

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
PIHII (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: [10.15863/TAS](https://doi.org/10.15863/TAS)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 07 Volume: 75

Published: 09.07.2019 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



A.T. Zhakash
Taraz State University
PhD, ass. professor

E.A. Dzhakashova
Taraz State University
teacher

O.M. Tursynbay
Taraz State University
student

NUMERICAL METHODS FOR CALCULATING VIBRATIONS OF STRAIGHT RODS OF VARIABLE CROSS-SECTION

Abstract: The article presents numerical methods for calculating the oscillations of straight rods of variable cross-section. The Ostrogradsky – Hamilton principle was used to derive the equations of longitudinal, torsional and transverse vibrations of the rod - equations. Which were then solved under given boundary conditions by known methods of differential calculus.

Key words: vibrational calculations, some special methods of calculus of variations, vibrations of rods, the methods of the calculus of variations.

Language: Russian

Citation: Zhakash, A. T., Dzhakashova, E. A., & Tursynbay, O. M. (2019). Numerical methods for calculating vibrations of straight rods of variable cross-section. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 07 (75), 64-66.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-75-13> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.07.75.13>

Classifiers: SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Численные методы расчета колебаний прямых стержней переменного сечения

Аннотация: В статье приведены численные методы расчета колебаний прямых стержней переменного сечения. Был использован Принцип Остроградского – Гамильтона для вывода уравнений продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня- уравнений. Которые затем решались при заданных краевых условиях известными методами дифференциального исчисления.

Ключевые слова: вибрационным расчетам некоторых специальных методов вариационного исчисления, колебания стержней, методы вариационного исчисления.

Введение

Принцип Остроградского – Гамильтона был использован для вывода уравнений продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня – уравнений, которые затем решались при заданных краевых условиях известными методами дифференциального исчисления. Устанавливая эквивалентность решения краевых задач дифференциального исчисления с решением задачи об экстремуме функционала, принцип

Остроградского – Гамильтона открывает возможность привлечения к вибрационным расчетам некоторых специальных методов вариационного исчисления. Сюда относятся прежде всего так называемые прямые методы вариационного исчисления, применение которых оказывается эффективным в приближенных расчетах собственных частот и форм колебаний стержней переменного сечения с неравномерным распределением жесткости и массы. Из таких

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

методов наибольшее распространение в расчетной практике получили методы Ритца. [1]

Сущность метода Ритца заключается в приведении вариационной задачи к задаче на разыскание экстремума функции многих независимых переменных. Такое приведение осуществляется путем отбора из всех возможных допустимых функций, на которых рассматриваются значения функционала, некоторого специального класса функций, зависящих от конечного числа сначала неопределенных параметров. Подстановка таких функций в выражение функционала превращает его в функцию этих параметров, экстремум которой может быть найден известными элементарными способами.

По Ритцу значения функционала

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt. \quad (1)$$

рассматриваются на совокупности выражений вида

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x) \quad (2)$$

где α_i – параметры, варьируя которые мы получаем нужный класс допустимых функции, а

$\psi_i(x)$ – так называемые базисные или координатные функции- специально выбираемые или задаваемые известные функции, удовлетворяющие по крайней мере геометрическим крайевым условиям рассматриваемой задачи. На совокупности функций (2) соответствующий функционал обращается в функцию n независимых переменных $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$S(\psi) = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3)$$

и его первая вариация

$$\delta S[\psi] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i. \quad (4)$$

Найдя значения параметров α_i из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

И подставив их в (3), мы получим приближенное решение поставленной задачи.

Пример. Найти первую и вторую частоты колебаний балки с двумя сосредоточенными массами, каждая из которых равна массе всей балки, и с массой, равномерно распределенной на средней трети длины балки.

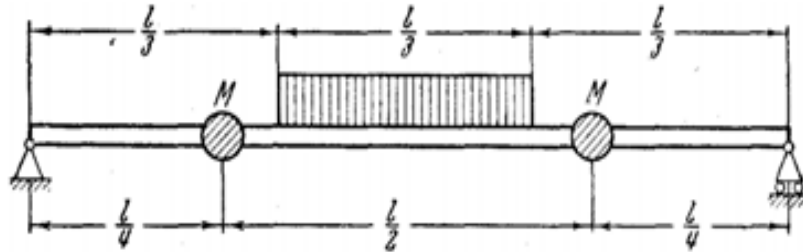


Рисунок 1. Расположение масс.

Балка опирается концами на шарнирные опоры. Обозначим через μ постоянную погонную массу балки. Пусть $\mu_0 = \mu$ – погонная масса

нагрузки среднего участка; $M = \mu l$ – масса каждого сосредоточенного груза. Тогда для максимальной кинетической и потенциальной энергии будем иметь выражения

$$\left. \begin{aligned} 2T_{max} &= \mu p^2 \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_{l/3}^{2l/3} \varphi^2(x) dx + l \varphi^2\left(\frac{l}{4}\right) + l \varphi^2\left(\frac{3l}{4}\right) \right], \\ 2\Pi_{max} &= EJ \int_0^l \varphi''^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В качестве базисных форм берем собственные формы колебаний однородной балки, свободно опертой по концам

$$\psi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

а в качестве минимизирующей формы – конечный ряд

$$\psi(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Для первого одночленного приближения, положив

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x}{l},$$

Находим по формуле (6)

$$\Pi_{11} = \frac{EJ\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ\pi^4}{2l^3},$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$$T_{11} = \mu \left[\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + l \sin^2 \frac{\pi}{4} + l \sin^2 \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{5\mu l}{3}.$$

После чего из уравнения $T_{11}p^2 - \Pi_{11} = 0$ получаем для верхней границы основной частоты

$$p_1 \leq \frac{5,38}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

При вычислении второго приближения основной частоты следует взять в качестве минимизирующей формы

$$\psi(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_3 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad (7)$$

так как первая форма симметрична относительно середины балки. Взяв вместо второго слагаемого в (7) $\sin \frac{2\pi x}{l}$, мы как показывают вычисления, не улучшим первое приближение. Подставив (7) в выражения для $T_{11}, T_{12}, T_{22}, \Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{22}$ получим

$$\Pi_{11} = \frac{EJ\pi^4}{2l^3}, \quad \Pi_{11} = \Pi_{21} = 0, \quad \Pi_{22} = \frac{81EJ\pi^4}{2l^3},$$
$$T_{11} = \frac{5\mu l}{3}, \quad T_{12} = T_{21} = \mu l, \quad T_{22} = \frac{5\mu l}{3}.$$

уравнение частот

$$\begin{vmatrix} \frac{EJ\pi^4}{2l^3} - \mu p^2 \frac{5l}{3} & -\mu p^2 l \\ -\mu p^2 l & \frac{81EJ\pi^4}{2l^3} - \mu p^2 \frac{5l}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

если положить,

$$\frac{EJ\pi^4}{\mu l^4 p^2} = x,$$

будет иметь вид

$$\left(0,5x - \frac{5}{3}\right) \left(40,5x - \frac{5}{3}\right) - 1 = 0$$

или

$$x^2 - 3,374x + 0,888 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 3,347; \quad x_2 = 0,027$$

и

$$p_1 = \frac{5,36}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

Второе приближение мало отличается от первого, и поэтому искать следующее приближения нет надобности.

Для вычисления второй частоты в выражении минимизирующей формы следует взять слагаемые с четными аргументами. Так, имея в виду первое приближение второй частоты, полагаем

$$\psi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Тогда

$$T_{11} = 1,299\mu l; \quad \Pi_{11} = \frac{4EJ\pi^2}{l^2}$$

и из уравнения

$$T_{11}p^2 - \Pi_{11} = 0$$

находим

$$p_2 \approx 17,31 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Вычислим второе приближение для p_2 найдем, что в пределах первых трех десятичных знаков оно совпадает с первым, на котором и следует закончить расчет.

References:

1. Babakov, I. M. (1968). *Teoriya kolebaniya*. (p.58). Moscow: Nauka.
2. Bogolyubov, N. N., & Mitropol'skiy, Y. A. (1990). *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy*. Moscow: Fizmatgiz.
3. Svetlitskiy, V. A. (2001). *Mekhanika absolyutno gibkikh sterzhney*. Pod red. A.Yu. Ishlinskogo (Eds.). Moscow: Izd-vo MAI.
4. Starzhenskiy, I. A. (1972). *Differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya*. (p.720). Moscow: Nauka.
5. Malkin, I. G. (1956). *Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy*. (p.172). Moscow: Gostekhizdat.
6. Kononenko, V. O. (1974). *Kolebatel'nye sistemy s ogranichennym vozbuzhdeniem*. Moscow: Nauka.
7. Mitropol'skiy, Y. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike*. (p.232). Kiev: Naukovadumka.
8. Moiseev N. N. (1981). *Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki*. (p.502). Moscow: Nauka.
9. Nayfe, A. (1976). *Metody vozmushcheniy*. Moscow: Izdatel'stvo «Mir».
10. Nayfe, A. (1984). *Vvedenie v metody vozmushcheniy*. (p.402). Mir.
11. Andronov, A. A., Vitt, A. A., & Khaykin, S. E. (1959). *Teoriya kolebaniy*. (p.104). Moscow: Fizmatgiz.
12. Kryukov, B. I. (1987). *Samosinkhronizatsiya vibromashin*. Moscow. *Zhurnal. Mashinostroenie*, p.412.