УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-17-23

Юлия Сергеевна Токарева,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: jtokareva2@mail.ru

О решении уравнения Пуассона на кусочно-однородной плоскости с круговым включением

Рассмотрена задача для уравнения Пуассона на кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух однородных зон в виде круга и его внешности. Методом свёртывания разложений Фурье решение указанной задачи выражено через решение аналогичной задачи на однородной плоскости.

Ключевые слова: краевые задачи в круговых кусочно-однородных областях, условия сопряжения, метод свёртывания разложений Фурье

В настоящее время широкое применение находят кусочно-однородные материалы, состоящие из нескольких зон с различными теплофизическими свойствами. Отсюда большой практический и теоретический интерес имеют задачи математической физики, моделирующие различные динамические процессы (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии, электродинамики и т.д.) в указанных материалах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим на плоскости проницаемости k_2 круговое включение $P_1 = (0 \leq r < h) \times (0 \leq \alpha < 2\pi)$ проницаемости k_1 при идеальном контакте зон P_i, где $i = 1, 2$; $P_2 = R^2 \setminus P_1$, $k_i > 0$ – постоянные, (r, α) – полярные координаты. Для функций $\varphi_i(r, \alpha)$ в P_i рассмотрим задачу с классическими условиями сопряжения

$$r^2 \Delta\varphi_i \equiv r\partial_r(r\partial_r\varphi_i) + \partial_\alpha^2\varphi_i = F_i(r, \alpha), \qquad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$r = h: \qquad \varphi_1 = \varphi_2, \qquad k_1\partial_r\varphi_1 = k_2\partial_r\varphi_2, \tag{2}$$

где Δ – оператор Лапласа, $\partial_r^n = \partial^n/\partial r^n$, функции $\varphi_i(r, \alpha)$ – 2π-периодические по α, $F_i(r, \alpha)$ – заданные функции, при этом $F_i = 0$ в окрестности границы зон $r = h$. Задача (1), (2) описывает установившиеся процессы тепломассопереноса на кусочно-однородной плоскости с круговым включением.

Ниже рассматривается задача (1), (2), когда одна из функций $F_i(r, \alpha)$ равна нулю, что не умаляет общности.

2. Неоднородное уравнение во внешней зоне. Рассмотрим для функций $\varphi_i(r,\alpha)$ в зонах P_i задачу (1), (2) с неоднородным уравнением во внешней зоне $P_2(r > h)$

$$r\partial_r(r\partial_r\varphi_1) + \partial_\alpha^2\varphi_1 = 0, \qquad r\partial_r(r\partial_r\varphi_2) + \partial_\alpha^2\varphi_2 = F(r,\alpha), \tag{3}$$

где $F = 0$ в окрестности $r = h$. Решение задачи (2), (3) определяется с точностью до аддитивной постоянной, одинаковой для функций $\varphi_1(r,\alpha)$ и $\varphi_2(r,\alpha)$, которую в окончательных формулах отбрасываем. Выразим решение задачи (2), (3) через решение $u(r,\alpha)$ классической задачи на однородной плоскости

$$r\partial_r(r\partial_r u) + \partial_\alpha^2 u = \begin{cases} 0, & r < h, \\ F(r,\alpha), & r > h. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть решение $u(r,\alpha)$ последней задачи известно.

Методом свёртывания разложений Фурье [4; 5] выразим решение задачи (2), (3) через функцию $u(r,\alpha)$ (4). Функция $u(r,\alpha)$ в круге $P_1(r < h)$ является решением классической задачи Дирихле

$$r\partial_r(r\partial_r v) + \partial_\alpha^2 v = 0, \qquad r < h; \qquad v_{|r=h} = u(h,\alpha).$$

Отсюда, применяя метод Фурье к последней задаче, представим функцию $u(r,\alpha)$ в круге $P_1(r < h)$ в виде

$$u(r,\alpha) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{-n} r^n s_n(\alpha), \qquad r \le h, \tag{5}$$

где

$$s_n(\alpha) = u_{1n}\sin n\alpha + u_{2n}\cos n\alpha, \tag{6}$$

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\alpha)d\alpha, \qquad \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\alpha)\begin{pmatrix} \sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{pmatrix} d\alpha. \tag{7}$$

Представим решения уравнений (3) также в виде разложений Фурье

$$\varphi_1(r,\alpha) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n h^{-n} r^n s_n(\alpha), \qquad r < h, \tag{8}$$

$$\varphi_2(r,\alpha) = u(r,\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n h^n r^{-n} s_n(\alpha), \qquad r > h, \tag{9}$$

где p_n, q_n – искомые коэффициенты. Из условий сопряжения (2) с учётом разложения (5) для параметров p_n, q_n получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$p_n = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}, \qquad q_n = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}. \tag{10}$$

Из разложения функции $u(r,\alpha)$ (5) следует аналогичное разложение при $r \geq h$

$$u(h^2/r,\alpha) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h^n r^{-n} s_n(\alpha), \qquad r \geq h.$$

Отсюда и из соотношений (5), (8)–(10) выразим решение задачи (2), (3) непосредственно через функцию $u(r,\alpha)$ (4) в конечном виде

$$\varphi_1(r,\alpha) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} u(r,\alpha), \qquad r < h, \tag{11}$$

$$\varphi_2(r,\alpha) = u(r,\alpha) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} u(h^2/r,\alpha), \qquad r > h, \tag{12}$$

где аддитивная постоянная $(k_1 - k_2)u_0/(k_1 + k_2)$ опущена.

Теорема 1. *Если задача (4) имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u(r,\alpha)$, то решение задачи (2), (3) единственно в указанном смысле и строится по формулам (11), (12).*

Доказательство. Условия (2), (3) для функций (11), (12) проверяются непосредственно. Правые части формул (11), (12) являются операторами, действующими на функцию $u(r,\alpha)$. Операторы, обратные операторам (11), (12), однозначно выражаются через функции $\varphi_i(r,\alpha)$ в виде

$$u(r,\alpha) = \frac{k_1 + k_2}{2k_2}\, \varphi_1(r,\alpha), \qquad r < h, \tag{13}$$

$$u(r,\alpha) = \varphi_2(r,\alpha) + \frac{k_1 - k_2}{2k_2}\, \varphi_1(h^2/r,\alpha), \qquad r > h. \tag{14}$$

При этом в силу условий сопряжения (2) и уравнений (3) полученная функция $u(r,\alpha)$ (13), (14) непрерывна вместе со своими производными при $r = h$ и удовлетворяет уравнению Пуассона (4). Отсюда единственность решения задачи (2), (3) (с точностью до аддитивной постоянной) следует из единственности решения задачи (4).

Формулы (11), (12) совпадают с действительными частями соответствующих комплексных потенциалов работы [2, с. 291], полученных методом отражения особых точек для случая изолированных особых точек.

3. Неоднородное уравнение во внутренней зоне. Рассмотрим задачу (1), (2) с неоднородным уравнением внутри круга $P_1(r < h)$

$$r\partial_r(r\partial_r\varphi_1) + \partial_\alpha^2\varphi_1 = F(r,\alpha), \qquad r\partial_r(r\partial_r\varphi_2) + \partial_\alpha^2\varphi_2 = 0. \tag{15}$$

Пусть известно решение $u(r,\alpha)$ соответствующей задачи на однородной плоскости

$$r\partial_r(r\partial_r u)+\partial_\alpha^2 u=\begin{cases}F(r,\alpha), & r<h,\\ 0, & r>h.\end{cases} \tag{16}$$

Выразим решение задачи (2), (15) через функцию $u(r,\alpha)$.

Здесь функция $u(r,\alpha)$ кроме особых точек внутри круга $P_1(r<h)$ может иметь в бесконечности логарифмическую особую точку, моделирующую источник или сток. Мощность q этого источника или стока равна суммарной мощности источников-стоков внутри круга P_1. Указанная суммарная мощность определяется потоком скорости через окружность $r=h$ из круга P_1 на однородной плоскости, т. е.

$$q=\frac{h}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\partial_r u_{|r=h}\,d\alpha, \tag{17}$$

при этом

$$u(r,\alpha)\sim q\ln r \tag{18}$$

при $r\to+\infty$. Отсюда функция $u(r,\alpha)$ (15) во внешней зоне $P_2(r>h)$ представима в виде разложения Фурье

$$u(r,\alpha)=q\ln\frac{r}{h}+u_0+\sum_{n=1}^{\infty}h^n r^{-n}s_n(\alpha),\qquad r\ge h, \tag{19}$$

где $s_n(\alpha)$ и u_0 имеют прежний вид (6), (7). Представим решения уравнений (15) в виде

$$\varphi_1(r,\alpha)=u(r,\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}p_n h^{-n}r^n s_n(\alpha),\qquad r<h, \tag{20}$$

$$\varphi_2(r,\alpha)=q_0\ln\frac{r}{h}+u_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n h^n r^{-n}s_n(\alpha),\qquad r>h. \tag{21}$$

Тогда из условий сопряжения (2) с учётом разложения (19) найдём

$$q_0=\frac{k_1}{k_2}q,\qquad p_n=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2},\qquad q_n=\frac{2k_1}{k_1+k_2}. \tag{22}$$

Из разложения (19) следует равенство при $r\le h$

$$u(h^2/r,\alpha)=-q\ln\frac{r}{h}+u_0+\sum_{n=1}^{\infty}h^{-n}r^n s_n(\alpha),\qquad r\le h.$$

Отсюда и из соотношений (19)–(22) выразим решение задачи (2), (15) через функцию

$u(r,\alpha)$ (16) в конечном виде

$$\varphi_1(r,\alpha) = u(r,\alpha) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\,[u(h^2/r,\alpha) + q\ln\frac{r}{h}], \qquad r < h, \tag{23}$$

$$\varphi_2(r,\alpha) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\,u(r,\alpha) + \frac{k_1(k_1 - k_2)}{k_2(k_1 + k_2)}\,q\ln\frac{r}{h}, \qquad r > h, \tag{24}$$

где q имеет вид (17).

Теорема 2. *Если задача (16) имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u(r,\alpha)$, то решение задачи (2), (15) единственно в указанном смысле и строится по формулам (23), (24).*

Действительно, условия задачи (2), (15) для функций (23), (24) проверяются непосредственно. Из асимптотики $u(r,\alpha) \sim q\ln r$ при $r \to +\infty$ (18) следует асимптотика $u(h^2/r,\alpha) \sim -q\ln r$ при $r \to 0$. Отсюда $\varphi_1(r,\alpha) \sim u(r,\alpha)$ при $r \to 0$ и $\varphi_2(r,\alpha) \sim k_1 k_2^{-1} q\ln r$ при $r \to \infty$, т. е. у функции $\varphi_1(r,\alpha)$ логарифмическая особая точка $r = 0$ отсутствует (слагаемым с множителем $q\ln r$ взаимно уничтожаются). При этом функция $\varphi_1(r,\alpha)$ в $P_1(r < h)$ (22) имеет особые точки только функции $u(r,\alpha)$, а функция $\varphi_2(r,\alpha)$ в $P_2(r > h)$ (23) не имеет особых точек, кроме логарифмической особой точки в ∞ при $q \neq 0$ (17).

Операторы, обратные операторам (23), (24), однозначно выражаются через функции $\varphi_i(r,\alpha)$ в виде

$$u(r,\alpha) = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}\,\varphi_2(r,\alpha) + \frac{k_2 - k_1}{2k_2}\,q\ln\frac{r}{h}, \qquad r > h,$$

$$u(r,\alpha) = \varphi_1(r,\alpha) + \frac{k_2 - k_1}{2k_1}\,\varphi_2(h^2/r,\alpha) + \frac{k_2 - k_1}{2k_2}\,q\ln\frac{r}{h}, \qquad r < h.$$

При этом из условий задачи (2), (15) функция $u(r,\alpha)$ непрерывна вместе с производными при $r = h$ и удовлетворяет уравнению (16). Отсюда следует утверждение теоремы.

В частном случае, когда суммарная мощность источников-стоков в круге $P_1(r < h)$ равна нулю ($q = 0$), из формул (23), (24) следуют соответствующие формулы работ [1; 2, с. 291; 3, с. 351], полученные методом отражения особых точек.

Список литературы

1. Баламирзоев А. Г., Зербалиев А. М., Селимханов Д. Н. О решениях некоторых задач теории фильтрации // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2014. № 4. С. 27–36.

2. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 364 с.

3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 855–859. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. Pp. 873–877).

5. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с плёночными включениями и плёночными границами. Чита: ЗабГУ, 2017. 234 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2018; принята к публикации 20.06.2018

Библиографическое описание статьи

Токарева Ю. С. О решении уравнения Пуассона на кусочно-однородной плоскости с круговым включением // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 17–23. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-17-23.

Yuliya S. Tokareva,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: jtokareva2@mail.ru

On the Solution of the Poisson Equation on a Piecewise Homogeneous Plane with a Circular Inclusion

The problem for the Poisson equation on a piecewise homogeneous plane consisting of two homogeneous zones in the form of a circle and its appearance is considered. The solution of this problem is expressed by the method of convolution of Fourier expansions through the solution of a similar problem on a homogeneous plane.

Keywords: boundary value problem in the circular piecewise-homogeneous domains, conjugation conditions, the method of convolution of Fourier expansions

References

1. Balamirzoev A. G., Zerbaliev A. M., Selimhanov D. N. O resheniyah nekotoryh zadach teorii fil'tracii // Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. 2014. № 4. S. 27–36.

2. Golubeva O. V. Kurs mekhaniki sploshnyh sred. M.: Vyssh. shk., 1972. 364 s.

3. Polubarinova-Kochina P. Ya. Teoriya dvizheniya gruntovyh vod. M.: Nauka, 1977. 664 s.

4. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj obobshchyonnyh uslovij sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnyh sredah // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 6. S. 855–859. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. Pp. 873–877).

5. Holodovskij S. E. Zadachi matematicheskoj fiziki v oblastyah s plyonochnymi vklyucheniyami i plyonochnymi granicami. CHita: ZabGU, 2017. 234 s.

Received: May 15, 2018; accepted for publication June 20, 2018

Reference to article

Tokareva Yu. S. On the solution of the Poisson equation on a piecewise homogeneous plane with a circular inclusion // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 17–23. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-17-23.