SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 09 **Volume:** 89

Published: 21.09.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue QR – Article

Manzura Isakovna Po'latova
Bukhara Engineering-Technological Institute
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor to department of Advanced Mathematics,
Bukhara, Republic of Uzbekistan,
muhsin_5@mail.ru

Nurillo Raximovich Kulmuratov
Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology
Engineering, docent, Navoi,Uzbekistan
nurillo.Kulmuratov.64@mail.ru

Matlab Raxmatovich Ishmamatov
Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology
Engineering, docent, Uzbekistan
matkab1962@mail.ru

NATURAL VIBRATIONS OF VISCOELASTIC CYLINDRICAL SHELLS

Abstract*: In this paper, we consider the bending Eigen oscillations of viscoelastic shells of rotation, in which there are nodal lines in the meridional directions and along the generators. The viscoelastic properties of the material are described using the Boltzmann Voltaire integral. The numerical value of the natural frequency depending on the parameters of the mechanical system is obtained.*

Key words*: vibrations, Boltzmann Voltaire integral, analysis of the frequency spectrum of a cylindrical shell, Ritz method, curved coordinate system, hinge, conical, steroidal, elementary beam.*

Language*: Russian*

Citation: Po'latova, M. I., Kulmuratov, N. R., & Ishmamatov, M. R. (2020). Natural vibrations of viscoelastic cylindrical shells. *ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (89)*, 359-364.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-89-45 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.09.89.45

Scopus ASCC*: 2200.*

СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Аннотация*: В работе рассматриваются изгибные собственные колебания вязкоупругих оболочек вращения, при которых существуют узловые линии в меридиональных направлениях и по образующим. Вязко упругая свойства материала описывается с помощью интеграла Больцмана Вольтера. Получено численные значение собственные частоты в зависимости от параметров механической системы.*

Ключевые слова*: колебания, интеграла Больцмана Вольтера, анализ спектра частот цилиндрической оболочки, метод Ритца, криволинейный систем координат, шарнир, конический, тороидальный, элементарная балка.*

Введение

В данной работе рассматриваются колебания вязкоупругих оболочек вращения, при которых существуют узловые линии в меридиональных направлениях и по образующим[1,2,3,4]. Вязкоупругих свойства материала описывается с помощью интеграла Больцмана Воллтера [5,6]. Предполагая, что на перемещения по нормалям к срединной поверхности w, по касательным к круговым сечениям v и вдоль оболочки u не наложено предварительно никаких ограничений, получаем для вычисления квадрата частоты собственных колебаний шарнирно опертой упругой цилиндрической оболочки при фиксированном числе волн характеристическое уравнение имеет следующий вид [7]:

$$\xi^6 - L_2\xi^4 + L_1\xi^2 - L_0 = 0.$$

Корни этого уравнения осесимметричном и несимметричном отличается между собой и приведено в работе [7,8].

Из анализа амплитуд упругих колебаний приведенные в работе [7,8] следует, что низшая частота определяется в основном изгибными колебаниями w, вторая - продольными перемещениями u, третья колебаниями сдвига v. Для одной оболочки [9] приводит следующие значения приближенных частот:

$$n \geq 4 \quad \xi_1 = 18{,}36Ghz, \; \xi_2 = 918Ghz, \; \xi_3 = 1453Ghz$$

Поскольку для вычисления ξ_1 практически не требуется знать ξ_2 и ξ_3. Решаем задачу энергетическим методом Ритца, выбирая апроксимирующие функции так, чтобы помимо граничных условий, они удовлетворяли дополнительным условиям - отсутствие колебаний растяжения в кольцевом направлении и отсутствие сдвига в срединной поверхности.

Чтобы убедиться в целесообразности выбранных гипотез и возможности применения к оболочкам более сложной конфигурации конической или тороидальной с различными граничными условиями, мы произвели в первой части работы подробный анализ спектра частот цилиндрической оболочки с произвольными граничными условиями, а также рассмотрели совместные колебания двух цилиндрических оболочек различной жесткости. Чтобы проанализировать спектр частот собственных колебаний оболочки, обозначим перемещения, нормальные к координатной линии $x = const$, лежащей на срединной поверхности: w, касательные к круговым сечениям v, продольные u (рис. 1). Далее посмотрим криволинейную систему координат, x, θ, и примем, что u, v, w могут быть выражены в виде суммы произведений двух функций, из которых одна зависит от x, а другая θ.

Число волн в окружном направлении для замкнутой оболочки должно быть представлено как функция $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$.

Напишем перемещения в таком виде:

$$\begin{aligned} w &= \sum\sum A_{mn}W_m(x)\cos n\theta, \\ v &= \sum\sum B_{mn}V_m(x)\sin n\theta, \\ u &= \sum\sum C_{mn}U_m(x)\cos n\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры деформации цилиндрической оболочки определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R\partial\theta} - \frac{w}{R}, \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R\partial\theta}, \\ &\chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \tau = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} + \frac{v}{R}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Предположим, что оболочка в поперечном направлении не растягивается и что сдвиг в срединной поверхности отсутствует, т.е.

$$\varepsilon_2 = \omega = 0,$$

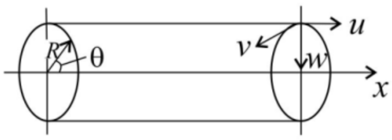

Рис.1. Расчетная схема цилиндрическая оболочка

тогда, очевидно, между функциями w, v и u можно будет установить зависимость а именно, для каждого фиксированного n должны удовлетворяться равенства

$$\left.\begin{aligned} &B_{mn}V_m(x)n - A_{mn}W_m(x) = 0, \\ &B_{mn}V_m^{'}(x) - C_{mn}\frac{U_m(x)}{R}n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Из равенства (1.3) получаем, что при любом значении x

$$\left.\begin{aligned} &B_{mn}V_m(x)n = \frac{A_{mn}}{n}W_m(x), \\ &C_{mn}U_m(x) = \frac{B_{mn}}{n}V_m^{'}(x)l = \frac{A_{mn}}{n^2}W_m^{'}(x)R. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и (2), находим выражения для перемещений и деформаций

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sum\sum A_{mn}W_m(x)\cos n\theta, \\ v &= \sum\sum A_{mn}\frac{W_m(x)}{n}\sin n\theta, \\ u &= \sum\sum A_{mn}\frac{W_m^{'}(x)}{n^2}R\cos n\theta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\sum\sum\frac{A_{mn}}{n^2}W_m''(x)R\cos n\theta,\\
&\varepsilon_2=\omega=0,\\
&\chi_1=\sum\sum A_{mn}W_m''(x)\cos n\theta,\\
&\chi_2=\sum\sum\frac{A_{mn}}{n^2}W_m(x)(1-n^2)\cos n\theta,\\
&\tau=\sum\sum\frac{A_{mn}}{R}W_m'(x)\frac{1-n^2}{n}\sin n\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Собственные частоты и формы колебаний оболочки определяем по методу Ритца. В качестве аппроксимирующей функции $W_m(x)$ выбираем собственную функцию колебания элементарной балки полоски, вырезанной вдоль образующей, W_m удовлетворяет уравнению

$$EJ\frac{d^4W}{dx^4}-p^2\rho hW=0,$$

откуда

$$W_m(x)=C_1chk_m\bar{x}+C_2shk_m\bar{x}+C_3\cos k_m\bar{x}+C_4\sin k_m\bar{x}. \tag{7}$$

Для вычисления параметров A_{mn} и собственной частоты оболочки служит следующая система уравнений:

$$\sum\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial A_{mn}}-p^2\frac{\partial T}{\partial A_{mn}}\right)=0, \tag{8}$$

где Π - потенциальная энергия оболочки;

T - кинетическая энергия оболочки, совершающая колебания с частотой p.

При принятых допущениях

$$\Pi=\frac{Eh}{1-\mu^2}\int_0^l\int_0^{2\pi}\varepsilon_1^2Rdxd\theta+\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\int_0^l\int_0^{2\pi}[x_1^2+x_2^2+$$
$$+2\mu x_1x_2+2(1-\mu)\tau^2]Rdxd\theta, \tag{9}$$
$$T=\rho h\int_0^l\int_0^{2\pi}[w_m^2+v_m^2+u_m^2]Rdxd\theta.$$

Дифференцируя (8) и (9) по A_{mn} с подстановкой в (7), получаем для каждого фиксированного значения n такую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&A_{1n}(a_{1n}^{1n}-p^2b_{1n}^{1n})+A_{2n}(a_{2n}^{1n}-p^2b_{2n}^{1n})+\ldots+A_{mn}(a_{mn}^{1n}-p^2b_{mn}^{1n})=0,\\
&A_{1n}(a_{1n}^{2n}-p^2b_{1n}^{2n})+A_{2n}(a_{2n}^{2n}-p^2b_{2n}^{2n})+\ldots+A_{mn}(a_{mn}^{2n}-p^2b_{mn}^{2n})=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{1n}(a_{1n}^{mn}-p^2b_{1n}^{mn})+A_{2n}(a_{2n}^{mn}-p^2b_{2n}^{mn})+\ldots+A_{mn}(a_{mn}^{mn}-p^2b_{mn}^{mn})=0,
\end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты a_{mn}^{mn} и a_{mn}^{pn} после интегрирования по φ будут:

$$a_{mn}^{mn}=\frac{Eh}{1-\mu^2}\pi R\left\{\int_0^l\frac{W''^2}{n^4}R^2dx+\frac{h^2}{12}\int_0^l\left[W_m''^2+\right.\right.$$
$$+\frac{W_m^2}{R^4}(1-n^2)^2+2\mu\frac{1-n^2}{R^2}W_m''W_m+ \tag{11}$$
$$\left.\left.+2(1-\mu)\frac{W_m'^2}{R^2}\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\right\}dx,$$

$$a_{mn}^{pn}=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\pi R\int_0^l\left[\frac{\mu}{R^4}(1-n^2)(W_m''W_p+\right. \tag{12}$$
$$\left.+W_p''W_m)+2(1-\mu)\frac{1-n^2}{n^2}\frac{W_m'W_p'}{R^2}\right]dx,$$

$$b_{mn}^{mn}=\pi\rho hR\int_0^l\left[W_m^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{W_m'^2R^2}{n^4}\right]d\bar{x} \tag{13}$$

$$b_{mn}^{pn}=\pi\rho hR\int_0^l\frac{W_m'W_p'}{n^4}dx.$$

При выводе формул (12) и (13) учитывалась ортогональность балочных функций, т.е.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l W_m(x)W_p(x)dx=0,\\
&\int_0^l W_m''(x)W_p''(x)dx=0.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Рассмотрев общую схему решения задачи об определении собственных колебаний оболочки, перейдем к рассмотрению частных случаев.

Оболочка консольная. В этом случае балочная функция $W_m(x)$ будет определяться так

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\left[ch-k_m\bar{x}-\cos k_m\bar{x}+B_m\left(\sin x_m\bar{x}-shk_mx\right)\right] \tag{15}$$

где

$$B_m=\frac{shk_m-\sin k_m}{chk_m+\cos k_m},\qquad \bar{x}=\frac{x}{l},$$
$$k_ml=1{,}875,\qquad 4{,}694,\qquad 7{,}854,\ldots.$$

Подставляя (15) в формулы (11) и (12) , получаем

$$a_{mn}^{mn}=\frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2}\pi R\left\{\frac{k_{mm}^4\eta^4}{n^4}+\beta\left[\begin{aligned}&k_{mm}^4\eta^4+(1-n^2)^2+2\mu(1-n^2)\omega_{mm}\eta^2+\\&+2(1-\mu)\frac{(1-n^2)^2}{n^2}a_{mm}\eta^2\end{aligned}\right]\right\}$$

$$a_{mn}^{pn}=\frac{Eh\pi R}{(1-\mu^2)R^2}=\beta\left[\begin{aligned}&\mu(1-n^2)(\omega_{mp}+\omega_{pm})\eta^2+\\&+2(1-\mu)a_{mp}\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\eta^2\end{aligned}\right] \tag{16}$$

где

$$\omega_{mp}=\int_0^l W_m''W_pdx,\qquad \alpha_{mp}=\int_0^l W_m'W_p'dx, \tag{17}$$

$$\eta=\frac{R}{l},\quad \beta=\frac{h^2}{12R^2}.$$

Подставляя (15) в (13) , находим

$$b_{mn}^{mn}=\rho h\pi R\left[1+\frac{1}{n^2}+\alpha_{mm}\frac{\eta^2}{n^4}\right], \tag{18}$$

$$b_{mn}^{mn}=\rho h\pi R\alpha_{mp}\frac{\eta^2}{n^4}.$$

Таблица 1. Для первых трех значений m имеем следующую таблицу значений ω_{mp} и a_{mp}

P \ M	1	2	3	1	2	3
1	0,880	1,881	1,57	4,69	-7,466	4,01
2	-11,66	-13,29	3,16	-	32,40	-22,27
3	27,06	-0,97	-46	-	-	77,38

Коэффициенты a_{mn}^{mn} можно определит $m=1,2,3$ с помощью табл. 3 можно записать так, обозначив отношение $R/l=\eta$ и исключив постоянный множитель π.

Для вычисления частот собственных колебаний можно воспользоваться формулой (16) , т.е. вместо n систем из m уравнений рассматривать только одно уравнение, состоящее из диагонального члена матрицы. Связь, существующая между формами $W_{m,n}$ и $W_{m+1,n}$, настолько мала, что ею можно пренебречь.

$$\frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh}n^4a_{1n}^{1n}=12,4\eta^4+\beta n^4\Big\{12,4\eta^4+(1-n^2)^2+ \quad (19)$$

$$+2\eta^2\left[-0,264(1-n^2)+3,29\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\Big\}$$

$$\frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh}n^4a_{2n}^{2n}=484\eta^4+\beta n^4\Big\{484\eta^4+(1-n^2)^2+$$

$$+2\eta^2\left[4(1-n^2)+22,6\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\Big\},$$

$$\frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh}n^4a_{1n}^{1n}=12,4\eta^4+\beta n^4\left\{\begin{array}{l}12,4\eta^4+(1-n^2)^2+\\ +2\eta^2\left[13,8(1-n^2)+34\dfrac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\end{array}\right\} \quad (20)$$

$$n^4b_{1n}^{1n}=n^4+n^2+4,69\eta^2,$$

$$n^4b_{2n}^{2n}=n^4+n^2+32,04\eta^2$$

$$n^4b_{3n}^{3n}=n^4+n^2+77,38\eta^2$$

В качестве примера нами рассматривался спектр частот оболочки №3 (см. табл. 1), который подтвердил отсутствие связи между формами W_{1n} и W_{2n}. В табл. 2 приведен для сравнения спектр частот в $гц$ шарнирно-опертой и консольной оболочек, а также жесткозакрепленной и свободной.

Таблица 2. Влияние характера закрепления оболочки на спектр собственных частот колебаний

Крепление \ n	5	6	7	10	12	14
Шарнирное	259	219	312	485	702	980
Консолное	143	176	304	485	702	980
Жесткое	525	388	378	515	721	990
Свободное	111	172	297	485	700	980

Оболочка жестко - закрепленная по концам

В этом случае функция $W_m(x)$ представляет собой собственную функцию колебания балки, жестко - закрепленной по краям:

$$W_m(x)=\frac{1}{l}[\sin k_m\bar{x}-shk_mx+B_m(\cos k_mx-chk_m\bar{x})], \quad (21)$$

где

$$B_m=-\frac{chk_m-\cos k_m}{chk_m+\sin k_m}, \quad (22)$$

здесь

$$\bar{x}=\frac{x}{l},\ k_m=4,73;\ 7,853;\ ...\frac{(2m+1)\eta}{2}. \quad (23)$$

k_m - корень характеристического уравнения $chk_m\cos k_m=1$. Коэффициенты (19) a_{mm} и ω_{mm} на основании (21) и (22) записываются так:

$$\alpha_{mn}=\frac{k_{mm}^2}{l^2}\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right),\ \omega_{mm}=-\frac{k_m^2}{l^2}\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right). \quad (24)$$

Коэффициенты характеристических уравнений (10) имеют вид:

$$n^4\frac{1-\mu^2}{En\pi}R^2a_{mn}^{mn}=k_m^4\eta^4+\beta n^4\{k_m^4\eta^4+(1-n^2)^2+$$
$$+2k_m^2\eta^2\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right)\left[-\mu(1-n^2)+(1-\mu)\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\Big\}, \quad (25)$$
$$n^4\frac{1-\mu^2}{Eh\pi}R^2a_{mn}^{pn}=\beta n^4\eta^2\left[-\mu(1-n^2)(\omega_{mp}+\omega_{pm})+\right.$$
$$\left.+2(1-\mu)\alpha_{mp}\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right],$$
$$\frac{n^4}{\pi}b_{mn}^{mn}=n^4+n^2+k_m^2\eta^2\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right)$$
$$\frac{n^4}{\pi}b_{mn}^{pn}=\alpha_{mp}\eta^2.$$

Несмотря на наличие побочных членов, связь между функциями $W_{mn}(x), W_{m+1,n}(x)$ настолько мала, что практически для вычисления частоты можно использовать выражение (26), а именно:

$$p_m^2=A^2\frac{k_m^4\eta^4+\beta n^4\left\{\begin{array}{l}k_m^4\eta^4+(1-n^2)^2+2k_m^2\eta^2\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right)\times\\ \times\left[-\mu(1-n^2)+(1-\mu)\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\right]\end{array}\right\}}{n^4+n^2+k_m^2\eta^2\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right)}, \quad (26)$$

$$A^2=\frac{E}{(1-\mu^2)R^2}.$$

Как следовало ожидать, в этом случае величины частот собственных колебаний выше, чем в первых двух случаях, только когда $n=14$ собственные частоты перестают зависеть от способа закрепления оболочки.

Свободная оболочка. Плавающей или свободной оболочкой называется такая оболочка, у которой на обоих концах

$$M=Q=T=0.$$

Балочная функция записывается так:

$$W_m(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\left[shk_m\bar{x}-\sin k_m\bar{x}-B_m(chk_mx-\cos k_m\bar{x})\right], \quad (27)$$

где

$$B_m=-\frac{chk_m-\cos k_m}{chk_m+\sin k_m},$$

$$k_1=0;\quad k_2=4,73;\quad k_3l=7,85. \quad (29)$$

Характерной особенностью такой оболочки является возникновение поперечных волн при отсутствии продольных. Общая приближенная формула будет всегда (26), а именно:

$$p_1^2=A^2\frac{k_m^4\eta^4+\beta n^4\left\{\begin{array}{l}k_m^4\eta^4+(1-n^2)^2+2k_m\eta^2\left[-\mu(1-n^2)\times\right.\\ \left.\times\left(1+\frac{2B_m}{k_m}\right)+(1-\mu)\frac{(1-n^2)^2}{n^2}\left(1+\frac{6B_m}{k_m}\right)\right]\end{array}\right\}}{n^4+n^2+k_m^2\eta^2\left(1+\frac{6B_m}{k_m}\right)}. \quad (30)$$

Для случая $k_m=0$ формула (30) обращается в известную формулу для кольца:

$$p^2=A^2\frac{\beta n^4(1-n^2)^2}{n^4+n^2};$$

Заключения

Таким образом, в работе поставлено задачи собственных колебаний вязкоупругих цилиндрических оболочек и разработано алгоритма решения поставленной задачи. Получено аналитическое выражение и численные значение собственные частоты в зависимости от параметров механической системы

References:

1. Gol`denvejzer, A.L. (1953). *Teorija uprugosti tonkih obolochek*, GITEL.
2. Lychev, S.A. (2005). *The dynamical reaction of 3-layered viscoelastic shell* / S. A. Lychev, Y. N. Sayfutdinov. XXXIII Summer School - Conference "Advanced problems in mechanics": Book of Abstracts, SPb., June 24-July 1, SPb., p. 80.
3. Breslavskij, V. E. (1953). O kolebanijah cilindricheskih obolochek, *Inzhenernyj sbornik*, t. XVI, AN SSSR, OTN.
4. Nashif, A., Dzhons, D., & Henderson, Dzh. (1988). Dempfirovanie kolebanij: Per. s angl, (p.448). Moskva: Mir.
5. Guz`, A.N., & Kubenko, V.D. (1982). *Teorija nestacionarnoj ajerogidrouprugosti obolochek*. (p.399). Kiev: Naukova dumka.
6. Safarov, I.I., Kulmuratov, N.R., Teshaev, M.K., & Kuldaschov, N.U. (2019). Interaction of No stationary Waves on Cylindrical Body. *Applied Mathematics*, 10, pp.435-447. http://www.scirp.org/journal/am.
7. Safarov, I.I., Kulmuratov, N.R., & Kuldaschov, N.U. (2019). Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. *Applied Mathematics*,10 , Pp468-484. http://www.scirp.org/journal/am.
8. Safarov, I.I., & Boltaev, Z.I. (2019). Interaction of Harmonic Waves on a Viscoelastic

Cylindrical Body. *Advance research Journal of Multidisciplinary Discoveries*, vol. 37, issue 1, pp.1-10.

9. Shmakov, V.P. (2011). *Izbrannye trudy po gidrouprugosti i dinamike uprugih konstrukcij*. (p.287). Moscow: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana.