Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИНЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 11 Volume: 91

Published: 23.11.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Nasriddin Urinovich Kuldoshov
Institute of Chemistry and Technology
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
Dotsent, Tashkent, Uzbekistan

Nurillo Raximovich Kulmuratov
Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
docent, Uzbekistan
nurillo.Kulmuratov.64@mail.ru

Matlab Raxmatovich Ishmamatov
Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
docent, Uzbekistan
matkab1962@mail.ru

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE ACTION OF A PLANE UNSTEADY ELASTIC WAVE ON CYLINDRICAL BODIES

Abstract: *This paper considers the effect of a non-stationary wave on cylindrical bodies with circular and rectangular cross sections. The problem is solved in a flat formulation, by the numerical method (FEM). Numerical results were obtained under the influence of a load in the form of a unit Heaviside function.*

Key words: *unsteady wave, cylindrical bodies, finite element method, Heaviside function, pipe.*

Language: *Russian*

Citation: Kuldoshov, N. U., Kulmuratov, N. R., & Ishmamatov, M. R. (2020). Numerical solution of the problem of the action of a plane unsteady elastic wave on cylindrical bodies. *ISJ Theoretical & Applied Science, 11 (91),* 352-360.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-11-91-59 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.11.91.59

Scopus ASCC: *2200.*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Аннотация: *В этом работе рассматривается воздействие нестационарной волны на цилиндрические тела с круговыми и прямоугольными поперечными сечениями. Задача решается в плоской постановке, численным методом (МКЭ). Численные результаты получены при воздействии нагрузки в виде единичной функции Хэвисайда.*

Ключевые слова: *нестационарная волна, цилиндрические тела, метод конечных элементов, функция Хэвисайда, труба.*

Введение

Для современной инженерной практики строительство подземных сооружений весьма существенную и важную роль играют исследование и анализ волновых явлений, происходящих в средах с различными неоднородностями. Полученные в этой области результаты являются определяющими для создания методов расчета динамических воздействий на конструкции и сооружения, взаимодействующих с различными видами грунтовых сред. Однако, для решения поставленной проблемы нельзя достичь существенного продвижения без глубокого их теоретического анализа. Основные положения динамической теории сейсмостойкости разработаны в трудах [1,2,3,4,5] и др. Эти положения заключаются в следующем: рассматривается подземная сеть произвольной схемы, состоящая из упругих стержней (трубопроводы, стволы тоннелей) и сопрягающих их конструкций большой жесткости (смотровые колодцы, станции метрополитена и пр.)[6,7].

Движение грунта, окружающего трубопровода, при землетрясениях представляется в виде бегущей волны переменной интенсивности. При данной постановке задачи рассматривают только процесс, связанный с колебаниями трубопровода в грунте без учета объема колеблющегося грунтового массива [8]. При этом учитывается отпор грунта, трение проскальзывание стержней в грунте. В указанной постановке задача решается с помощью совокупности дифференциальных уравнений, описывающих колебания стержней, с учетом динамических и кинематических условий сопряжения стержней. На основе вышеописанной расчетной модели исследовано влияние сейсмических волн на трубопроводы, испытывающих продольные колебания [9,10]. Среди наиболее употребительных вычисленных методов, применяемых при расчете подземных трубопроводов, тоннельных конструкций метод конечных элементов и сеток. К вариационно-разностным методам относятся: метод Бубнова-Галеркина, метод Ритца и метод конечных элементов [11,12,13,14,15]. Остановимся на последнем, который нашел в настоящее время широкое распространение для решения практических инженерных задач. При проведении расчетов производилась неравномерная разбивка расчетной области на прямоугольные и треугольные конечные элементы. Эта разбивка сгущалась по мере приближения к зоне грунта прилегающей к трубе.В настоящее время имеются хорошо разработанные программные комплексы для решения плоских и пространственных задач линейной и нелинейной теории упругости по МКЭ [16,17]. Такие задачи, могут быть решены на многосвязной области любого очертания (исключение составляет определение напряженно-деформированного состояния в малой окрестности особой точки).

Постановка задачи

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается плоская область, в которой задано свободное круглое (или квадратное) отверстие (рис.1 и рис.2). Рассматривается подкрепление с отношением диаметра среднего контура к толщине, равное десяти. До начала момента вращения t=0 точки рассматриваемой механической системы находятся в покое:

$$u\big|_{t\leq 0}=0; \qquad \vartheta\big|_{t\leq 0}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t\leq 0}=0; \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\bigg|_{t\leq 0}=0; \qquad (1)$$

Начиная с момента $t\geq 0$ к области Ω в некотором ограниченном объёме прикладывается внешняя нагрузка

$$u=\sigma/(\rho C)\,, \qquad (2)$$

где σ - амплитуда внешних нагрузок; ρ - плоскость материала; C – скорости рассмотрения продольных волн. Для нестационарных задач в качестве условий изучения требуется выполнение принципа причинности: в среде должны отсутствовать перемещения вне области, ограниченной передним фронтом волн, идущих от источников колебания. Граничные условия на границе расчётной области для делительных динамических (сейсмических) воздействий. При решении задач для бесконечных элементов из бесконечной полуплоскости выделяется исследования расчётная область конечных размеров. Исследуемая область дискретизируется, причём возникает необходимость постановки таких условий на границе, которые бы не повлияли на результаты решения за счёт отражения, что происходит пи длительных динамических воздействиях. Некоторые исследователи предлагают рассматривать решения лишь на некоторым расстоянии от границы области [1,8], считая, что отраженные волны не успевают достичь этого участка за рассматриваемый промежуток времени.

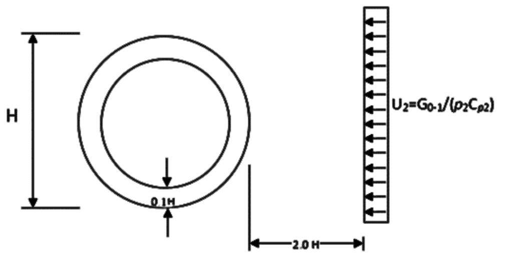

Рисунок 1. Воздействие упругой волны на подкрепленное круговое отверстие

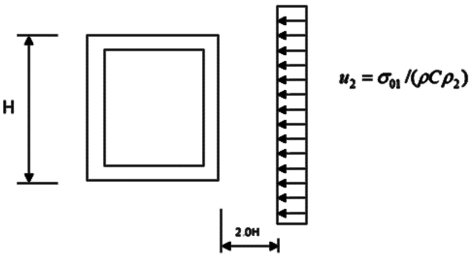

Рисунок 2. Воздействие упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие

Иногда целесообразно вводить в расчётную область дополнительное искусственное демпфирование, увеличивающееся по мере приближения к границе [2,10]. В работе [2] были предложены граничные условия для конечной расчётной области, позволяющие моделировать бесконечную среду. Указанные граничные условия пропускает волну через границу расчётной области без отражения, т.е получается так называемая стандартная вязкая граница. Задания стандартной вязкой границы осуществляется путём замены реакции не прижимаемой во внимание части полуплоскости распределёнными нагрузками σ и τ, вычисленными по формулам:

$$\sigma=\alpha\rho C_p u; \quad \tau=б\rho C_s \upsilon; \qquad (3)$$

где u и υ - скорость движения точек на границе тела соответственно по координатам X_1 и X_2; α и б - безграничные параметры; ρ- плотность материала; Ср и C_s–скорости соответственно продольных и поперечных волн. Подобные условия можно рассматривать как установку вязкого демпферы на границе.

Методы решения

Процедуры МКЭ предусматривают переход от дифференциальных зависимостей, для отдельных конечных элементов к глобальной системе уравнений для всего массива. Для линейных задач нестационарного взаимодействия это система глобальная и имеет вид [10]:

$$[M]\{q''\} +[S]\{q'\} +[K]\{q\} =\{F\}-[p]\{\delta'\} \qquad (4)$$

здесь [M], [S], [K] – соответственно матрацы масс, демпфирования женскости системы; {q”}, {q’}, {q} – векторы укоренный скорости и смещений; {F} – вектор внешний нагрузки; [p] – матрица внешнего демпфирования. Матричное дифференциальное уравнение (4) в конечно – разностном виде с использованием методики Ньюмарка имеет вид

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\right)2 \quad [m](q^{j+2} - 2q^{j+2} + q^j) + \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)[S](q^{j+2} - q^j) + [k][\beta q^{j+2} + (1-2\beta)q^{j+2} + \beta q^j] =$$
$$= \beta F^{j+2} + (1-2\beta)F^{j+2} + \beta F q^j \qquad (5)$$

где j, j+1, j+2 - прошедшие, настоящие и будущие значения переменных; β-параметр, выбираемый из условий численной устойчивости и точности. В рассматриваемом примере он принят β=1/3.

Таким образом, получается система линейных алгебраических уравнений, которая решается по временному шагу.

По предложению [10] использовались следующие соотношения для определения перемещения и скорости:

$$\{\dot{q}\}^{j+1} = \{\dot{q}\}^j + \tau[(1-\gamma)\{\ddot{q}\}^j + \gamma\{\ddot{q}\}^{j+1}];$$
$$\{q\}^{j+1} = \{q\}^j + \tau\{\dot{q}\}^j + \tau^2[(\tfrac{1}{2} - \beta)\{\ddot{q}\}^j + \beta\{\ddot{q}\}^{j+1}]; \qquad (6)$$

где γ характеризует схемные демпфирования, γ=1/2 при котором затухание отсутствует. Соотношение (5) можно представить в форме алгебраической системы

$$[A]\{q\}^{j+1} = \{R\}^j \qquad \text{где}$$
$$\{R\}^j = \{F\}^j + \left(\frac{2}{(\Delta t)^2}[M] = [K]\right)\{q\}^j - \frac{1}{(\Delta t)^2}\{q\}^{j-1}; \qquad (7)$$

которые реализуют типовую процедуру вычисления переменного вектора{q(t)}.

В случае диагональных матриц масс элементов матрица системы также является диагональной. Шаг интегрирования по времени принят равным $0{,}125\cdot10^{-4}$ при минимальном периоде свободных колебаний элемента $6{,}28\cdot10^{-4}$ с.

Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на круглые полости.

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается плоская область, в которой задано круглое отверстие (рис.1). Начальные условия приняты нулевыми, что соответствует отсутствию упругих перемещений и скоростей при t=0. При $0 \le n \le 10$ $(n = t/\Delta t)$ скорость упругого перемещения и изменяется от 0 до $p = \sigma_o/(pc_p)$, $\sigma_o = -0{,}1$ (МПа), при n 10 u=p, что соответствует воздействию плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда σ_{01} (рис.3)

$$\sigma_{xx}^0 = \sigma_0 H(t)$$

$$\sigma_{yy}^0 = \sigma_0 \frac{v}{1-v} h(t), \qquad (8)$$

где t=t+(x+R)/c_p, $(\sigma_0 = 1МПа)$; c_p-скорость продольной волны; R-радиус отверстия. Расчеты проведены при следующих исходных данных:

H=2,0 м; Δt=0,407*10^{-5}с; E=0,36*10 Мпа; ν=0,36; р-0,122*10^4 кг/м^3; с-1841 м/с; n=t/Δt.

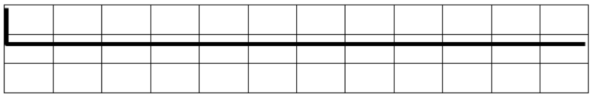

Рисунок 3. Воздействие типа функции Хэвисайда.

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками. Диаметр круглого отверстия плоский фронт воздействия проходит за n=24. Графики показывают, что численное решение достаточно точно воспроизводит волновую картину. Расхождение для максимального сжимающего упругого контурного напряжения $\sigma_к$ составляет 6%.

На рис. 4 показано изменение упругого контурного напряжения $\sigma_к$ в точках 1А – 5А во времени t/Δt, при воздействии (8) сжимающее упругое контурное напряжение $\sigma_к$ в точке 1А растет до максимума, а затем, осциллируя, асимптотически стремится к постоянной величине. Многократная суперпозиция прямых, тораженных и дифрагированных упругих волн приводит к концентрации сжимающего упругого контурного напряжения $\sigma_к$ в окрестности точки 1А.

Максимальной величины сжимающее упругое контурное напряжение $\sigma_к$ достигает в точке 1А почти за три прохода фронтом продольной волны диаметра круглого отверстия и равно $\sigma_к$ =-2,712. Графики показывают, что упругое напряженное состояние около круглого отверстия стремится к соответствующим номинальным упругим напряжениям.

Воздействие упругой волны на подкрепленное круглое отверстия.

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается плоская область, в которой задано свободное круглое отверстие. Рассматривается подкрепление с отношением диаметра среднего контура к толщине, равное десяти. Начальные условия приняты нулевыми, что соответствует отсутствию упругих перемещений и скоростей упругих перемещений при t=0. В сечении на расстоянии 2.ОН (рис.1) при $o \leq n \leq 10$ $(n = t/\Delta t)$ скорость упругого перемещения и изменяются линейно от 0 до $p = \sigma_0/(\rho_2 c_{p2})$, $\sigma_0 = -0{,}1$Мпа (-1кгс/см), а при n>10 u=p, что соответствует воздействию плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда σ_0 Расчеты проведены при следующих исходных данных: H=2,0 м.

Δt_1=0,186 x 10^{-5}с; E_1=0,72 x 10^5Мпа (0,72-10^6кг/см); ν=0,3; p_1 0,275 x 10^4 кг/м

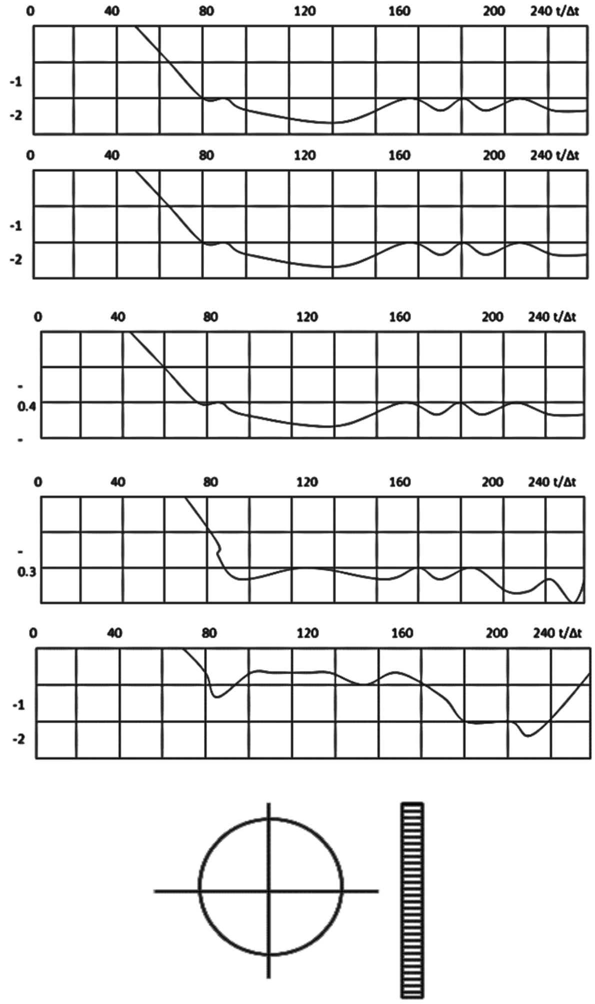

Рис.4. Изменение сжимающего упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_x$ в точках 1А-5А во времени t/Δt на контуре свободного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда.

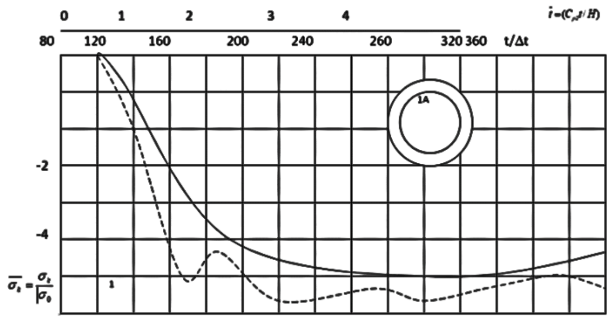

Рис.5. Изменение сжимающего упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_x$ в точках 1А во времени $\bar{t}$ на контуре свободного круглого отверстия:1-результаты аналитического решения при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда; 2-результаты численного решения, полученные МКЭ в перемещениях при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда.

(0,275x10^{-5} кг/с /см); c_{p1}=536 м/с; (0,36 x 10) x 5 ν=0,36; p_2=0,122 x 10^4 кг/м^3

Δt_2=0,407x10^{-5}с; E_2=0,36x10 Мпа (0,122 x10^{-5} кгс/см^4); c_{p2}=1841 м/с;

(…1 – подкрепление, …2 – среда). Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепленного круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми. Наружный контур подкрепленного круглого отверстия аппроксимирован 32 узловыми точками. Диаметр среднего контура подкрепленного круглого отверстия (плоский фронт воздействия) проходит за n=60. На рис.5 показано изменение сжимающего упругого контурного напряжения $\sigma_{\kappa}(\sigma_{\kappa} = \sigma_{\kappa} / |\sigma_{o}|)$ в точке 1А во времени $\bar{t}(t = (c_{p2}t) / H\%$. 1(–)-2(-- --) – результаты аналитического и численного решения при воздействии (8). Расхождение для максимального сжимающего упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_{x}$ составляет 16%.

Воздействие плоской упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие.

Рассмотрим задачу о взаимодействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие (рис.6). В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается плоская область, в которой задано подкрепленное квадратное отверстие. Рассматривается подкрепление с отношением стороны среднего контура к толщине равной десяти. Начальные условия приняты нулевыми, что соответствует отсутствию упругих перемещений и скоростей упругих перемещений при t=0. В сечении на расстояния 2.ОН при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) скорость упругого перемещения и изменяется линейно от 0 до $P = \sigma_0.(\rho_2 c_{p2})$ (σ_0=-0,1 МПа (-1кгс.см)), при n>10 u_2=p, что соответствует воздействию плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда (рис.8).

Расчеты проведены при следующих исходных данных: H=2,0; $\Delta t = 0{,}186 \cdot 10^{-5}$ с; $E_1 = 0{,}72 \cdot 10^5$ МПа ($0{,}72 \cdot 10^6$ кгс/см^2); ν=0,3.

Исследуемая расчетная область имеет 13-40 узловых точек. Внутренний контур подкрепленного квадратного отверстия аппроксимирован 36 узловыми точками. Наружный контур подкрепленного квадратного отверстия аппроксимирован 44 узловыми точками.

Диаметр среднего контура, подкрепленного круглого отверстия (плоский фронт воздействия) проходит за n=60. На рис.7 и рис.8 показано изменения упругого контурного напряжения σ_{κ} ($\sigma_{\kappa} = \sigma_{\kappa} / |\sigma_{\kappa}|$) в точках 1А-11А во времени $t/\Delta t$ при воздействии (8). Сжимающее упругое контурное напряжение $\overline{\sigma}_{x\,\kappa}$ в точке 5А растет до максимума, а затем осциллируя, асимптотически стремится к постоянной величине. Постоянная суперпозиция прямых, отраженных и дифрагированных упругих волн приводит к концентрации сжимающего упругого контурного напряжения σ_kв окрестности точки 5А. Максимальной величины сжимающее упругое контурное напряжение σ_k достигает в точке почти за два прохода фронтом продольной волны стороны среднего контура подкрепленного квадратного отверстия и равно σ_k = -13.9 .

Графики показывают, что сжимающее упругое нормальное напряжение подкрепление сжимает концентрацию упругих напряжений около отверстия. Упругое напряженное состояние при удалении от подкрепленного квадратного отверстия стремится к соответствующим номинальным упругим напряжениям. сравнительный анализ контурное напряжений неподкрепленного и подкрепленного отверстия (точка 1А).

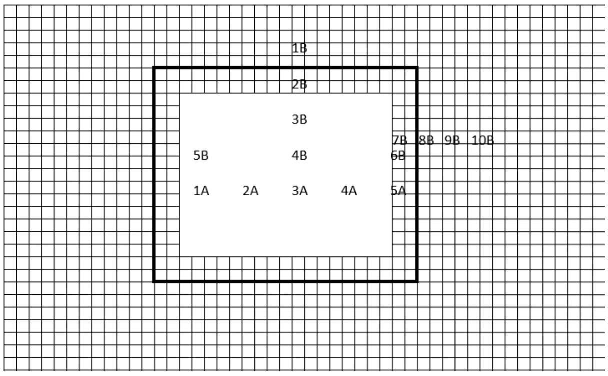

Рис. 6. Точки, в которых приводятся упругие напряжения во времени.

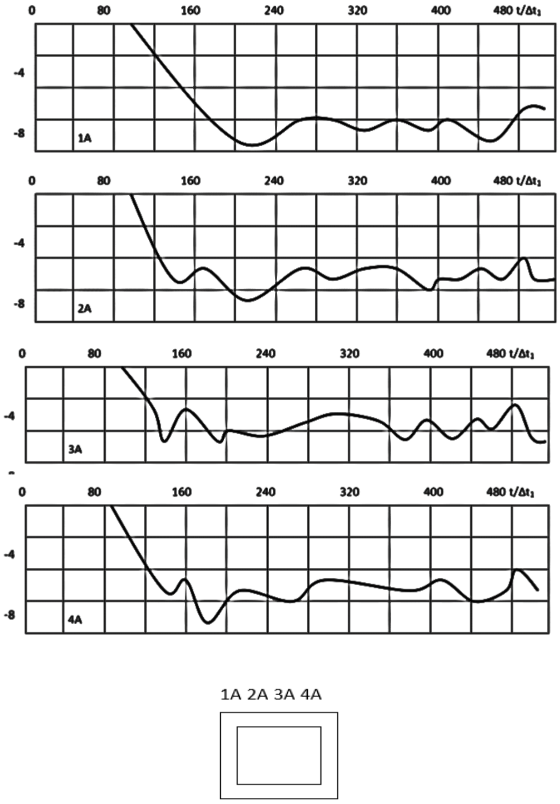

Рис. 7. Изменение сжимающего контурного $\bar{\sigma}_k$ в точках 1А-4А во времени t/Δt₁ на внутреннем контуре подкрепленного квадратного отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда.

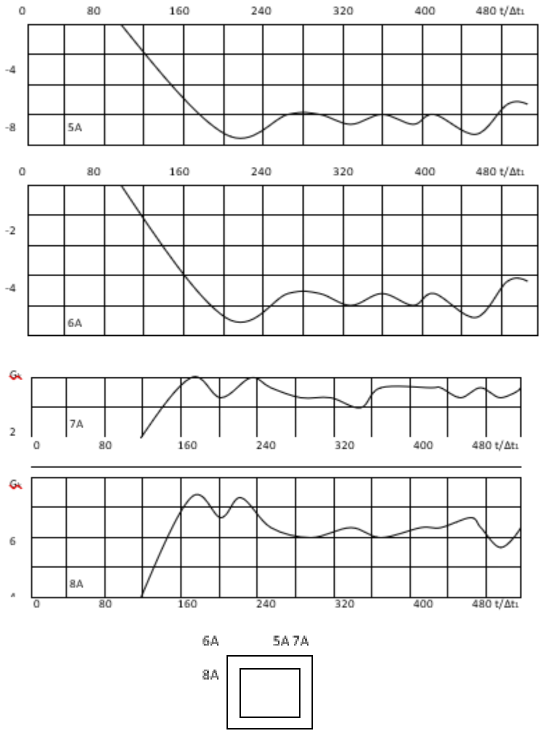

Рис.8. Изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точках 5А-8А во времени $t/\Delta t_1$ на внутреннем контуре подкрепленного квадратного отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хэвисайда

Выводы:

- при воздействии плоской продольной волны типа функции Хэвисайда максимальное растягивающее упругое контурное напряжение возникает: для свободного отверстия в точке, находящейся на оси симметрии в теневой области внутреннего контура подкрепления; для подкрепленного квадратного отверстия в точке, находящейся на оси симметрии в освещенной области внутреннего контура подкрепления.

-при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда на свободное круглое отверстие и на свободное квадратное отверстие сжимающее упругое контурное напряжение максимальной величины достигает не более за три прохода фронтом волны характерного размера.

- анализ численных результатов показывает, что МЭК в перемещениях с успехом может применяться для решения плоской динамической задачи теории упругости и становится конкурентоспособным с другими методами динамической теории упругости. Проведенные исследования сходимости и устойчивости, сравнение результатов численного решения плоской динамической задачи теории упругости, полученных МКЭ в перемещениях, с результатами аналитических решений, показало их хорошее совпадение, что позволяет сделать заключение о физической достоверности результатов численного решения плоской динамической задачи теории упругости, полученных МКЭ в перемещениях.

- максимальное значение интенсивности напряжений в прямоугольном сооружении, взаимодействующем со средой, достигается на границе, вблизи угловой точки и во внутренних точках тела.

- Максимальных контурных напряжений в подкрепленных отверстиях четыре раза больше, чем максимальных контурных напряжений в свободных отверстиях. Наличие подкрепления снижает концентрацию напряжений в среде.

- установлено, что в начале подкрепленная отверстия и к моменту, когда волна проходит около ее радиусов, становится почти равномерно всесторонне сжатой, затем наступает качественно новая фаза движения, на которой контурные напряжения падают, а появившиеся заметные изгибные напряжения бурно растут с образованием по кольцу отверстия пяти волн.

References:

1. Seleznev, V.E., Aleshin, V.V., & Klishin, G.S. (2005). *Metody i tekhnologii chislennogo modelirovaniya gazoprovodnykh sistem*. Pod red. V.E. Selezneva. Izd. 2-e, pererab. (p.328). Moscow: KomKniga.
2. Aleshin, V.V., et al. (2003). *Chislennyj analiz prontosil podzemnykh truboprovodov*. Pod red. V.V. Aleshina i V.E. Selezneva. (p.320). Moscow: Editorial URSS.
3. Seleznev, V.E., et al. (2005). *Numerical simulation of gas pipeline networks: theory, computational implementation, and industrial applications*. Ed. by V.E. Seleznev. (p.720). Moscow: KomKniga.
4. Sardanashvili, S.A. (2005). *Raschetnye metody i algoritmy* (truboprovodnyj transport gaza). (p.577). Moscow: FGUP Izd-vo ´Neft' i gaz[a] RGU nefti i gaza im. I.M. Gubkina.
5. Borodavkin, P.P. (2003). *Mekhanika gruntov*. (p.349). Moscow: Nedra.
6. Aleshin, V., & Seleznev, V. (2002). *Simulation of soil in ANSYS*. Conference Proceedings of 20 CAD-FEM Users' Meeting 2002 - International Congress of FEM Technology (October 2002, Friedrichshafen, Germany). Vol.1. Paper 1.5.7. CAD-FEM GmbH, (p.7). Germany.
7. (1979). *Prochnost' i deformiruemost' gornykh porod*. Pod obshch. red. A.B. Fadeeva. (p.269). Moscow: Nedra.
8. (1975). Opredelyayushchie zakony mekhaniki gruntov. *Sb. statej serii ´Mekhanika: Novoe v zarubezhnoj nauke[a]*, Pod red. A.Yu. Ishlinskogo i G.G. Chernogo. Vypusk š2. M: Mir, p.231.
9. Tsitovich, N.A. (1983). *Mekhanika gruntov*. (p.288). Moscow: Vysshaya shkola.

10. Drukker, D., & Prager, V. (1975). *Mekhanika gruntov i plasticheskij analiz ili predel'noe proektirovanie*: Per. s angl. / V sb: ´Opredelyayushchie zakony mekhaniki gruntov[a] // Pod red. V.N. Nikolaevskogo. (pp.166-177). Moscow: Mir.
11. Chen, W.F., & Han, D. J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers.* Springer-Verlag, (p.606). New York.
12. Ttrzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*, (p.66). Wiley, New York.
13. Van Horn, A. D. (1963). *A Study of Loads on Unerground Structures*, part III, Iowa Engineering Experiment Station.
14. Avliyakulov, N.N., & Safarov, I.I. (2007). *Sovremennye zadachi statiki i dynamic podzemnykh truboprovodov.* (p.306). Tashkent: Fan.
15. Safarov, I.I. (1992). *Kolebaniya i volny v dissipativno nedorodnykh sredakh i konstruktsiyakh.* (p.250). Tashkent: Fan.
16. Safarov, I.I., Akhmedov, M.Sh., & Boltaev, Z.I. (2016). *Kolebaniya i difraktsiya voln na tsilindricheskom tele v vyazkouprugoj srede*. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 262 r. hhtp:// dnb.d -nb.de . ISBN: 978-3-659-67583-6.
17. Bozorov, M.B., Safarov, I.I., & Shokin, Yu.I. (1996). *Chislennoe modelirovanie kolebanij dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem*. (p.189). Novosibirsk: Izd. SO, RAN.