УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-51-55

Павел Александрович Чухрий,
магистрант,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: pchuxrij@mail.ru

Решение первой краевой задачи о продольных колебаниях составного стержня[1]

Рассмотрена первая краевая задача на отрезке для волнового уравнения с условиями сопряжения в точке разрыва параметров составного стержня. Посредством конечных формул задача сведена к аналогичной задаче для однородного стержня. Решение исходной задачи получено в явном виде.

Ключевые слова: продольные колебания кусочно-однородного стержня, первая краевая задача для волнового уравнения с условиями сопряжения

В статье [1] рассмотрена задача о продольных колебаниях кусочно-однородного стержня. В указанной статье доказана единственность решения задачи и полнота соответствующих собственных функций для обыкновенного дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом без построения явного решения рассматриваемой задачи. В данной статье построено явное решение задачи о колебании кусочно-однородного стержня при тех же предположениях, что и в статье [1].

Рассмотрим на отрезке $-l_1 < x < l$ упругий стержень, состоящий из двух однородных частей: $-l_1 < x < 0$ с плотностью ρ_1 и модулем Юнга k_1 и $0 < x < l$ с плотностью ρ_2 и модулем Юнга k_2 (ρ_i и k_i – заданные постоянные) [2, с. 27]. Как и в статье [1], предположим, что время прохождения волной отрезков $D_1 = (-l_1 < x < 0)$ и $D_2 = (0 < x < l)$ одинаково, т. е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}, \tag{1}$$

где

$$a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}, \tag{2}$$

a_i – скорость движения волн на отрезке D_i. Отсюда для продольных смещений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ точек x упругого стержня в моменты времени $t > 0$ на соответствующих отрезках $-l_1 < x < 0$ и $0 < x < l$ первая краевая задача имеет вид [1]

[1]Работа выполнена в рамках гранта Совета по НиИД Забайкальского государственного университета № 250-ГР.

$$\partial_{tt}u_1 = a_1^2\partial_{xx}u_1, \qquad u_{1|t=0} = 0, \qquad \partial_t u_{1|t=0} = 0, \tag{3}$$

$$\partial_{tt}u_2 = a_2^2\partial_{xx}u_2, \qquad u_{2|t=0} = \varphi(x), \qquad \partial_t u_{2|t=0} = \psi(x), \tag{4}$$

$$u_{1|x=-l_1} = 0, \qquad u_{2|x=l} = 0, \tag{5}$$

$$x = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_x u_1 = k_2\partial_x u_2, \tag{6}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2$; $\varphi(x) \in C^2(R^+)$, $\psi(x) \in C^1(R^+)$ – заданные функции. Задача (3)–(6) имеет однородные условия на отрезке $-l_1 < x < 0$, что не умаляет общности, т. к. при однородных условиях на отрезке $0 < x < l$ задача решается аналогично, а в общем случае решение задачи представимо в виде суммы решений задач с однородными условиями на одном из отрезков.

Для решения задачи (3)–(6) перейдём на отрезке D_1 к новой переменной

$$\xi = \frac{a_2}{a_1}\,x, \qquad -l_1 < x < 0, \tag{7}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 < x < 0$ относительно точки $x = 0$. При этом из (1) следует $-l < \xi < 0$. Отсюда для функций $u_1(\xi, t)$ и $u_2(x, t)$ получим задачу с одинаковым уравнением на отрезках одинаковой длины соответственно $-l < \xi < 0$ и $0 < x < l$:

$$\partial_{tt}u_1 = a_2^2\partial_{\xi\xi}u_1, \qquad u_{1|t=0} = 0, \qquad \partial_t u_{1|t=0} = 0, \tag{8}$$

$$\partial_{tt}u_2 = a_2^2\partial_{xx}u_2, \qquad u_{2|t=0} = \varphi(x), \qquad \partial_t u_{2|t=0} = \psi(x), \tag{9}$$

$$u_{1|\xi=-l} = 0, \qquad u_{2|x=l} = 0, \tag{10}$$

$$u_{1|\xi=0} = u_{2|x=0}, \qquad K_1\partial_\xi u_{1|\xi=0} = k_2\partial_x u_{2|x=0}, \tag{11}$$

где

$$K_1 = \frac{k_1 a_2}{a_1}. \tag{12}$$

Представим решение задачи (8)–(11) в виде решения общей задачи сопряжения для кусочно-однородных полуцилиндров D_i в R^m с уравнениями $\partial_{xx}u_i + Lu_i = H_i$ при идеальном контакте [3, с. 31]

$$u_1(\xi, t) = \frac{2k_2}{k_2 + K_1}\,f(\xi, t),$$

$$u_2(x,t) = f(x,t) + \frac{k_2 - K_1}{k_2 + K_1}\, f(-x,t)$$

или с учётом (2), (12) в виде

$$u_1(\xi,t) = \frac{2p_2}{p_2+p_1}\, f(\xi,t), \qquad -l < \xi < 0, \tag{13}$$

$$u_2(x,t) = f(x,t) + \frac{p_2-p_1}{p_2+p_1}\, f(-x,t), \qquad 0 < x < l, \tag{14}$$

где $p_i = \sqrt{k_i\rho_i}$. Отсюда для функции $f(x,t)$ получим классическую первую краевую задачу на однородном отрезке $-l < x < l$

$$\partial_{tt} f = a_2^2 \partial_{xx} f, \qquad f_{|x=-l} = 0, \quad f_{|x=l} = 0, \tag{15}$$

$$f_{|t=0} = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ \varphi(x), & 0 < x < l, \end{cases} \qquad \partial_t f_{|t=0} = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ \psi(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{16}$$

Решение задачи (15), (16) строится методом Фурье [2, с. 82] в виде

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sin a_2\lambda_n t + b_n \cos a_2\lambda_n t) \sin\lambda_n(x+l), \tag{17}$$

где

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\lambda_n(x+l)dx, \tag{18}$$

$$c_n = \frac{2}{a_2 n\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\lambda_n(x+l)dx, \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{2l}. \tag{19}$$

Таким образом, решение исходной задачи (3)–(6) строится в явном виде по формулам (7), (13), (14), (17)–(19):

$$u_1(x,t) = \frac{2p_2}{p_2+p_1}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\lambda_n\left(\frac{a_2}{a_1}\,x + l\right), \qquad -l_1 < x < 0,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left[\sin\lambda_n(x+l) + \frac{p_2-p_1}{p_2+p_1}\sin\lambda_n(l-x)\right], \qquad 0 < x < l,$$

где $T_n(t) = c_n \sin a_2\lambda_n t + b_n \cos a_2\lambda_n t$.

Список литературы

1. Ломов И. С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 358–365.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

3. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с плёночными включениями и плёночными границами. Чита: ЗабГУ, 2017. 234 с.

Статья поступила в редакцию 07.04.2018; принята к публикации 11.05.2018

Библиографическое описание статьи

Чухрий П. А. Решение первой краевой задачи о продольных колебаниях составного стержня // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 51–55. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-51-55.

Pavel A. Chuhrii,
Master Student,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: pchuxrij@mail.ru

Solution of the First Boundary Value Problem of Longitudinal Vibrations of a Composite Rod[1]

The first boundary value problem for the wave equation with the conjugation conditions at the point of discontinuity of the composite rod parameters is considered. By means of finite formulas, the problem is reduced to a similar problem for a homogeneous rod. The solution of the original problem is obtained explicitly.

Keywords: longitudinal vibrations of a piecewise homogeneous rod, the first boundary value problem for the wave equation with conjugation conditions

References

1. Lomov I. S. Negladkiye sobstvennyye funktsii v zadachakh matematicheskoy fiziki // Differentsialnyye uravneniya. 2011. T. 47, № 3. S. 358–365.

2. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.

[1]This work was carried out within the framework of the Grant of the Council of Science and Research of Transbaikal State University No. 250-GR.

3. Kholodovskii S. E. Zadachi matematicheskoy fiziki v oblastyakh s plenochnymi vklyucheniyami i plenochnymi granitsami. Chita: ZabGU, 2017. 234 s.

Received: April 07, 2018; accepted for publication May 11, 2018

Reference to article

Chuhrii P. A. Solution of the First Boundary Value Problem of Longitudinal Vibrations of a Composite Rod // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 51–55 DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-51-55.