SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2022 Issue: 03 Volume: 107
Published: 01.03.2022 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Nurillo Raximovich Kulmuratov
Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
docent, Uzbekistan
nurillo.Kulmuratov.64@mail.ru

Bobir Xudoyberdievich Eshpulatov
Navoi State Pedagogical Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
Navoi, Uzbekistan

PROPAGATION OF WAVES IN A LAYER OF DEFORMABLE MEDIA

Abstract: *This article discusses the propagation of free waves in flat bodies. In the calculation, the materials of the layers are assumed to be elastic (or viscoelastic). We will consider the passage of waves harmonic in time along a layered medium. Solving this problem, we obtain the relationship between the wave speed and its length. It is established that at L/λ=0.5 the first modes of the phase velocity increase monotonically depending on L/λ.*

Key words: *viscoelastic layer, free wave, plane body, wave, phase velocity, three-layer body, mathematical methods.*
Language: *Russian*
Citation: Kulmuratov, N. R., & Eshpulatov, B. X. (2022). Propagation of waves in a layer of deformable media. *ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (107),* 1-6.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-107-1 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.03.107.1
Scopus ASCC: *2200.*

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОЕ НАХОДЯЩИХСЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ

Аннотация: *В этой статье рассматривается распространение свободных волн в плоских телах. При расчете материалы слоев предполагаются упругими (или вязкоупругими). Будем рассматривать прохождения гармонических во времени волн вдоль слоистую среду. Решая эту задачу, получим зависимость между скоростью волны и ее длиной. Установлено, что при L/λ=0.5 первые моды фазовой скорости в зависимости от L/λ монотонно возрастает.*

Ключевые слова: *вязкоупругий слой, свободная волна, плоская тела, волна, фазовая скорость, трехслойная тела, математические методы.*

Введение

Проблемы распространения волн в сплошных многослойных системах привлекают внимание многочисленных исследователей в нашей стране и за рубежом [1,2]. Это обусловлено тем, что во многих областях науки и техники все чаще приходится сталкиваться с необходимостью расчета полей напряжений и деформаций, возникающих в слоистых телах с разными реологическими свойствами при воздействии различного рода динамических нагрузок. Динамические задачи диссипативных (вязкоупругих) динамических систем решаются методами математической физики. Сложность их решения объясняется многими причинами, например, реологическими свойствами реальных сред (анизотропия, вязкость, ползучесть, пластичность, неоднородности и т. п.), что обусловливает большое разнообразие схематизированных моделей для описания в том или ином приближении реальных явлений и не позволяет создать единую математическую модель механической системы [3,4]. Несмотря на большое число математических моделей механической системы, математические методы решения задач разработаны, главным образом, для таких систем, как акустические, упругие движения которых описываются линейными дифференциальными уравнениями [5,6]. В [7,8] предпринята, попытка определить и оптимизировать диссипативные характеристики, а также напряженно-деформированное состояние механических систем. В данном параграфе рассматривается задача распространения волн напряжения в трехслойной полосе (рис.1). Данная задача относится к проблемам распространения волн напряжения в слоистой среде, часто встречается в научных [9,10,11,12], публикациях по этим вопросам вследствие их большого значения в геофизике и строительстве. Однако детально разработаны вплоть до численных результатов только те задачи, которые приводят к реальному решению. Комплексными решениями, получение которых достаточно сложно, до сих пор пренебрегали, как не имеющими большого значения.

2. Постановка задачи и методики решения

Рассмотрим деформируемый (упругий или вязкоупругий) трехслойной полосе толщиной h, со свободными поверхностями и пусть в нем распространяется гармоническая волна с фазовой скоростью C (рис.1).

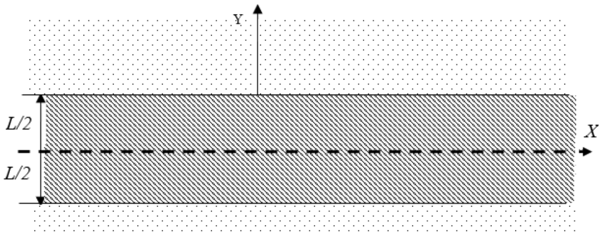

Рис. 1. Расчетная схема.

Ниже мы рассмотрим плоскую задачу, где перемещения не зависят от координаты Z. Математически эта задача формулируется следующим образом:

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y};$$

$$\rho_j \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial x}, \qquad (1)$$

где ρ_j – плотность материала; u_j и ϑ_j соответственно, перемещения по направлениям x и y; (j=1,2,3), j – номер слоя. Теперь рассмотрим решение дифференциального уравнения (1) для одного слоя. Тогда вместо $\sigma_{xx}^{(j)}$, $\sigma_{yy}^{(j)}$, и $\sigma_{xy}^{(j)}$ подставляем следующие выражения:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_j}{\partial x};$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = \mu_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{yy}^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y}. \qquad (2)$$

где $\theta_j = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x}$ - объемное расширение. Подставляя (2) в (1), решение уравнения (1) принимает вид:

$$u_j = U_j(y)\, e^{i(\omega t - \gamma x)};$$

$$\vartheta_j = V_j(y)\, e^{i(\omega t - \gamma x)},$$

ω – круговая частота, ω=2πn, n – частота колебаний; λ=2π/γ - длина волны. Подставим (2) в (1), тогда получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения в виде:

$$L_j \frac{dV_i}{dy} - L_{2j} U_j - G_j \frac{d^2 U_j}{dy^2} = 0;$$

$$L_j \frac{dU_j}{dy} - L_{3j} V_j - L_{4j} \frac{d^2 V_j}{dy^2} = 0; \qquad (3)$$

где

$$L_{1j} = \left(\frac{E_j \nu_j}{1-\nu^2_j} + G_j\right) i\gamma; \; L_{2j} = \rho_j \omega^2 - \frac{E_j}{1-\nu_j^2}\gamma^2;$$

$$L_{3j} = \rho_j \omega^2 - G_j \gamma^2; \; L_{4j} = \frac{E_j}{1-\nu_j^2}.$$

После введения вспомогательной функции Φ_j (y) отношениями

$$U_j = L_{Ij} \frac{d}{dy}\Phi_{j;}; \; V_j = \left[L_{2j} + G_j \frac{d}{dy^2}\right]\Phi_j,$$

получим из (3) дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 \Phi_j}{dy^4} + L_{5j} \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} + L_{6j} \Phi_j = 0, \qquad (4)$$

где

$$L_{5j} = -2\gamma^2 + \frac{(3-\nu_j)\omega^2}{2c_{sj}^2};$$

$$L_{6j} = \gamma^2 - \frac{(3-\nu_j)\omega^2\gamma^2}{2c_{sj}^2} + \frac{\omega^4}{c_{pj}^2 c_{sj}^2};$$

В случае вязкоупругого материала E_j заменяется (4) комплексными величинами, тогда $C_{pj} = C_{pRj} + i\, C_{pIj}$; $C_{sj} = C_{sRj} + i\, C_{sIj}$; C_{pj}, C_{sj} - соответственно, скорости распространения продольных и поперечных волн;

C_{pRj} - скорости распространения продольных волн; C_{pIj} - скорости распространения поперечных волн; C_{sRj} - скорости затухания продольных волн, C_{sIj} - скорости затухания поперечных волн.

Решение уравнений (4) выражается через экспоненциальные функции

$$\Phi_j(y) = A_j e^{+\alpha_j y} + B_j e^{-\alpha_j y} + C_j e^{S_j y} + D_j e^{-S_j y}, \qquad (5)$$

где $\alpha_j^2 = \gamma^2(1 - \frac{c^2}{c_{pj}^2}); S_j^2 = \gamma^2(1 - \frac{c^2}{c_{Sj}^2})$,

где A_j, B_j , C_j , D_j - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий. В случае

$(E_j(\omega)=E_j, \eta_j(\omega)=0)$ $\frac{c^2}{c_{pj}^2} > 1$и$\frac{c^2}{c_{s\kappa j}^2} > 1$, тогда

решение (5) выражается через тригонометрические функции. С помощью уравнений (3) выражаются смещения. Решение уравнения для первого и второго слоя записывается следующим образом

$$u_j = i\gamma[A_j q_j\, exp(q_j y) - B_j q_j\, exp(-q_i y) + \\ +C_j S_j\, exp(S_j y) - D_j S_j\, exp(-S_j y)]e^{i(wt-\gamma x)},$$

$$\vartheta_j = [-A_j q_j\, exp(q\ _j y) - B_j q_j\, exp(q_j y) - \\ -C_j\gamma^2\, exp(S_j y) - D_j\gamma^2\, cos(-S_j y)]e^{i(wt-\gamma x)}. \quad (6)$$

Решение (6) –для полупространства записывается в виде:

$$u_2 = i\gamma(A_3 q_3\, sin(q_3 y) - B_3.q_3\, cos(q_3 y) + \\ +C_3.S_3 e^{S_3 y} - D_3.S_3 e^{-S_3 y})e^{i.(wt-\gamma x)};$$

$$\upsilon_2 = [A_3 q_3^2 e^{q_3 y} - B_3.q_3{}^{-q_3 y}- \\ -C_3\gamma^2 e^{S_3 y} - D_3\gamma e^{-s_3 y}]e^{i.(wt-\gamma x)}, \quad (7)$$

где

$$q_j = \gamma\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{pj}^2}};\ s_j = \gamma\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{sj}^2}};$$

$c_{pj}^2 = (\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j$; $c_{sj}^2 = \mu_j/\rho_j$; i = 1,2,3

ω - круговая частота; Aj, B_j, C_j, D_j - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий. Решения (7) должны удовлетворять условию экспоненциального затухания по координате y ($y \to \infty$). Тогда решение (7) для $y \geq L/2$ и $y \leq -L/2$ принимает вид:

$$u_3 = (-B_3 i_3\gamma_3 q_3 e^{-q_3 y} - D_3.i\gamma S_3 e^{-q_3 y})e^{i.(wt-\gamma x)}$$

$$\vartheta_3 = (B_3 i\gamma q_3^2 e^{-q_3 y} - D_3 i\gamma^2 e^{-q_3 y})e^{i.(wt-\gamma x)}. \quad (8)$$

В симметричном движении слоя решение при $-L/2 \leq y \leq L/2$ записывается в виде

$$u_1 = (A_1.i.\gamma_1.q_1\, cos\, x\,(q_2 y) + C_2\cdot i\cdot\gamma \\ \cdot S_2\, cos\, x\,(S_2 y))e^{i(\omega t-\gamma x)},$$

$$\vartheta_2 = (-A_1.q_2^2\cdot sin\, x\,(q_2 y) - C_2\ \cdot \\ \gamma^2\, sin\, x\,(S_2 y))e^{i(\omega t-\gamma x)}, \quad (9)$$

На контакте $y = \pm L/2$ выполняются условия равенства перемещений и напряжений

$$\left(u_1^{(1)}\right)_{y=L/2} = \left(u_1^{(2)}\right)_{y=L/2};$$
$$\left(u_1^{(2)}\right)_{y=L/2} = \left(u_1^{(3)}\right)_{y=-L/2};$$
$$\left(\vartheta_1^{(1)}\right)_{y=L/2} = \left(\vartheta_1^{(2)}\right)_{y=L/2};$$
$$\left(\upsilon_1^{(2)}\right)_{y=-L/2} = \left(\upsilon_1^{(3)}\right)_{y=-L/2};$$
$$\left(\sigma_{yy}^{(1)}\right)_{y=L/2} = \left(\sigma_{yy}^{(1)}\right)_{y=L/2};$$
$$\left(\sigma_{yy}^{(2)}\right)_{y=-L/2} = \left(\sigma_{yy}^{(3)}\right)_{y=-L/2};$$
$$\left(\sigma_{xy}^{(1)}\right)_{y=L/2} = \left(\sigma_{xy}^{(1)}\right)_{y=L/2};$$
$$\left(\sigma_{xy}^{(2)}\right)_{y=-L/2} = \left(\sigma_{xy}^{(3)}\right)_{y=-L/2}. \quad (10)$$

На свободной поверхности $y = l + L/2$ ставится условие свободы от напряжений

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \quad (11)$$

Для определения произвольных постоянных A_j, B_j, C_j, D_j (j=1,2,3) использования граничных усилий жесткого контакта (10) и (11) в результате получим 12 алгебраических уравнений 12 неизвестными в виде

$$[C]\{q\} = \{0\},$$

где [C] квадратная матрица (12x12), элементы которых выражается через тригонометрические и экспоненциальные функции. Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта.

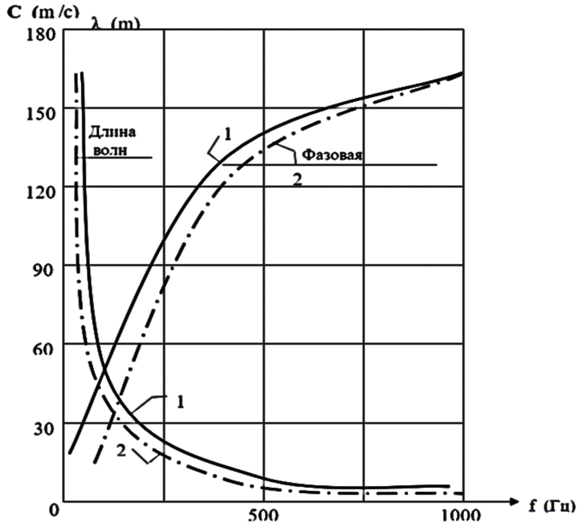

Рис.2 Кривая изменения фазовых скоростей изгибных волн напряжения С и длины волны λ в зависимости от частоты. 1-теоретическое результаты; 2-экспериментальные результаты. 3. В качестве тестовых задач приведем элементы дисперсионного уравнение для двух слой них тел со свободными поверхностными.

Рассмотрим следующие два случая: пусть c < c_2, тогда q_j и S_j являются действительными числами. Тогда частотное уравнение принимает следующий вид:

$$\left|\Delta(a_{ij})\right| = 0, \quad i = 1,2,....8; \quad j = 1,2......8; \quad (12)$$

где

$$a_{11} = q_2 \cos (q_2 L / 2),$$
$$a_{12} = s_1 \cos(s_1 L / 2),$$
$$a_{13} = q_1 e^{-q_2 L/2},$$
$$a_{14} = s_2 e^{-S_2 l/2},$$
$$a_{21} = -q_2^2 \sin (q_2 L/ 2),$$
$$a_{22} = -\gamma^2 \cos(s_1 L/2),$$
$$a_{41} = 2 \cdot q_1^2 \sin(q_1 L/2)$$
$$a_{42} = (s_1^2 + \gamma^2) \sin(s_1 L/2);$$
$$a_{43} = -\rho_1 \cdot E_{22}^2 \cdot (s_2^2 + \gamma^2) e^{-s_2 l/2},$$
$$a_{44} = -\rho_1 \cdot E_{22}^2 \cdot (s_2^2 + \gamma^2) e^{-s_2 l/2},$$
$$\rho_0 = \rho_2/\rho_1,$$
$$E_{11} = C_{p_2}/C_{p1},$$
$$E_{22} = C_{s_2}/C_{s1}.$$

Основной целью работы является исследование изменения фазовой скорости C_{RJ} зависимости от длины волны, геометрических и физико-механических параметров системы. В рассматриваемом случае, (если $E_1=E_2$; $\nu_1=\nu_2$; $\rho_1=\rho_2$, тогда слоя и среде работают как одно целое) $\gamma=\gamma_R$, где $\gamma_R=2\cdot\pi/\lambda$-действительная часть волнового числа; λ - длина волны; $C=\omega/\gamma_R$. Частотное уравнение (12) решается методом Мюллера.

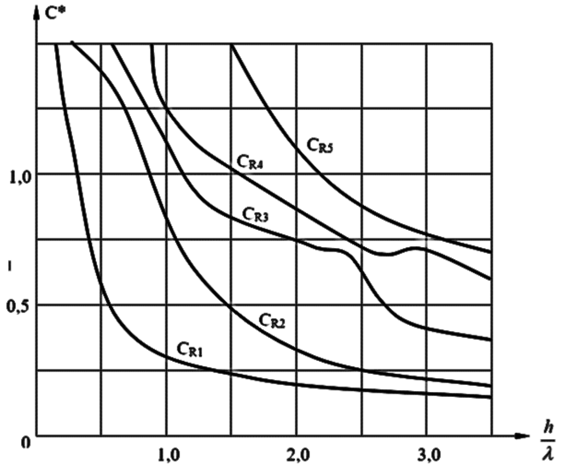

Рис. 3 Изменение фазовых скоростей (C^*_R) в зависимости от длины волн

Заметим, что предложенный алгоритм расчета корней уравнения (1) дает удовлетворительные результаты для малых и больших волновых числах. Численные результаты получены при следующих параметрах слоя и окружающей его среды:C_{p1}=2 300 м/с, C_{s1}=1300 м/с, ν_1=0,35, ρ_1=0,12 кг/м^3; C_{p2}=5400 м/с, C_{s2}=3100 м/с, ν_2=0,3, ρ_2=0,28 кг/м^3.

На рис 2. изображено сравнение теоретических (сплошная линия) и экспериментальных пунктирная линия результатов [10]. Из рисунка 2 видно, что при длинных волнах теоретические и экспериментальные результаты почти совпадают с ризницами 10-15%.

Исследовано изменение первые пяти фазовых скоростей от λ (длины волн), для значений параметров $(\alpha = 1)$. Результаты расчетов представлены на рис.2. Из рис. 3 видно, что коренное влияние соприкосновения тела с основанием проявляется в области низких частот, когда соотношения h/λ < 0,12.

Рис.3. 1-по работе [37], 2 –по предлагаемой методике.

l/λ		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	9,0
$(c/c_0)_1$	1	0,9934	0,951	0,793	0,679	0,620	0,573
	2	0,9927	0,9493	0,7871	0,6792	0,6199	0,5725
$(c/c_0)_2$	1	3,37	1,955	1,503	1,28	1,143	0,772
	2	3,3683	1,9473	1,4982	1,2793	1,1427	0,7716
$(c/c_0)_3$	1		3,152	1,677	1,423	1,155	0,808
	2		3,0965	1,6698	1,4177	1,1482	0,8121
$(c/c_0)_4$	1		4,043	2,706	2,169	1,805	1,155
	2		3,9922	2,6763	2,0781	1,7932	1,1472

Пусть c > c₂, тогда q_j и S_j являются комплексными числами. В этом случае корны частотное уравнение (12) станут мнимыми, т.е. свободное волны не существует.

Рассмотрим распространение свободных волн в полосе, находящейся в упругой безграничной среде (рис. 1). Тогда решение уравнения (1) с учетом (2) примет вид

$$U_2 = i\gamma(A_2 q_2 \cos q_2 y + B_2 q_2 Sin q_2 y + C_2 S_2 \cos S_2 y + D_2 S_2 Sin S_2 y)e^{i(\omega t-\gamma x)};$$

$$-L/2 \le y \le L/2$$

$$\vartheta_2 = \left(-A_q q_2^2 Sin q_2 y - B_2 q_2^2 Cos q_2 y - C_2\gamma^2 Sin S_2 y - -D_2\gamma^2 Cos S_2 y\right)e^{i(\omega t-\gamma x)}$$

$$U_1 = i\gamma(A_1 q_1 e^{q_1 y} + B_1 q_1 e^{-q_1 y} + C_1 S_1 e^{S_1 y} + +D_1 S_1 e^{-S_1 y})e^{i(\omega t-\gamma x)}, \quad -L/2 \le y \le L/2$$

$$\vartheta_1 = (-A_1 q_1^2 e^{q_1 y} - -B_1 q_1^2 e^{-q_1 y} - C_1\gamma^2 e^{S_1 y} - D_1\gamma^2 e^{S_1 y})e^{i(\omega t-\gamma x)}; \; y \ge L/2; \quad y \le -L/2.$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, Д_1, A_2, B_2, C_2, Д_2$ произвольные постоянные;

$$q_j = \gamma\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{pj}^2}}; \qquad s_j = \gamma\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{sj}^2}}; \qquad (\tau = 1,2)$$

Введены параметры $\rho_0 = \rho_1/\rho_2$; $\overline{C_p} = C_{p1}/C_{p2}$; $\overline{C_2} = C_{S1}/C_{S2}$.

Рассмотрим дисперсионное соотношение для симметричных волн. В этом случае перемещение среды при $y \ge L/2 u y \le -L/2$

$$U_1 = \left(-B_1 i\gamma q_1 e^{\mp q_1 y} - D_1 i\gamma s_1 e^{\mp s_1 y}\right)e^{i(\omega t-\gamma x)};$$

$$V_1 = \left(\mp B_1 q^2{}_1 e^{\mp q_1 y} \mp D_1\gamma^2 s_1 e^{\mp s_1 y}\right)e^{i(\omega t-\gamma x)}.$$

Перемещения слоя $-L/2 \le y \le L/2$ принимает следующий вид:

$$V_2 = (-A_2 q_2{}^2 \sin q_2 y - C_2\gamma^2 s_1 \sin s_2 y)e^{i(\omega t-\gamma x)};$$

$$U_2 = (A_2 i\gamma q_2 \cos q_2 y + C_2 i\gamma s_2 \cos s_2 y)e^{i(\omega t-\gamma x)}.$$

На границе контакте $y = \pm L/2$ выполняется условия равенство напряжений и перемещений

$$|a_{ij}| = 0; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4;$$

где

$$a_{11} = q_2 Cos\frac{q_2 L}{2};$$

$$a_{21} = -q_2^2 Sin\frac{q_2 L}{2};$$

$$a_{12} = S_2 Cos\frac{S_2 L}{2};$$

$$a_{13} = q_1 e^{-q_1\frac{L}{2}};$$

$$a_{14} = S_1 e^{-S_1\frac{L}{2}};$$

$$a_{22} = -\gamma^2 Sin\frac{S_2 L}{2}; \qquad a_{23} = -q_1^2 e^{-q_1\frac{L}{2}};$$

$$a_{24} = \gamma^2 e^{-\frac{S_1 L}{2}}; \; a_{32} = -S_2\gamma^2(1-\nu_2)Cos\frac{q_2 L}{2};$$

$$a_{33} = -\rho_0\overline{\varepsilon_p^2} q_1(q_1^2 - \nu_1\gamma^2)e^{-\frac{q_1 L}{2}};$$

$$a_{42} = (S_2^2 + \gamma^2)Sin\frac{S_2 L}{2};$$

$$a_{34} = -\rho_0\overline{C}_p S_1\gamma^2(1-\nu_1)e^{\frac{\rho_1 L}{2}};$$

$$a_{41} = 2q_2^2 Sin\frac{q_2 L}{2};$$

$$a_{43} = -2\rho_0\overline{C}_p q_1^2 e^{-\frac{q_1 L}{2}};$$

$$a_{44} = -\rho_0\overline{C_\rho}(S_1^2 + \gamma^2)e^{-\frac{S_2 L}{2}}.$$

В первом случае рассмотрим следующие соотношение параметров $\rho_0 > 1$; $\overline{C_p} > 1$. Результате расчетов получим при следующих значениях параметров C_{p2}=2300м/с C_{s2}=1311 м/с C_{p1}=5400м/с C_{s1}=3196 м/с;

$$\nu_2 = 0.35; \nu_1 = 0.3;$$

$$\rho_2 = 0{,}126\text{кг.}\,c^2/\text{м}^4,\; \rho_1 = 0{,}283\text{кг.}\,c^2/\text{м}^4.$$

Результаты расчетов на ЭВМ приведены на рис.2.4 при C<C_{s1}.

В этом случае безразмерные фазовые скорости χ = C/C_{p2} является действительными и χ =*f(C/*λ*)*. Численное результаты получены при различных значениях n. Из результатов видно, что с увеличением n фазовые скорости пропорционально увеличиваются. В дальнейшем $L/\lambda \to \infty$, фазовые скорости не изменяются, т.е. почти не изменяется в зависимости от длины волн.

Во втором случае рассмотрим следующее соотношение параметров $\rho_0 < 1$; $\overline{C_p} < 1$; $\overline{C_S} < 1$; *т.е.* C_{p2}*=5400 м/с;* C_{s2}*=3195м/с;* C_{p1}*=2300м/с;* C_{s1}*=1311м/с;* $\nu_2 = 0.3$; $\nu_1 = 0.35$; $\rho_2 = 0{,}283\text{кг.}\,\text{м}^{-4}/\text{сек}^2, \rho_1 = 0{,}126\text{кг.}\,\text{м}^{-4}/\text{сек}^2$ *или* $\rho_0 = 0{,}4452$; $\overline{C_p} = 0{,}4259$; $\overline{C_S} = 0{,}4203$.

Из полученых результатов вытекает, что фазовые скорости станут мнимыми.

В качестве тестовых задач рассмотрим распространение продольных волн в упругой полосе с свободными краями. При этом будем исходить из дифференциальных уравнений движения линейной теории упругости для плоской задачи в состоянии поверхностного напряжения. Выводится частотное уравнение для продольных синусоидальных волн в напряженной полосе стенки со свободными краями

$$\frac{tg\frac{Sl}{2}}{tg\frac{ql}{2}} = \frac{4\pi^2\frac{e^2}{\lambda^2}\frac{ql}{2}\cdot\frac{sl}{2}}{\left[\pi^2\frac{l^2}{\lambda^2}+(\frac{sl}{2})^2\right]^2},$$

где

$$\frac{sl}{2} = \pi\frac{l}{\lambda}\sqrt{1-\frac{c^2}{c_2^2}}; \quad \frac{ql}{2} = \pi\frac{l}{\lambda}\sqrt{1-\frac{c^2}{c_l^2}}$$

$$c_2 = \sqrt{\in/(s(l-\gamma^2))}; \; c_2 = \sqrt{G/s};$$

$$q = f\sqrt{1-c^2/c_l^2}; S = f\sqrt{1-c^2/c_2^2} \;,$$

f – волновые число. Вычисляются дисперсионные кривые фазовых скоростей. Результаты расчетов которых приведены в таблице 1(ν = 0,29).

Найдено, что фазовой скоростью для коротких волн является немонотонная функция длины волн. Для L/λ>0.5 фазовые скорости монотонно убывают и приближаются к асимптоте. Из численных результатов вытекает, что распространение волн напряжения трехслойном теле осуществляется при высших частотах, как в свободном слое. Установлено, что при L/λ=0.5 первые моды фазовой скорости в зависимости от L/λ изменялись монотонно возрастая. Во втором случае фазовые скорости различных мод сопровождались сильными затуханиями.

References:

1. Aki, K., & Richard, P. (1983). *Kolichestvennaya seysmologiya*. (p.519). Moskva: Mir, tom 1.
2. Aynola, L.A., & Nigus, U.K. (1965). Volnoviye protsessi deformatsii uprugix pliti obolochek. - Izv. ANR, 14, №1, pp.3-63.
3. Babich, V.M., & Molotov, I.A. (1977). Matematicheskiye metodi v teorii uprugix voln. - *Mexanika deformiruyushego tverdogo tela*, VINITI, 10, pp. 5-62.
4. Brepta, R. (1971). Rasprostraneniye prodolinix voln v tonkix poyasax s reologicheskimi svoystvami. -*Krakov, Stroy i chas.*, XXII,5, pp.433-447.
5. Brexovskiy, L.M., & Goncharov, V.V. (1982). *Vvedeniye v mexaniku sploshnix sred.* (p.335). Moscow: Nauka.
6. Viktorov, I.A. (1966). *Fizicheskiye osnovi primeneniya ultrazvukovix voln Releya v Lemba v texnike*. (p.168). Moscow: Nauka.
7. Godunov, S.K. (n.d.). O chislennix reshenii krayevix zadach dlya sistem lineynix obiknovennix differentsialinix uravneniy// – *Uspexi matematicheskix nauk*, 1061, T.16, vip. 3, 171-174.
8. Grinchenko, V.T., & Maleshko, V.V. (1981). *Garmonicheskiye kolebaniya i volni uprugix telax.* (p.283). K.: Nauka dumki.
9. Deyvis, R.M. (1961). *Volni napryajeniy v tverdix telax.* (p.104). Moscow: iz-vo inostr. Liter..
10. Kayumov, S.S., & Safarov, I. I. (2004). *Rasprostraneniye i difraktsiya voln v dissipativno - neodnorodnыx silindricheskix deformiruyemix mexanicheskix sistemax.* (p.215). Toshkent: Fan.
11. Safarov, I.I., Kulmuratov, N.R., Teshaev, M.K., & Kuldaschov, N.U. (2019). Interaction of No stationary Waves on Cylindrical Body. *Applied Mathematics,* 10, pp.435-447. http://www.scirp.org/journal/am
12. Safarov, I.I., Kulmuratov, N.R., & Kuldaschov, N.U. (2019). Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. *Applied Mathematics*, 10, pp. 468-484. http://www.scirp.org/journal/am