SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2020 Issue: 10 Volume: 90
Published: 09.10.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Rustam Ibragimovich Khalmuradov
Samarkand State University
Doctor of Technical Sciences, Professor to Department of
Theoretical and Applied Mechanics of Mathematical Faculty, Uzbekistan

Khayrulla Khudoynazarov
Samarkand State University
Doctor of Technical Sciences, Professor to Department of
Theoretical and Applied Mechanics of Mathematical Faculty, Uzbekistan,
kh.khudoyn@gmail.com

Sherzod Omonov
Samarkand State University
Researcher, Uzbekistan

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE STRESS FIELDS OF THE ROCK MASS AROUND THE VERTICAL WORKING OF THE CIRCULAR CROSS-SECTION

***Abstract**: The article deals with the problem of the stress-strain state of a rock mass around a vertical working of a circular cross-section. An exact formulation of the three-dimensional problem of the deformation of a half-space weakened by a deep cylindrical cavity is used. The stress-strain state of a half-space, as a three-dimensional body, strictly obeys the basic requirements of the three-dimensional linear theory of elasticity and is described by its corresponding equations and relations in a cylindrical coordinate system. The specific problem of rock mechanics has been solved, i.e. the considered rock mass works only in compression. The deformation process and stress state around vertical shafts of circular cross-section are expressed in terms of stress functions. Calculation formulas are derived for all nonzero components of the strain and stress tensors, taking into account the axisymmetry of the problem under consideration, represented in terms of stress functions.*

***Key words**: rock mass, vertical working, shaft of vertical mines, stress fields, deformation process, stress function.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Khalmuradov, R. I., Khudoynazarov, K., & Omonov, S. (2020). Determination of the parameters of the stress fields of the rock mass around the vertical working of the circular cross-section. *ISJ Theoretical & Applied Science, 10 (90),* 106-112.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-90-22 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.10.90.22
***Scopus ASCC**: 2200.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

***Аннотация**: В статье рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород вокруг вертикальной выработки кругового поперечного сечения. Использована точная постановка трехмерной задачи о деформации полупространства, ослабленной глубокой цилиндрической полостью. Считается, что напряженно-деформированное состояние полупространства, как трехмерного тела, строго подчиняется основным соотношениям трехмерной линейной теории упругости и описывается её соответствующими уравнениями и соотношениями в цилиндрической системе координат. Решена* *конкретная задача механики горных пород, при условии, что рассматриваемый массив горных пород работает только на сжатие. Компоненты деформации и напряженного состояния вокруг стволов вертикальных шахт кругового сечения выражены через функции напряжения. Выведены формулы вычисления для всех отличных от нуля компонент тензоров деформаций и напряжений, с учетом осесимметричности рассматриваемой задачи.*

Ключевые слова: *массив горных пород, вертикальная выработка, ствол вертикальных шахт, поля напряжений, процесс деформации, функция напряжения.*

Введение

Реальные горные породы, особенно в условиях их естественного залегания, проявляют упругие [6], пластические [7] и вязкие [18] свойства. При этом по данным ряда авторов [3, 7, 9, 11], даже прочные породы, с пределом прочности на одноосное сжатие $\sigma_{сж} = 8 \cdot 10^3 \div 12 \cdot 10^3$ *Па*, проявляют существенную нелинейность связи между напряжениями и деформациями уже при весьма небольших значениях действующих напряжений [2, 3, 11].

Определение параметров полей напряжений вокруг выработок с учетом всех особенностей деформирования пород представляет собой весьма и весьма сложную задачу в математическом отношении [3, 7, 8, 14]. В связи с этим, рассматривая свойства реальных массивов пород, устанавливают основные особенности их деформирования и в зависимости от этого применяют [2, 8] модель упругой, упругопластической и вязко-упругопластической среды. Для массивов с высокими пределами прочности пород и высокими значениями упругих характеристик – модуля упругости E и коэффициента поперечных деформаций ν (коэффициента Пуассона) – как правило, достаточная точность расчетов обеспечивается при наделении пород свойствами идеально-упругой среды.

С другой стороны, применение идеально-упругой модели для определения параметров полей напряжений и деформаций, формирующихся сразу же после образования выработок, закономерно и для массивов, сложенных менее прочными и менее упругими породами, поскольку скорость перераспределения напряжений и деформаций, как уже указывалось, весьма велики и поэтому пластические и вязкие свойства массива в первые моменты времени практически не успевают реализоваться. Вследствие этого упругие решения можно рассматривать как верхний предел возможных значений напряжений в реальных условиях.

Учитывая вышесказанные соображения рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) массива горных пород вокруг вертикальной выработки кругового поперечного сечения. Будем исходить из точной постановки трехмерной задачи о деформации полупространства, ослабленной глубокой цилиндрической полостью. При этом будем считать, что НДС полупространства, как трехмерного тела, строго подчиняется основным требованиям трехмерной линейной теории упругости и описывается её соответствующими уравнениями и соотношениями.

Постановка общей задачи. Основные уравнения и соотношения.

Для решения задачи отнесем пространства вокруг выработки к цилиндрической системе координат (r, θ, z), начало которой расположено на дневной поверхности массива, а ось z совпадает с осью выемки и направлена вниз (Рис.1). Будем обозначать через

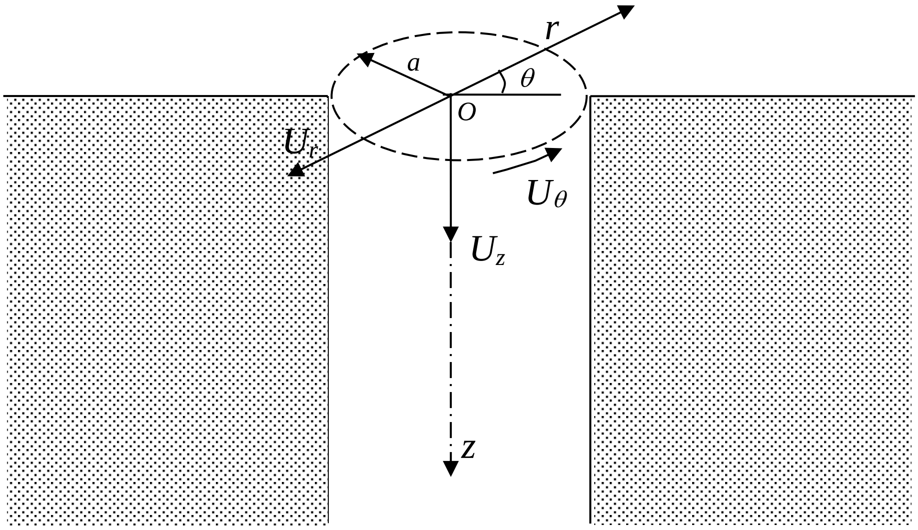

Рис.1. Схема области исследования.

$U_r,\ U_\theta,\ U_z$ перемещения точек массива в направлении осей $r,\ \theta,\ z$; через $\varepsilon_{rr},\ \varepsilon_{\theta\theta},\ \varepsilon_{zz},\ \varepsilon_{rz},\ \varepsilon_{r\theta},\ \varepsilon_{\theta z}$ – компоненты тензора деформаций в координатной системе $(r,\ \theta,\ z)$ и через $\sigma_{rr},\ \sigma_{\theta\theta},\ \sigma_{zz},\ \sigma_{rz},\ \sigma_{r\theta},\ \sigma_{\theta z}$ компоненты тензора напряжений в той же системе координат.

Для определения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений в задаче, т.е. для решения сформулированной задачи необходимо будет проинтегрировать трехмерные уравнения упругого равновесия без учета объемных сил:

$$\sigma_{ij,j}=0,\quad (i,j=r,\theta,z). \tag{1}$$

Из множества форм записи этих уравнений выберем уравнения статики при отсутствии объемных сил в форме Ламэ [5]:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 U_r+\frac{1}{1-rv}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}-\frac{U_r}{r^2}=0,\\
&\nabla^2 U_\theta+\frac{1}{1-rv}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial\theta}-\frac{U_\theta}{r^2}=0,\\
&\nabla^2 U_z+\frac{1}{1-rv}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=0,\quad 0\le z<\infty,\quad a\le r<\infty,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3}$$

- оператор Лапласа в цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$; $\varepsilon=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}$ – объемное расширение; v – коэффициент Пуассона; a - радиус выработки.

Использование уравнений равновесия будет значительно проще, если учесть, что компоненты вектора вращения – $\omega_r,\omega_\theta,\omega_z$ связаны с перемещениями U_r,U_z,U_θ следующими формулами.

$$\omega_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial U_z}{\partial\theta}-\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right),\quad \omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}-\frac{\partial U_z}{\partial r}\right),\quad \omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial U_r}{\partial\theta}\right]. \tag{4}$$

Преобразовав уравнения равновесия (2) с учетом (4) приходим к следующим более удобной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta}-\frac{\partial\omega_\theta}{\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}-\frac{2\mu r}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right)=0,\\
&\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-\frac{2\mu}{r(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta}\right)=0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda=\dfrac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$; $\mu=\dfrac{E}{2(1+v)}$ – коэффициенты Ламэ; E – модуль упругости (Юнга).

При этом объемная деформация – ε через перемещения $U_r,U_\theta,\ U_z$ выражается следующим образом:

$$\varepsilon=\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{U_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Поскольку рассматривается задача о деформации полупространства, ослабленного бесконечно глубокой цилиндрической выработкой кругового поперечного сечения, трехмерная задача может быть сведена к двухмерной, как осесимметричная. Для этого предполагается, что нагрузка, действующая на массив выработки, распределена симметрично относительно оси $0z$. Тогда, перемещения точек массива также распределяются симметрично, т.е. они не зависят от угловой координаты θ.

$$U_r = U_r(r,z);\ U_\theta = U_\theta(r,z);\ U_z = U_z(r,z).$$

В этом случае уравнения равновесия (5) значительно упрощаются и принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}+\frac{1-2v}{1-v}\frac{\partial\omega}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r}\right]+\frac{\partial^2U_\theta}{\partial z^2}=0,\\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{1-2v}{1-v}\frac{\partial(rw)}{\partial r}=0.\end{gathered}\tag{6}$$

При этом

$$\varepsilon=\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{U_r}{r}+\frac{\partial U_z}{\partial z};\ \ \omega=\omega_\theta;\ \ \omega_r=\omega_z=0.$$

В полученных уравнениях перемещение U_θ входит только во второе уравнение, а перемещения U_r и U_z входит только в первое и третье уравнениями. Поэтому можно отделить задачу определения перемещения U_θ от задачи определения перемещений U_r и U_z. Первая задача соответствует кручению цилиндрического слоя, имеющего конечную толщину, вторая – случаю деформированного состояния рассматриваемого массива пород, называемого осесимметричной задачей. Таким образом приходим к выводу, что в дальнейшим для решения задачи достаточно проинтегрировать уравнения

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}+v^*\frac{\partial\omega}{\partial z}=0;\ \ \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-\frac{v^*}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}=0,\tag{7}$$

где

$$v^*=(1-2v)/(1-v).$$

Представление решения задачи.

Решение системы (7) может быть получено различными способами. Например, можно свести к отысканию некоторых, вводимых определенным образом, вспомогательных функций – функций напряжений [5, 10, 15, 16], выразив предварительно перемещения и все компонента тензора напряжений через эти функции. Такие функции, являющимся решением осесимметричной задачи были введены различными авторами по – разному, исходя из направленности рассматриваемых задач.

Рассматриваемая нами задача о деформировании полупространства, ослабленной глубокой выработкой ориентирована на решение конкретной задачи механики горных пород. Поэтому, естественно предположить о том, что рассматриваемый массив горных пород работает только на сжатие. В этом случае изменения радиального перемещения должны носит. Исходя из указанных соображений, следуя процедуре работы [10, 17], но с некоторым отличием от неё, отвечающим сущности рассматриваемой конкретной задачи, введем первую из функций напряжений следующим образом:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{\mu\, r}{1-v}\omega;\ \ \frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{r(\lambda+2\mu)}{2(1-v)}\varepsilon,\tag{8}$$

где $\varphi(r,z)=\varphi$ – некоторая функция переменных r и z.

Подставив выражения ε и ω во второе уравнение (7) убеждаемся, что оно выполняется тождественно. Подставив (8) в первое уравнение (7) получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

или

$$\nabla^2\varphi=0,\tag{9}$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Следовательно, уравнения равновесия в перемещениях выполняются, если задавать ε и ω в виде

$$\omega=-\frac{1-v}{\mu\, r}\frac{\partial\phi}{\partial z};\ \ \varepsilon=-\frac{2(1-v)}{r(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

и если функция $\varphi=\varphi(r,z)$ определяется как решение уравнения (9).

Используя выражения для объемной деформации и вращения – (6) и (4) вышеприведенные выражения ε и ω через $\varphi(r,z)$ перепишем в следующей форме

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial(rU_r)}{\partial r}+\frac{\partial U_z}{\partial z}=-\frac{2(1-v)}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\varphi}{\partial r},\\ \frac{\partial U_r}{\partial z}-\frac{\partial U_z}{\partial r}=-\frac{2(1-v)}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{gathered}\tag{10}$$

Теперь введем новую вспомогательную функцию $\phi(r,z)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\lambda\frac{\partial(rU_r)}{\partial r}+r(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_z}{\partial z},\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=\mu\, r\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r}\right).\end{gathered}\tag{11}$$

Вычитая из первого уравнения (10) первое уравнение (11), поделенное на $\lambda+2\mu$, и поделив на μ второе уравнение (11) и складывая со вторым уравнением (10), получим

$$\frac{\partial (rU_r)}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left[\phi - 2(1-\nu)\varphi\right],$$
$$\frac{\partial (rU_r)}{\partial z} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\phi - 2(1-\nu)\varphi\right]. \qquad (12)$$

Проинтегрировав эти уравнения убеждаемся, что связь между радиальными перемещениями U_r и введенными функциями напряжений φ и ϕ имеет вид

$$U_r = \frac{1}{2\mu\, r}\left[\phi - 2(1-\nu)\varphi\right]. \qquad (13)$$

Из курса теории упругости [1, 5] известно, что перемещение U_r в осесимметричной задаче должно удовлетворить уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2 U_r = 0. \qquad (14)$$

Подставив в (14) выражение для U_r - (13) и выполнив дифференцирование, и имея при этом в виду (9), получим квазибигарманическое дифференциальное уравнение, определяющее функцию напряжений ϕ

$$\nabla^4 \phi = 0, \qquad (15)$$

где $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \left(\nabla^2\right)^2$ – квазибигармонический оператор. Отсюда следует, что введенная функция напряжений ϕ должна быть квазибигармонической.

Подставив в (11) значения перемещений U_r через функции ϕ и φ – (13), для производных по координатам *r* и *z* продольного перемещения U_z получим

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{1}{\mu\, r}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{2\mu\, r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\phi - 2(1-\nu)\varphi\right],$$
$$\frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{1}{(\lambda+2\mu)r}\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\lambda}{2\mu\, r(\lambda+2\mu)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\phi - 2(1-\nu)\varphi\right].$$

Отсюда, учитывая следующие равенства, имеющие места между упругими постоянными

$$\nu^* = \frac{1-2\nu}{1-\nu} = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}, \qquad \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu},$$

получим окончательно

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu\, r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\phi + 2(1-\nu)\varphi\right],$$
$$\frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu\, r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi - 2\nu\varphi\right). \qquad (13)_1.$$

Как известно [4, 13] условием интегрируемости этих уравнений является равенство

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$

подставив в которое, значения производных перемещения U_z с учетом уравнения (9), получим

$$\nabla^2 \phi = -2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Последнее уравнение является условием интегрируемости вышеприведенных уравнений относительно производных $\partial U_z/\partial r$ и $\partial U_z/\partial z$. Это условие будет выполнено, если задавать функцию ϕ в виде

$$\phi = \psi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad (16)$$

где $\psi = \psi(r, z)$ - функция координат *r* и *z*, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \psi = 0. \qquad (17)$$

Отсюда следует, что таким образом, функция напряжений ϕ представлена в форме (16). Выгодность представления (16) заключается в более правильном описании процесса деформации вокруг стволов вертикальных шахт кругового сечения.

Имеется другой способ выбора функции напряжений ϕ, приведенный в работе [10]. По нему, функцию ϕ, можно представить в виде

$$\phi = \psi + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (18)$$

Следует заметить, что последнее представление ϕ удобно использовать в задачах, требующих точного выполнения условий только на гранях *z = const*, т.е. при деформации тел типа слоя или полупространства.

В тех же случаях, когда определяющую роль играют условия на цилиндрических поверхностях, как это имеет место в рассматриваемой нами задаче, необходима использовать формулу (16). При необходимости выполнения граничных условий на взаимно ортогональных поверхностях *z = const* и *r = const*, следует применять оба варианта общего решения осесимметричной задачи.

В заключении раздела заметим, что следующим этапом решения общей задачи является представление всех отличных от нуля компонент тензоров деформаций и напряжений, с учетом осесимметричности рассматриваемой задачи.

Представление деформаций и напряжений через функции напряжения.

Воспользовавшись выражениями, связывающими составляющие тензора деформации с перемещениями в цилиндрической системе координат (r,θ,z) и при принятых предположениях относительно перемещений, т.е. при

$$U_r = U_r(r,z),\; U_\theta = 0,\; U_z = U_z(r,z),$$

имеем [10]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r};\; \varepsilon_{v\theta} = \frac{U_r}{r};\; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right);\; \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0.$$

Вводя в эти равенства вместо перемещений U_r и U_z функции ϕ и φ в соответствии с выражениями (13) и выражениями для производных перемещения U_z по координатам r и z, получим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{\varphi - 2(1-\nu)\phi}{r};\quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2\mu\, r}\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2\mu\, r}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi - 2\nu\phi);\quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu\, r^2}[\varphi - 2(1-\nu)\phi]. \tag{19}$$

Для нахождения компонентов напряжения используем закон Гука для изотропного тела с учетом осесимметричности задачи [1]

$$\sigma_{rr} = \lambda\varepsilon + 2\mu\,\varepsilon_{rr};\quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon + 2\mu\,\varepsilon_{\theta\theta};$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon + 2\mu\,\varepsilon_{zz};\quad \sigma_{rz} = 2\mu\,\varepsilon_{rz}.$$

при этом

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\,\varepsilon_{r\theta} = 0;\quad \sigma_{z\theta} = 2\mu\,\varepsilon_{z\theta} = 0;$$
$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = -\frac{2(1-\nu)}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1-2\nu}{\mu\, r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{20}$$

Подставив в последние выражения закона Гука значения деформаций по формулам (19) и выражение для объемного расширения (20), получим

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\phi + \frac{2(1-\nu)}{r^2}\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[\phi - 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r};$$
$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r};\quad \sigma_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial z};\quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}[\phi - 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2\nu}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{21}$$

Таким образом все четыре составляющие тензора напряжений – нормальные σ_{rr}, σ_{zz}, $\sigma_{\theta\theta}$ и касательное σ_{rz}, а также ненулевые компоненты вектора перемещений – радиальное U_r и продольное U_z выражены через введенные функции напряжений ϕ и φ.

Для сокращения записей можно ввести следующее обозначение [12]:

$$\overline{\psi} = \frac{1}{r^2}[\phi - 2\psi - 2(1-\nu)\varphi]. \tag{22}$$

С учетом (22) первое уравнение (21) преобразуем следующим образом:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[\varphi - 2(1-\nu)\phi] - \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[\varphi - 2(1-\nu)\phi - 2\psi + 2\varphi + 2\psi - 2\varphi] -$$
$$-\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[3\varphi - 2\psi - 2(1-\nu)\phi] + \frac{2}{r^2}\left[\varphi - \left(\psi + r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right].$$

Отсюда с учетом (2) и (16) следует, что

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \overline{\psi};$$

аналогично

$$\sigma_{\theta\theta} = \psi - \frac{2(1+\nu)}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}; \quad \sigma_{zz} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{23}$$

Выводы.

Таким образом, решена конкретная задача механики горных пород, т.е. рассматриваемый массив горных пород работает только на сжатие. Процесс деформации и напряженное состояние вокруг стволов вертикальных шахт кругового сечения выражена через функции напряжения. Компоненты деформации и напряженного состояния вокруг стволов вертикальных шахт кругового сечения выражены через функции напряжения. Получены формулы, позволяющие однозначно определить НДС полупространства с глубокой цилиндрической полостью кругового сечения, если найдены решения квазигармонических уравнений $\nabla^2\phi = 0,\ \nabla^2\psi = 0$ при соответствующих граничных условиях, заданных на цилиндрической поверхности полости, и моделирующих задачу о НДС массива горных пород, вокруг вертикальной выработки кругового поперечного сечения.

References:

1. Demidov, S.P. (1979). *Teoriya uprugosti*. Moscow: «Visshaya shkola». pp. 1-432.
2. Glushko, V.T., Dolinina, N.N., & Rozovskiy, M.I. (1973). *Ustoychivost gornix virabotok*. Kiyev: «Naukova dumka». pp. 1-193.
3. Guz, A.N. (1977). *Osnovi teorii ustoychivosti gornix virabotok*. Kiyev: «Naukova dumka», pp.1-244.
4. Kamke, E. (1976). *Spravochnik po obiknovennim differensialnim uravneniyam*. Moscow: «Nauka», pp. 1-576.
5. Koltunov, M.A., Vasilyev, Yu.N., & Chernix, V.A. (1975). *Uprugost i prochnost silindricheskix tel*. (pp.1-526). Moscow: «Visshaya shkola».
6. Lomtadze, V.D. (1990). *Fiziko-mexanicheskiye svoystva gornix porod. Metodi laboratornix issledovaniy*. (pp.1-328). L.: «Nedra».
7. Mosines, V.N., Pashkov, A.D., & Latishev, V.A. (1975). *Razrusheniye gornix porod*. (pp.1-215). Moscow: «Nedra».
8. Nesterenko, G.T., Shamanskaya, A.T., & Yegorov, P.V. (1970). Priblijenniy metod osenki napryajennogo sostoyaniya gornix porod. *V kn. Izmereniye napryajeniy v massive gornix porod*. (pp.46-49). Novosibirsk.
9. Rjevskiy, V.V., & Novik, G.K. (1967). *Osnovi fiziki gornix porod*. (pp. 1-187). Moscow: «Nedra».
10. Solyanik-Krassa, K.V. (1987). *Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti*. (pp.1-336). Moscow: «Stroyizdat».
11. Teresawa, K. (1976). On the elastik equilibrium of semi-infinite solid under given boudari conditions with same applications. *J. Of college of sci. Tokyo. Imp.Univ. 1976.v.337, N7*, pp.16-31.
12. Vasilyev, V.Z. (1988). *Osesimmetrichnaya deformasiya elementov stroitelnix konstruksiy*. (pp.1-87). L.: Stroyizdat.
13. Vigodskiy, M.Ya. (1973). *Spravochnik po visshey matematike*. (pp.1-870). Moscow: «Nauka».
14. Xalmuradov, R.I., Xudoynazarov, X.X., & Omonov, Sh.B. (2020). Obzor metodov osenki ustoychivosti porod i rascheta ankernoy i nabrizgbetonnoy krepey gornix virabotok. *Nauchno-texnicheskiy jurnal «Problemi arxitekturi i stroitelstva», №1*, pp.1-90-95.
15. Xudoynazarov, X. (2003). *Nestasionarnoye vzaimodeystviye silindricheskix obolochek i sterjney s deformiruyemoy sredoy*. (pp.1-350). Tashkent: Izd-vo med. lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
16. Xudoynazarov, X., & Amirkulova, F.A. (2011). *Vzaimodeystviye silindricheskix sloyev i obolochek so svyazannimi polyami*. (pp.1-336). Tashkent: Izdatelstvo "Navruz".
17. Xudoynazarov, X., & Nishonov, U.A. (2013). Raschet parametrov anker-nabrizgbetonnoy krepi dlya vertikalnix virabotok. *Vestnik SamGU, №5*, pp. 34-43.
18. Yerjanov, J.S., Toma, K., & Aytaliyev, Sh.M. (1984). *Reologiya i seysmomexanika porodnogo massiva*. (pp.1-198). Alma-Ata, Izd-vo «Nauka Kazaxstana».