SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2022 **Issue:** 06 **Volume:** 110

Published: 25.06.2022 http://T-Science.org

Issue Article

Z. P. Sokhadze
Akaki Tsereteli State University
Doctor of Mathematics, Professor,
Faculty of Exact and Natural Sciences, Department of Mathematics,
Kutaisi, Georgia

M. M. Shalamberidze
Akaki Tsereteli State University
Doctor of Technical Science, Professor,
Faculty of Technological Engineering, Department of Design and Technology,
Kutaisi, Georgia

ON THE WEIGHT INITIAL PROBLEM FOR SINGULAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

***Abstract**: Sufficient conditions for solvability and correctness of the weighting initial problem have been established for singular functionally differential systems.*

***Key words**: Singular functional differential systems, Correctness of the initial weight problem.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Sokhadze, Z. P., & Shalamberidze, M. M. (2022). On the weight initial problem for singular functional differential systems. *ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (110),* 363-366.

***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-110-64 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.06.110.64

***Scopus ASCC**: 2601.*

О ВЕСОВОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

***Аннотация**: Для сингуларных функционально диффеpенциальных систем установлены достаточные условия разрешимости и корректности весовой начальной задачи.*

***Ключевые слова**: Сингулярные функционально диффеpенциальные системы, Коректность весовой начальной задачи.*

Введение

2010 Математическая класификация 34A12, 34K05, 34K10

В конечном промежутке $]a,b[$ рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x)(t) \qquad (1)$$

с весовым начальным условием

$$\lim_{t\to a} sup\|\Phi^{-1}(t)x(t)\| < +\infty \quad (2)$$

где $f: C([a,b];R^n) \to L_{loc}(]a,b];R^n)$ есть сингулярный оператор, удовлетворяющий локальные условия Коротеодори $\Phi(t) = ding(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$, где $\varphi_i:[a,b] \to R_+ (i = 1,\cdots,n)$ ..--- непрерывные, неубывающие функции такие, что $\varphi_i(0) = 0, \varphi_i(t) > 0$ при $a < t \le b (i = 1,\cdots,n)$.

Начальная задача для сингулярной системы (1) исследована достаточно подробно в тех случаях, когда f является оператором Немыцкого [1-5], или еволюционным оператором [6-9]. Весовая начальная задача для сингулярных функционально-дифференциальных уровнений высших порядков изучена в трудах [11-14]. Что касается весовой сингулярной задачи (1), (2), она исследована недостоточно. В настоящей статье приведены в определенном смысле не улучшаемые условия, которые гарантирует разрешимость и корректность этой задачи.

Мы применили следующие обозначения $R =]-\infty; +\infty[, R_+ = 0; +\infty[$, R^n- пространство n– мерных вещественных векторов столбов $x = (x_i)_{i=1}^n$ с нормой$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Если $x = (x_i)_{i=1}^n \in R^n$, то $[x]_+ = \left(\frac{x_i + |x_i|}{2}\right)_{i=1}^n$

$r(x)$- спектральний радиус $n \times n$ матрицы X, а X^{-1} матрица обратная $X.diag(x_1, \cdots, x_n)$ диагональная $n \times n$ - матрица с диагональными элементами $x_1, \cdots, x_n$. R_+^n и $R_+^{n\times n}$ - множества n– мерных векторов и $n \times n$ - матриц с неотрицательными компонентами $C([a,b], R^n)$- пространство непрерывных векторных функций $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = max\{\|x(t)\|: a \leq t \leq b\}$.

$C_\Phi([a,b], R^n)$- пространство непрерывных векторных функций $x: [a,b] \to R^n$, удовлетворяющие условия (2), с нормой $\|x\|_{C_\Phi} = sup\{\|\Phi^{-1}(t)x(t)\|: a < t \leq b\}$.

Если $x = (x_i)_{i=1}^n \in C_\Phi([a,b]; R^n)$, то

$$|x|_{C_\Phi} = \left(\|x_i\|_{C_{\rho_i}}\right)_{i=1}^n$$

$L([a,b]; R^n)$- пространство векторных функций, с интегрируемыми по Лебега на $[a,b]$ с компонентами.

$L_{loc}(]a,b]; R^n)$- пространство векторных функций компоненты, которых интегрируемы по Лебегу на $[a,b]$ с компонентами.

$L_{loc}(]a,b]; R^n)$- пространство векторных функций компоненты, которых интегрируемы по Лебегу на $[a+\varepsilon, b]$ при сколь угодно молом $\varepsilon > 0$. $K_{loc}(]a,b] \times R^k; R^m)$ и $K_{loc}(C[a,b]; R^k)$; $L_{loc}(]a,b]; R^m)$ множества векторных функций $g:]a,b] \times R^k \to R^m$ и операторов $f: C([a,b], R^k) \to L_{loc}(]a,b]; R^m)$, удовлетворяющие локальные условиям Коротеодори [13].

Важным частным случаем функционально-дифференциальной системы (1) является дифференциальная система с отклоняющимся аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = g\left(t, x(t), x(\tau(t))\right) \qquad (3)$$

Наряду с задачами (1), (2) мы рассмотрим и задачи (3), (2), при этом везде, когда речь будет идти об этих задачах, будем считать, что $f \in K_{loc}\left(C([a,b]; R^n); L_{loc}(]a,b]; R^n)\right)$, $g \in K_{loc}(]a,b] \times R^n; R^n)$, а $\tau: [a,b] \to [a,b]$ измеримая функция. Нас в основном интересуют случаи, когда системы (1) и (3) являются сингулярными, т.е. случаи, когда $\int_a^b f_\rho^*(t)dt = +\infty$ и $\int_a^b g_\rho^*(t)dt = +\infty$ при $\rho > 0$.

Где $f_\rho^*(t) = sup\{\|f(x)(t)\|: \|x\|_C \leq \rho\}$и $g_\rho^*(t) = max\{\|g(t,x,y)\|: \|x\| + \|y\| \leq \rho\}$.

Для произвольного положительного числа δ допустим, что $\chi(t,\delta) = \begin{cases} 0, при\ \ a \leq t < a+\delta \\ 1, при\ \ t > a+\delta \end{cases}$ и рассмотрим вспомагатольную начальную задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda\chi(t,\delta)f(x)(t) \qquad (4)$$

$$x(0) = 0 \qquad (5)$$

зависящую от параметров $\lambda \in]0,1]$ и $\delta > 0$

На основе исследовании [15] доказываются следущие теоремы.

Теорема 1. Пусть существует положительное число ρ_0 такое, что при произвольных $\lambda \in]0,1]$ и $\delta > 0$ каждое решение x задачи (4), (5) допускает оценку

$$\|x\|_{C_\Phi} \leq \rho_0$$

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

Эта теорема дает возможность получить эффективные признаки разрешимости задач (1), (2) и (3), (2). В частности, справедливы следующие предложения.

Теорема 2. Пусть существуют матрицы $\Im \in R_+^{n\times n}$ и векторная функция $q: R_+ \to R_+^n$ такие, как

$$r(\Im) < 1,\ \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\|q(\rho)\|}{\rho} = 0 \qquad (6)$$

и для произвольной векторной функции $x \in C_\Phi([a,b], R^n)$ в промежутке $[a,b]$ выполнено неравенство $\int_a^b \left[sign\left(x(s)\right)f(x)(s)\right]_+ ds \leq \Phi(t)\left(\Im|x|_{C_\Phi} + q\left(\|x\|_{C_\Phi}\right)\right)$

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

Следствие 1. Пусть функции $\varphi_i (i = 1, \cdots, n)$ абсолютно непрерывны и существуют множество меры нуль $I_0 \subset [a,b]$, матрицы $\Im_k \in R_+^{n\times n} (k = 1,2)$ и неубывающая векторная функция $q: R_+ \to R_+^n$ такие, что на множестве $([a,b] \backslash I_0) \times R^{2n}$ выполнено неровенство

$$sgn(x)\,g(t,x,y) \leq \Phi'(t)\left(\Im_1 \Phi^{-1}(t)|x| + \Im_2 \Phi^{-1}\left(\tau(t)\right)|y|\right) + \\ +\Phi'(t)q\left(\left\|\Phi^{-1}(t)|x| + \Phi^{-1}\left(\tau(t)\right)|y|\right\|\right).$$

Если, кроме того выполнены условия (6), где $\Im = \Im_1 + \Im_2$, то задача (3), (2) имеет хотя бы одно решение.

Замечание 1. В теореме 2 и в следствие 1 условие $r(\Im) < 1$ является неулучшаемым и его нельзя заменить условием $r(\Im) \geq 1$. Справедливость этого факта следует из приведенной ниже теоремы 3.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_i (i = 1, \cdots, n)$ абсолютно непрерывны и существует множество меры нуль $I_0 \subset [a,b]$, матрицы $\Im_k \in R_+^{n\times n} (k = 1,2)$ и вектор $q_0 = (q_{0i})_{i=1}^n$ с положительными компонентами $q_{0i} (i = 1, \cdots, n)$ такие, что на множестве $([a,b] \backslash I_0) \times R^{2n}$ выполнено неравенство $g(t,x,y) \geq \Phi'(t)\left(\Im_1 \Phi^{-1}(t)|x| + \Im_2 \Phi^{-1}\left(\tau(t)\right)|y| + q_0\right)$

Если, кроме того $r(\Im_1 + \Im_2) \geq 1$, то задача (3), (2) не имеет решения.

Наряду с (1), (2) рассмотрим возмущенную задачу

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y)(t) + h(t) \qquad (7)$$

$$\lim_{t \to a} sup \|H^{-1}(t)y(t)\| < +\infty \qquad (8)$$

Определение. Задача (1), (2) называется корректной если существует положительное число ρ такое, что для произвольной функции $h \in L([a,b]; R^n)$ удовлетворяющий условию $\nu_\Phi(h) = sup\left\{\left\|\Phi^{-1}(t)\int_a^t |h(s)|ds\right\| : a < t \leq b\right\} < +\infty$, задача (7), (8) однозначно разрешима и её решение допустит оценку $\|y - x\|_{C_\Phi} \leq \rho\nu_\Phi(h)$, где x – решение задачи (1), (2).

Теорема 4. пусть существует матрица $\Im \in R_+^{n \times n}$ такая, что $r(\Im) < 1$ и для произвольных функций x и $y \in C_\Phi([a,b], R^n)$ в промежутке $[a,b]$ выполнено неравенство $\int_a^t [sgn(y(s))\,(f(x+y)(s) - f(x)(s))]_+ ds \leq \Phi(t)\,\Im |y|_{C_\Phi}$

Если, кроме того $sup\left\{\left\|\Phi^{-1}(t)\int_a^t |f(0)(s)|ds\right\| : a < t \leq b\right\} < +\infty$, то задача (1), (2) является корректной.

Следствие 2. Пусть функции $\varphi_i (i = 1, \cdots, n)$ абсолютно непрерывны и существуют множество меры нуль $I_0 \subset [a,b]$ и матрицы $\Im_k \in R_+^{n \times n}$ $(k = 1,2)$ такие, что $r(\Im_1 + \Im_2) < 1$ и при любых $t \in [a,b] \backslash I_0, x, \bar{x} y$ и $\bar{y} \in R^n$ выполнено неравенство

$$\operatorname{sgn}(\bar{x})\left(g(t, x+\bar{x}, y+\bar{y}) - g(t,x,y)\right) \leq$$

$$\Phi'(t)\left(\Im_1 \Phi^{-1}(t)|\bar{x}| + \Im_2 \Phi^{-1}(\tau(t))|\bar{y}|\right).$$

Если, кроме того $sup\left\{\left\|\Phi^{-1}(t)\int_a^t |g(s,0,0)|ds\right\| : a < t \leq b\right\} < +\infty$, то задача (3), (2) является коректной.

Из теоремы 3 и следствия 2 вытекает

Следствие 3. Пусть функции $\varphi_i (i = 1, \cdots, n)$ абсолютно непрерывны и

$g(t,x,y) = \Phi'(t)\left(\Im_1 \Phi^{-1}(t)|x| + \Im_2 \Phi^{-1}(\tau(t))|y| + q_0\right)$. где $\Im_k \in R_+^{n \times n} (k = 1,2)$а $q_0 \in R_+^n$- вектор с положительными компонентами. Тогда для корректности задачи (3), (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $r(\Im_1 + \Im_2) < 1$.

Замечание 2. Согласно следствию 3 в теореме 4 (в следствии 2) неравенство $r(\Im) < (r(\Im_1 + \Im_2) < 1)$ является неулучшаемым и его нельзя заменить неравенством $r(\Im) \leq 1 (r(\Im_1 + \Im_2) \leq 1)$.

Данные исследования могут быть применены при решений разных инженерных задач.

References:

1. Cnecnik, V.A. (1959). *Investigation of systems of ordinary differential equations with a singularity*. (Russian) Tr. Mosk. Mat. Obs., 8 (1959). GIFML. (pp.155-198). Moscow.
2. Kiguradze, I.T. (1965). On the Cauchy problem for singular systems of ordinary differential equations. (Russian) *Differential`nye Uravneniya*, 1, No 10. 1271-1291: English transl.: Differ. Equations 1(1965), 995-1011.
3. Kiguradze I.T. (1975). *Some singular boundary value problems for ordinary differential equations*. (Russian) Tbilisi University Press, Tbilisi.
4. Kiguradze, I.T. (1996). On the singular Cauchy problem for systems of linear ordinary differential equations. (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya*, 32 (1996), No. 2, 215-223; English transl.: Differ. Equations 32 (1996), No. 2, 173-180.
5. Kiguradze, I.T. (1997). *Initial and boundary value problems for systems of ordinary differential equations, I. (Russian) Metsniereba*, Tbilisi.
6. Kiguradze, I.T. (2010). Estimates for the Cauchy function of linear singular differential equations and some applications. *Differ. Uravn*. 46 (2010). No. 1. 29-46: English transl.: Differ. Equ. 46 (2010). No. 1, 30-47.
7. Kiguradze, I.T., & Sokhadze, Z.P. (1997). On the Cauchy problem for singular evolution functional differential equations. (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya*, 33 (1997), No. 1, 48-59; English transl.: Differ. Equations 33 (1997), No. 1, 47-58.
8. Kiguradze, I.T., & Sokhadze, Z.P. (1997). On global solvability of the Cauchy problem for singular functional differential equations. *Georgian Math. J.*, 4 (1997), No. 4, 355-372.
9. Kiguradze, I.T., & Sokhadze, Z.P. (1998). On the structure of the set of solutions of the weighted Cauchy problem for evolution singular functional differential equations. *Fasc. Math.*, No. 28, 71-92.
10. Sokhadze, Z.P. (2005). *The Cauchy problem for singular functional-differential equations.*

(Russian) Kutaisskii Gosudarstvennyi Universitet. Kutaisi.

11. Sokhadze, Z. (1998). On the solvability of the weighted initial value problem for high order evolution singular functional differential equations. *Mem. Differential Equations. Math. Phys*. 15 (1998), 145-149.
12. Sokhadze, Z. (2011). The weighted Cauchy problem for linear functional differential equations with strong singularities. *Georgian Math. J.*, 18 (2011), No. 3, 577-586.
13. Půža, B., & Sokhadze, Z. (2012). The weighted Cauchy problem for nonlinear singular differential equations with deviating arguments. (Russian) *Differ. Uravn*., 48 (2012).
14. Sokhadze, Z. (2012). Kneser type theorems on a structure of sets of solutions of the weighted Cauchy problem for nonlinear singular delayed differential equations. *Georgian Math. J.* 19 (2012), N0. 4.
15. Půža, B., & Sokhadze, Z. (2011). Optimal solvability conditions of the Cauchy-Nicoletti problem for singular functional differential systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys*., 54 (2011), 147-154.
16. Kiguradze, I.T., & Půža, B. (1997). On boundary value problems for functional differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys*. 12 (1997), 106-113.