s = 4), каждый элемент которого равен сумме четырех чисел предыдущей строки: числа, стоящего над ним, и трех соседних слева. Так же заполняются строки обобщенного треугольника Паскаля любого порядка.

При рассмотрении многих задач обобщенные треугольники Паскаля удобнее выписывать в форме равнобедренных треугольников (рис. 2). Обобщенным треугольникам Паскаля и обобщенным биномиальным коэффициентам s-го порядка посвящено несколько десятков работ, в которых изучаются основные свойства треугольников и даются приложения. Библиографию приведем после изложения основных свойств обобщенных биномиальных коэффициентов s-го порядка.

В треугольники $(s=3)$ каждый элемент равен сумме трёх чисел предыдущей строки: числа, стоящего над ним, и двух соседних слева в нулевом столбце все элементы равны единица, причем недостающие элементы слева полагаем равными нулю. Аналогично вычисляются элементы второго треугольника $(s=4)$, каждый элемент которого равен сумме четырех чисел предыдущей строки: числа, стоящего над ним и трех соседних слева. Также заполняются строки обобщенного треугольника Паскаля любого порядка.

Обобщенный биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}_s$ – это число различных способов, при которых m неодинаковых предметов могут быть размещены в n ячейках, причем в каждой ячейке содержится не более $(s-1)$ предмета.

Прежде всего выпишем рекуррентное соотношение для обобщенных биномиальных коэффициентов

$$\binom{n+1}{m}_s = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{m-k}_s ; \quad \binom{n}{0}_s = 1 \qquad (3.2)$$

При $s=2$ оно совпадает с рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов (1.2).

Обобщенные биномиальные коэффициенты удовлетворяют многим равенствам, тождествам и другим соотношениям, аналогичным соотношениям для биномиальных коэффициентов, например,

$$\binom{n}{0}_s = \binom{n}{n}_s = 1, \binom{n}{m}_s = \binom{n}{(s-1)n-m}; \sum_{m=0}^{(s-1)n} \binom{n}{m}_s = s^n, \sum_{m=0}^{(s-1)n} (-1)^m \binom{n}{m}_s = \begin{cases} 0, s=2l \\ 1, s=2t+1 \end{cases} \qquad (3.3)$$

Рекуррентное соотношение между обобщенными биномиальными коэффициентами по S имеет вид

$$\binom{n}{m}_{s+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m-k}_s ; \qquad (3.4)$$

где $s \geq 2$, $\binom{k}{m-k}_s = 0$, при $k < \frac{m}{s}$.

Обобщенные биномиальные коэффициенты s-го порядка можно выразить через биномиальные коэффициенты по формуле

$$\binom{n}{m}_s = \sum_{k=0}^{[m/s]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+m-sk-1}{n-1} \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что справедлива формула

$$\binom{n}{m}_s = \sum (\mathrm{n}; m_1, m_2, ..., m_{s-1}) \quad (3.6)$$

где $n \ge 0, \quad 0 \le m \le (s-1)n, \quad s \ge 3$ суммирование ведется по всем m_k при условии, что $m_1 + m_2 + ... + m_{s-1} = m, \quad m_k \le m_{k-1}$.

Обозначая через $N_{n,s}$ число обобщенных биномиальных коэффициентов s-го порядка, стоящих в *n*-й строке, а через $Q_{n,s}$ число коэффициентов, находящихся в обобщенном треугольнике. Паскаля s-го порядка, основанием которого служит строка с номером *n,* после элементарных подсчетов находим

$$N_{n,s} = n(s-1)+1, \mathrm{Q}_{n,s} = \frac{1}{2}(\mathrm{n}+1)\left[(s-1)n+2\right]. \quad (3,7)$$

При s=2, $N_{n,2} = n+1$

$$Q_{n,2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Введем для полиномиальных коэффициентов обозначение

$$(\mathrm{n}; m_1, m_2, ..., m_{s-1}) = \frac{n!}{(n-m_1)!(m_1-m_2)!...(m_{s-1}-m_{s-2})!m_{s-1}!}$$

Обобщенные биномиальные коэффициенты обладают и другими интересными свойствами.

4.Пирамида Паскаля и триномиальные коэффициенты

Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$ получаются в результате разложения бинома $(1+x)^n$ и выписываются в виде треугольника Паскаля в той или иной форме. И пользуя две переменные x_0 и x_1, это разложение можно записать в виде.

$$(x_0+x_1)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_0^{\,n-m} x_1^m. \quad (4.1)$$

Обозначая триномиальные коэффициенты через $(n; m_1, m_2)$ – где n, m_1, m_2 – неотрицательные целые числа, и полагая

$$(n; m_1, m_2) = \frac{n!}{(n-m_1)!\cdot(m_1-m_2)!\cdot m_2!}, \quad (4.2)$$

записываем разложение трехчлена $(x_0+x_1+x_2)^n$ в форме

$$(x_0+x_1+x_2)^n = \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{m_1} (n; m_1, m_2)\, x_0^{\,n-m_1}\, x_1^{\,m_1-m_2} x_2^{\,2}. \quad (4.3)$$

Обычно триномиальные коэффициенты записывают в виде

$$(n; n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n!n_2!n_3!}, \; n_1 + +n_2 + n_3 = n. \quad (4.4)$$

Аналогично биномиальным триномиальные коэффициенты $(n; m_1, m_2)$ удовлетворяют условиям $(n;0,0) = (n;n;0) = (n;n,n) = 1$ и равенствам.

$$(n; m_1, m_2) = (n; m_1, m_1 - m_2),$$
$$(n; m_1, m_2) = (n; n - m_1 + m_2, m_2) \quad (4.5)$$
$$(n; m_1, m_2) = (n; n - m_2, n - m_1)$$

утверждающим наличие трех осей симметрии. Выпишем формулы суммирования

$$\sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{m_1} (n; m_1, m_2) = 3^n,$$

$$\sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{m_1} (-1)^{m_2} (n; m_1, m_2) = 1 \quad (4.6)$$

а также трехмерный аналог формулы суммирования Коши для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{k_1} (n_1; k_1, k_2)$$

$(n_2; m_1 - k_1, m_2 - k_2) = (n_1 + n_2; m_1, m_2),$

(**4.7**) где, как указано выше, $(n; m_1, m_2) = 0$ при $m_1 < 0, \quad m_2 < 0$.

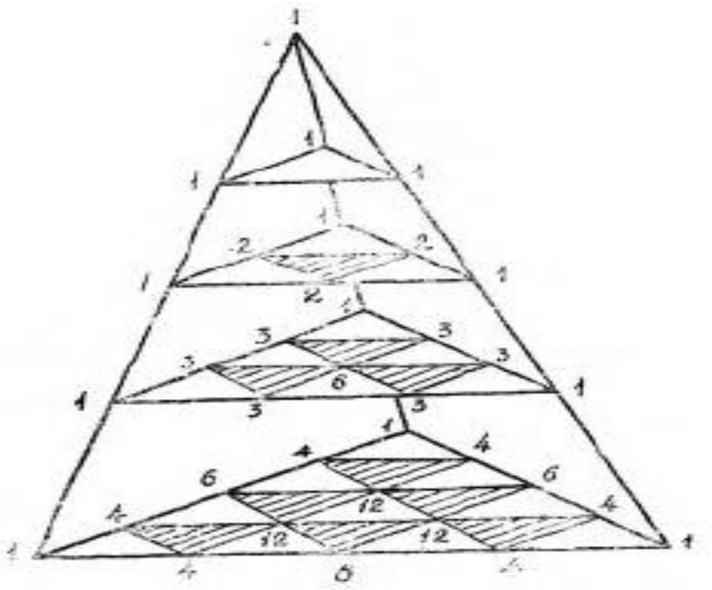

Рис.3

5.Полиномиальные коэффициенты и гиперпирамиды Паскаля

Как известно, полиномиальными коэффициентами, которые часто называют мультиномиальными, являются коэффициенты разложения многочлена $\left(x_0+x_1+...+x_{s-1}\right)^n$. Их обычно обозначают символом $\left(n;n_1,n_2,...,n_s\right)$ или $\left(n_1,n_2,...,n_s\right)$.

Явное выражение полиномиальных коэффициентов имеет вид

$$\left(n;n_1,n_2,...,n_s\right)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_s!}, \qquad (5.1)$$

$$n_1+n_2+n_3+...+n_s=n. \qquad (5.2)$$

Комбинаторный смысл полиномиальных коэффициентов можно выразить так; полиномиальный коэффициент $\left(n;n_1,n_2,...,n_s\right)$ равен числу способов размещения n различных предметов в s ящиках $A_1,A_2,...,A_s$ так, что число предметов в k-m ящике равно n_k, где $k=1,2,...,s.$

Полиномиальные коэффициенты будем обозначать символам $\left(n;m_1,m_2,...,m_{s-1}\right)$, определяя их равенством

$$\left(n;m_1,m_2,...,m_{s-1}\right)=\left(\frac{n!}{\left(n-m_1\right)!\left(m_1-m_2\right)!...\left(m_{s-2}-m_{s-1}\right)!m_{s-1}!}\right) \qquad (5.3)$$

При таком определении автоматически (5.3) выполняется условие (5.2), упорядочивается разложение

$$H_s\left(x,n\right)\equiv\left(x_0+x_1+...+x_{s-1}\right)^n=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{m_1}...\sum_{m_{s-1}=0}^{m_{s-2}}\left(n;m_1,m_2...,m_{s-1}\right)\cdot x_0^{n-m_1}x_1^{m_1-m_2}...x_{s-2}^{m_{s-2}-m_{s-1}}\cdot x_{s-1}^{m_{s-1}}, \qquad (5.4)$$

причем применение (5.3) и (5.4) упорядочивает построение гиперпирамиды Паскаля из полиномиальных коэффициентов, системы полигармонических и других полиномов, а также соотношения между самими полиномиальными коэффициентами.

Полиномиальная теорема разложения по формуле (5.4) известна литературы по комбинаторному анализу, алгебре, статистике и теории чисел. [11,12,13,14,15]

Приведем основные формулы для полиномиальных коэффициентов, записанных в виде (5.3), а затем остановимся на обзоре работ, посвященных полиномиальным коэффициентам, полиномиальной теореме и связанным с ними вопросам.

Опуская доказательства, приведем основные формулы и соотношения. Рекуррентное соотношение имеет вид

$$(n+1;\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2,\mathrm{m}_3...,m_{s-1})=(n;m_1,m_2,m_3,...,m_{s-1})+(n;m_1-1,\mathrm{m}_2,m_3,...,m_{s-1})+$$
$$(n;m_1-1,m_2-1,m_3,...m_{s-1})+...+(\mathrm{n};\mathrm{m}_1-1,m_2-1,m_3-1,...,\mathrm{m}_{s-2}-1,m_{s-1})+ \quad (5.5)$$
$$(n;m_1-1,m_2-1,...,m_{s-2}-1,m_{s-1}-1)$$

с начальным условием (0; 0, 0,..., 0) = 1. Коэффициенты $\left(n;m_1,m_2,...,m_{s-1}\right)$ равны нулю, если n < 0 или m_k < 0 хотя бы при одном из значений k = 1, 2, ... , s -1, $m_1>n, m_k>m_{k-1}$.

Полиномиальные коэффициенты $(n;m_1,m_2,....,m_s)$ удовлетворяют условиям

$$(n;0,0,...,0)=(\mathrm{n};\mathrm{n},0,0,...,0)=(n;n,n,0,0,...,0)=...=(\mathrm{n};\mathrm{n},\mathrm{n},...,\mathrm{n})=1$$

и s равенствам, аналогичным (**4,5**), первое и последнее из которых имеют вид

$$\left.\begin{array}{l}(n;m_1,m_2,...,m_{s-1})=(n;m_1,m_2,...,m_{s-2},m_{s-2}-m_{s-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (\mathrm{n};\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2,...,\mathrm{m}_{s-1})=(n;n-m_{s-1},n-m_{s-2},...,n-m_2,n-m_1).\end{array}\right\} \quad (5.6)$$

Нетрудно выписать и другие s-2 равенства.

Выпишем также формулы суммирования

$$\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{m_1}...\sum_{m_{s-1}=0}^{m_{s-2}}(n;m_1,m_2,...,m_{s-1})=\mathrm{s}^n \quad (5.7)$$

$$\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{m_1}...\sum_{m_{s-1}=0}^{m_{s-2}}\delta(m_1,...,m_{s-1})(n;m_1,m_2,...,m_{s-1})=\begin{cases}0, s=2l,\\ 1, \mathrm{s}=2l+l,\end{cases} \quad (5.8)$$

где $\delta\left(m_1,m_2,...,m_{s-1}\right)=\left(-1\right)^{m_1-m_2+m_3-m_4+...+(-1)^s m_{s-1}}$.

Равенство (**5.7**) получаем на основе (**5.4**), полагая в $H_s(x,n)$ $x_0=x_1=...=x_{s-1}=1,$ а формулу (5.8) — при $x_0=x_1=...=x_{1(s)}=1,$ и $x_1=x_3=...=x_{l(s)+1}=-1,$ где

$$r(s)=2\left[\frac{s-1}{2}\right].$$

Многомерный аналог формулы суммирования Коши для полиномиальных коэффициентов имеет вид

$$\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{k_1}...\sum_{k_{s-1}=0}^{k_{s-2}}(n_1;\mathrm{k}_1,k_2,\mathrm{k}_3,...,\mathrm{k}_{s-1})(\mathrm{n}_2;m_1-k_1,m_2-k_2,...,\mathrm{m}_{s-1}-k_{s-1})=$$
$$(\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2,\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2,...,\mathrm{m}_{s-1}),$$

где $(\mathrm{n};\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2,...,\mathrm{m}_{s-1})=0,$ если хотя бы одно из m_k меньше нуля $(k=1,2,...,s-1).$ (**5.9**)

References:

1. Pascal, B. (n.d.). Traite du triangle arithmetique aves quelques autres petits traitez sur la mesme matiere. *Oeuvres completes de Blaise Pascal*. T. 3.190, pp. 433-593.
2. (1979). *Spravochnik po special`nym funkcijam*/Pod red. M. Abramovica i I. Stigan. (p.830). Moscow: Nauka.
3. Alexanderson, G. L., & Klosinski, L. F. (1974). Fibonacci analogue of Gaussian binomial coefficients. *Fibonacci Quart.* Vol. 12. N 2, pp. 129-132.
4. Vorob`ev, N. N. (1984). *Chisla Fibonachchi*. (p.144). Moscow: Nauka.
5. Boscarol, M. (1982). A property of binomial coefficients. *Fibonaccal Quart*., Vol. 20. N 3, pp.249-251.
6. Polya, G., & A1exanderson, G. L. (1971). Gaussian binomial coefificients. *Elem.Math.* Vol. 26. N 5, pp.102-109.
7. Sved, M. (1984). Gaussians and binomials. *Ars Gombinatoria*, Vol. 17A, pp.325-351.
8. Carlitz, L. (1963). A basic analog of the multinomial theorem. *Scripta Math*. Vol. 26, pp. 317-321.
9. Fray, R. D. (1967). Congruence properties of ordinary and q-binomial coefficients Duke *Math. J.* Vol. 34, pp.467-480.
10. Howard, F. T. (1973). Prime divisor of q-binomial coefficients. *Rend. SemMat. Univ. Padova.* Vol. 48, pp.181-188.
11. Galochkin, A. I., Nesterenko, Jy V., & Shidlovskij, A. B. (1984). *Vvedenie v teoriu chisel*. (1512). Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta..
12. Gorbatov, V. A. (1986). *Osnovy diskretnoj matematiki*. (p.311). Moscow: Vysshaja shkol`.
13. Ezhov, I. I., Skorohodov, A. V., & Jadrenko, M. I. (1977). *Jelementy kombinatoriki.* (p.80). Moscow: Nauka.
14. Postnikov, A. G. (1971). *Vvedenie v analiticheskuu teoriu chisel.* (p.416). Moscow: Nauka.
15. Sominskij, I. S. (1964). *Jelementarnaja algebra. Dopolnitel`nyj kurs.* (p.200). Moscow:Nauka.
16. Scheid, H. (1969). Die Anzahl der Primfaktoren in $\binom{n}{k}$. *Arch. Math. (Basel)*. T. 20, pp.581-582.
17. Okbayeva, N. (2021). Innovative approach to solving combinatic elements and some problems of newton binomy in school mathematics course. *Central Asian Problems of Modern Science and Education*, 2021(1), 67-76.
18. Okboeva, N. U. (2019). *O reshenii uravnenij temperaturno-stratificirovannyh techenij rekurrentno operatornym metodom. In Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie.* (ITMM-2019) (pp. 295-300).
19. Okboeva, N. U., & Tuhtaev, Je. Je. (2019). *O primenenii matrichnogo analiza k resheniu jekonomicheskih zadach vosproizvodstva. In Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie* (ITMM-2019) (pp. 301-304).
20. Babazhanov, Jy., Okbaeva, N., & Babazhanova, I. (2019). *Metod opredelenija kojefficienta jeffektivnosti gazoprovoda*. In Aktual`nye problemy matematiki i informatiki: teorija, metodika, praktika (pp. 58-59).
21. Okboeva, N. (2018). *Uravnenie laplasa i garmonicheskie funkcii*. In Fundamental`nye nauchnye issledovanija. (pp. 63-66).
22. Urakovna, O. N. (2022). Modeling mathematical competence bachelor-future mathematics teacher. *Academicia Globe: Inderscience Research*, 3(02), 197-203.
23. Abdiraxmonov, A., & Khurramov, O. (2022). Forming the professional skills of undergraduate mathematicians. *Web of Scientist: International Scientific Research Journal*, 3(02), 920-925.