**Impact Factor:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **ISRA** (India) | = **3.117** | **SIS** (USA) | = **0.912** | **ICV** (Poland) | = **6.630** |
| **ISI** (Dubai, UAE) | = **0.829** | **РИНЦ** (Russia) | = **0.156** | **PIF** (India) | = **1.940** |
| **GIF** (Australia) | = **0.564** | **ESJI** (KZ) | = **8.716** | **IBI** (India) | = **4.260** |
| **JIF** | = **1.500** | **SJIF** (Morocco) | = **5.667** | **OAJI** (USA) | = **0.350** |

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
**Theoretical & Applied Science**

**p-ISSN:** 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

**Year:** 2019 **Issue:** 07 **Volume:** 75

**Published:** 18.07.2019 **http://T-Science.org**

**QR – Issue** **QR – Article**

**Elbek Ismoilov**
Samarkand State University
Assistant to department of theoretical
and applied mechanics, Uzbekistan

**Firuza Kasimova**
Samarkand State University
Senior Lecturer to department of theoretical
and applied mechanics, Uzbekistan

**Bekzod Ortikov**
Samarkand State University
Student of Mechanical and
Mathematical Faculty, Uzbekistan

**Ablakul Abdirashidov**
Samarkand State University
Corresponding member of International
Academy, Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Docent to department of
theoretical and applied mechanics, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

# PARTICULAR SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATIONS USING THE APPROXIMATION METHODS

***Abstract**: In this paper, variational iteration method and Adomian decomposition method has been applied to obtain particular solution of boundary problems for the wave equations. It is shown that these methods are effective and more powerful mathematical tools for the solution of the partial differential equations.*

***Key words**: particular solution, boundary problem, wave equation, variational iteration method, Adomian decomposition method.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Ismoilov, E., Kasimova, F., Ortikov, B., & Abdirashidov, A. (2019). Particular solution of boundary problems for the wave equations using the approximation methods. *ISJ Theoretical & Applied Science, 07 (75),* 184-188.

***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-75-32 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.07.75.32

***Classifiers**: Theoretical research in mathematics.*

## ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ

***Аннотация**: В данной работе метод вариационных итераций и метод разложения Адомиана применены для нахождения частных решений краевых задач для волнового уравнения. Показано, что эти методы являются эффективными и более мощными математическими инструментами для решения дифференциальных уравнений в частных производных.*

***Ключевые слова**: частное решение, краевая задача, волновое уравнение, метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана.*

**Введение.**

В последние годы большое внимание уделяется исследованию линейных и нелинейных эволюционных уравнений математической физики, в том числе механики, биологии, химии и т.д. Так как многие физико-математические модели описываются с такими уравнениями, а решение краевых задач с такими дифференциальными уравнениями в частных производных являются одной их основных проблем инженерных наук. За прошлые несколько десятилетий математики, механики и физики сделали значительные успехи в этом направлении [8, 10, 12, 13]. Многие из этих уравнений не имеют точных аналитических решений. С другой стороны, решение этих нелинейных уравнений аналитически могут вести некоторые авторы, которые глубоко знают описание некоторых физических процессов и иногда принуждает их знать некоторые факты, которые просто не понятны посредством общих наблюдений. В результате эти уравнения должны быть решены, используя другие методы. Последние годы были разработаны различные методики решения таких уравнений, например, метод гомотопического анализа [1, 7], метод вариационных итераций (МВИ) [6, 7, 8], метод разложения Адомиана (МРА) [3, 8], метод гомотопического возмущения [5, 8], упрощенный метод укороченных разложений [2, 9, 10] и др., а также их различные модифицированные варианты [8, 10]. В данной работе метод вариационных итераций и метод разложения Адомиана применены для нахождения частных решений некоторых краевых задач для волнового уравнения.

**Постановка задачи.**

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных, то есть волновое уравнение:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),$$
$$0 < x < l,\ t > 0$$

и граничные условия (задача Дирихле):

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u(l,t) = \psi(t),$$

где $u(x,t)$ – искомая функция; $f(x,t),\ \varphi(t),\ \psi(t)$ – известные функции.

**Алгоритм метода вариационных итераций.**

По идее вариационно-итерационного метода [8] итерационное решение этого уравнения можно записать так:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(t,s)\left[Lu_n(x,s) + N\tilde{u}_n(x,s) - q(x,s)\right]ds, \quad n \ge 0,$$

где $\lambda$ – множитель Лагранжа; $\tilde{u}_n$ – вариационный член, т.е. $\delta\tilde{u}_n = 0$.

Начальное приближение имеет вид

$$u_0(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)\,t + \dots .$$

Окончательно имеем:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

**Алгоритм метода разложения Адомиана.**

Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных перепишем в виде

$$Lu(x,t) = q(x,t) - Nu(x,t),$$

где $L$ – дифференциальный оператор; $L^{-1}$ – интегральный оператор.

Применение обратного оператора к заданному уравнению дает соотношение вида:

$$u(x,t) = f(x,t) - L^{-1}\left[Nu(x,t)\right].$$

Основная идея МРА это составление функционального уравнения вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Отсюда имеем рекуррентное соотношение вида [8]:

$$u_0(x,t) = f(x,t);\quad u_{n+1} = -L^{-1}\left[Nu_n(x,t)\right],$$
$$n \ge 0.$$

**Пример 1.**

Найти решение следующей краевой задачи с волновым уравнением в виде

$$u_{tt} = 4u_{xx},\quad 0 < x < 2,\ t > 0, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = \sin 2t,$$
$$u(2,t) = 2\sin(1+t)\cos(1+t). \qquad (2)$$

Сначала введем следующие обозначения:

$$u_x(0,t) = \varphi(t),\quad \Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

где $\varphi(t)$ - пока неизвестная функция.

1) *Метод разложения Адомиана.*

$$\int_0^x d\eta \int_0^\eta u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi = \frac{1}{4}\int_0^x d\eta \int_0^\eta u_{tt}(\xi,t)d\xi,$$

отсюда имеем

$$u(x,t) = \sin 2t + x\varphi(t) + \frac{1}{4}\int_0^x d\eta \int_0^\eta u_{tt}(\xi,t)d\xi.$$

По идее МРА:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Исходя из этого имеем

$$u_0+u_1+u_2+...=\sin 2t+x\varphi(t)+$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_0^\eta (u_0+u_1+u_2+...)_{tt}\,d\xi$$

и

$$u_0=\sin 2t+x\varphi(t);$$
$$u_1=\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_0(\xi,t)]_{tt}\,d\xi=$$
$$=-\frac{x^2}{2!}\sin 2t+\frac{x^3}{4\cdot 3!}\Delta_t\varphi(t);$$
$$u_2=\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_1(\xi,t)]_{tt}\,d\xi=$$
$$=\frac{x^4}{4!}\sin 2t+\frac{x^5}{4^2\cdot 5!}\Delta_t^2\varphi(t);$$
$$\ldots;$$
$$u_n=\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_{n-1}(\xi,t)]_{tt}\,d\xi=$$
$$=(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin 2t+\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)$$

и т.д. Отсюда имеем

$$u(x,t)=u_0+u_1+...=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right]\sin 2t+$$
$$+x\varphi(t)+\frac{x^3}{4\cdot 3!}\Delta_t^2\varphi(t)+...+\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)+$$
$$+...=\cos x\sin 2t+x\varphi(t)+\frac{x^3}{4\cdot 3!}\Delta_t^2\varphi(t)+...+$$
$$+\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)+.... \qquad (3)$$

2) *Метод вариационных итераций.*

Для решения задачи МВИ примем обозначение

$$u(x,t)=\int_0^x v(\xi,t)d\xi+\sin 2t\,. \qquad (4)$$

Из уравнения (1) получим следующую интегро-дифференциальное уравнение:

$$v_x(x,t)=\frac{1}{4}\int_0^x v_{tt}(\xi,t)d\xi-\sin 2t, \qquad (5)$$
$$v(0,t)=\varphi(t).$$

По идее МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (5):

$$v_{n+1}(x,t)=v_n(x,t)+$$
$$+\int_0^x\lambda(\xi)\left[\frac{\partial v_n(\xi,t)}{\partial\xi}-\frac{1}{4}\int_0^\xi\Delta_t\tilde{v}_n(\eta,t)d\eta+\sin 2t\right]d\xi.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\lambda'(\xi)\big|_{\xi=t}=0$, $1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(\xi)=-1$.

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$v_0(x,t)=\varphi(t);$$
$$v_1(x,t)=\varphi(t)+\frac{x^2}{4\cdot 2!}\Delta_t\varphi(t)-x\sin 2t;$$
$$v_2(x,t)=\varphi(t)+\frac{x^2}{4\cdot 2!}\Delta_t\varphi(t)-x\sin 2t+$$
$$+\frac{x^4}{4^2\cdot 4!}\Delta_t^2\varphi(t)+\frac{x^3}{3!}\sin 2t;$$
$$\ldots;$$
$$v_n(x,t)=\left[-x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]\sin 2t+$$
$$+\varphi(t)+\frac{x^2}{4\cdot 2!}\Delta_t\varphi(t)+\frac{x^4}{4^2\cdot 4!}\Delta_t^2\varphi(t)+...+$$
$$+\frac{x^{2n}}{4^n(2n)!}\Delta_t^n\varphi(t);$$
$$v(x,t)=\lim_{n\to\infty}v_n(x,t)=$$
$$\left[-x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...\right]\sin 2t+\varphi(t)+$$
$$+\frac{x^2}{4\cdot 2!}\Delta_t\varphi(t)+\frac{x^4}{4^2\cdot 4!}\Delta_t^2\varphi(t)+$$
$$+...+\frac{x^{2n}}{4^n(2n)!}\Delta_t^n\varphi(t)+...=-\sin x\sin 2t+$$
$$+\varphi(t)+\frac{x^2}{4\cdot 2!}\Delta_t\varphi(t)+\frac{x^4}{4^2\cdot 4!}\Delta_t^2\varphi(t)+...+$$
$$+\frac{x^{2n}}{4^n(2n)!}\Delta_t^n\varphi(t)+....$$

Применяя замену (4), имеем

$$u(x,t)=\int_0^x v(\xi,t)d\xi+\sin 2t=$$
$$=\cos x\sin 2t+x\varphi(t)+\frac{x^3}{4\cdot 3!}\Delta_t\varphi(t)+ \qquad (6)$$
$$+...+\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)+... .$$

Теперь неизвестную функцию $\varphi(t)$ найдем из второго равенства (2) и (6). В результате имеем

$$u(2,t)=2\sin(1+t)\cos(1+t)=$$
$$=\cos 2\sin 2t+2\varphi(t)+\frac{2^3}{4\cdot 3!}\Delta_t\varphi(t)+$$
$$+\ldots+\frac{2^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)+\ldots;$$
$$2\sin(1+t)\cos(1+t)=\sin(2+2t)=$$
$$=\cos 2\sin 2t+\sin 2\cos 2t.$$

Исходя из этого имеем

$$\sin 2\cos 2t=\left[2-\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]\times$$
$$\times\cos 2t=2\varphi(t)+\frac{2^3}{4\cdot 3!}\Delta_t\varphi(t)+\ldots+ \quad (7)$$
$$+\frac{2^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}\Delta_t^n\varphi(t)+\ldots.$$

Тогда имеем

$$\varphi(t)=\cos 2t\,;\quad \frac{\Delta_t\varphi(t)}{4}=-\cos 2t\,;\ldots;$$
$$\frac{\Delta_t^n\varphi(t)}{4^n}=(-1)^n\cos 2t \text{ и т.д.} \quad (8).$$

В общем случае, функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению (7) иногда найти невозможно. Потому, что (7) является линейным дифференциальным уравнением бесконечного порядка. Если в (7) ограничимся порядком $m=2n$, тогда для ее можно найти функцию $\varphi(t)$. Но эта функция дает приближенное решение $u(x,t)$. Поэтому, в данном случае частное решение (7) нашли через уравнение (8), которое равно $\varphi(t)=\cos 2t$. Исходя из этого, решение задачи (1)-(2) имеет вид:

$$u(x,t)=\cos x\sin 2t+$$
$$+\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]\cos 2t=$$
$$=\sin(x+2t).$$

**Пример 2.**

Найти решение следующей краевой задачи с волновым уравнением в виде

$$u_{tt}=u_{xx}\,,\quad 0<x<\pi,\ t>0, \quad (9)$$
$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0. \quad (10)$$

Сначала введем следующие обозначения:

$$u_x(0,t)=\psi(t)\,,\quad \Delta_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

где $\psi(t)$ - пока неизвестная функция.

*Метод разложения Адомиана.*

$$\int_0^x d\eta\int_0^\eta u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi=\int_0^x d\eta\int_0^\eta u_{tt}(\xi,t)d\xi\,,$$

отсюда имеем

$$u(x,t)=x\psi(t)+\int_0^x d\eta\int_0^\eta u_{tt}(\xi,t)d\xi\,.$$

По идее МРА:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\,.$$

Исходя из этого имеем

$$u_0+u_1+u_2+\ldots=x\psi(t)+$$
$$+\int_0^x d\eta\int_0^\eta (u_0+u_1+u_2+\ldots)_{tt}d\xi$$

и

$$u_0=x\psi(t)\,;$$
$$u_1=\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_0(\xi,t)]_{tt}d\xi=\frac{x^3}{3!}\Delta_t\psi(t)\,;$$
$$u_2=\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_1(\xi,t)]_{tt}d\xi=\frac{x^5}{5!}\Delta_t^2\psi(t)\,;\ldots;$$
$$u_n=\int_0^x d\eta\int_0^\eta [u_{n-1}(\xi,t)]_{tt}d\xi=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta_t^n\psi(t)$$

и т.д. Отсюда имеем

$$u(x,t)=u_0+u_1+u_2+\ldots=x\psi(t)+$$
$$+\frac{x^3}{3!}\Delta_t^2\psi(t)+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta_t^n\psi(t)+\ldots. \quad (11)$$

Теперь найдем неизвестную функцию $\psi(t)$:

$$u(\pi,t)=\pi\psi(t)+\frac{\pi^3}{3!}\Delta_t^2\psi(t)+\ldots+$$
$$+\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta_t^n\psi(t)+\ldots=0. \quad (12)$$

Отсюда известно тривиальное решение линейного дифференциального уравнения (12) $\psi(t)=0$. В общем случае, трудно найти общее решение (12), но в следующих условиях можно найти частное решение (12):

$$\pi\psi(t)+\frac{\pi^3}{3!}\Delta_t^2\psi(t)+\ldots+\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta_t^n\psi(t)+$$
$$+\ldots=0=\sin\pi\sin t= .$$
$$=\left[\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]\sin t.$$

Отсюда имеем $\psi(t)=\sin t$;

$\Delta_t^2\psi(t)=-\sin t$; …; $\Delta_t^n\psi(t)=(-1)^n\sin t$ и т.д.

Тогда функция $\psi(t)=\sin t$ является решением дифференциального уравнения (12).

Отсюда решение задачи (9)-(10) имеет вид:

$$u(x,t)=\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]\sin t=$$
$$=\sin x\sin t.$$

**Выводы.**

Таким образом, изучены применения метода вариационных итераций и метода разложения Адомиана к приближенному решению краевых задач. Результаты сравнены с точным решением краевой задачи и результатом, полученным с помощью математического пакета Maple 17. Из сравнений ясно, что эти методы достаточно точны. Поэтому, они являются мощными математическими инструментами и с их помощью может быть решен большой класс нелинейных краевых задач, используемых в инженерных науках.

**References:**


1. Abdirashidov, A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdurashidov, A. A. (2018). Exact solution of fractional diffusion equations using the variational iteration method and Adomian decomposition method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №5*, pp.101-107.
2. Abdurashidov, A. A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdirashidov, A. (2018). Exact solution of some nonlinear evolutionary equations using the modified simple equation method. *Theoretical and Applied Science, 3(59)*.
3. Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. 1st Edn., Kluwer Academic, Boston.
4. Hayat, T., Ahmed, N., Sajid, M., & Asghar, S. (2007). On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel. *Comp. Math. Appl., 54*, pp.407-414.
5. He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. *Applied Math. Comput., 135*, pp.73-79.
6. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Comp. Math. Appl., 54*, pp.881-894.
7. Khatami, I., Tolou, N., Mahmoudi, J., & Rezvani, M. (2008). Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation. *J. Applied SCI. 8*, pp.848-853.
8. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. (p.761). Higher Education Press, Berlin Heidelberg.
9. Abdurashidov, A. A. (2018). Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshennim metodom ukorochennix razlojeniy. *Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas». Vipusk: 6*.
10. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki*. (p.368). Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. Dolgoprudniy: Intellekt.
11. Xayrer, E., Nyorsett, S., & Vanner, G. (1990). *Resheniye obiknovennix differensialnix uravneniy. Nejestkiye zadachi.* (p.512). Moskva: Mir.
12. Bisadze, A. V., & Kalinichenko, D. F. (1985). *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki*. Ucheb. posobiye dlya mexaniko-matemat. i fiz. spes. vuzov. 2-ye izd., dop. (p.310). Moskva: Nauka.
13. Salohiddinov, M. (2002). *Matematik fizika tenglamalari*. (p.448). Toshkent: O'zbekiston.