

УДК 517.956

DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50

*Святослав Евгеньевич Холодовский<sup>1</sup>,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),  
e-mail: hol47@yandex.ru*

*Павел Александрович Чухрий<sup>2</sup>,  
магистрант,  
Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),  
e-mail: pchuxrij@mail.ru*

### Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны<sup>3</sup>

Рассмотрена задача Коши для неограниченной струны, состоящей из двух однородных частей с различной плотностью. Дана линейная постановка задачи. Получено решение задачи в явном виде в однократных квадратурах. Построены графики струн с определённым шагом по времени для различных комбинаций плотностей составной струны.

**Ключевые слова:** поперечное движение кусочно-однородной струны, задача Коши для волнового уравнения, графическая иллюстрация движения составной струны

**Введение.** В реальных условиях под воздействием внешних сил протяжённые объекты совершают те или иные колебания. К ним относятся пролёты мостов, балки, антенны, рельсы и другие объекты. В математических моделях указанные процессы приводят к краевым задачам математической физики для волновых уравнений. Продольные колебания кусочно-однородных (составных) струн и стержней рассмотрены в работах [2, с. 30; 4]. В задачах о поперечных колебаниях струн в учебнике [1, с. 20] допускается зависимость силы натяжения струны от координаты. В других учебниках [3, с. 13; 5, с. 24,] показано, что в линейной модели сила натяжения является постоянной. В данной статье поставлена и решена задача о поперечном движении составных струн. Отметим, что решение этой задачи допускает наглядную графическую иллюстрацию по сравнению с задачами о продольных колебаниях.

**Постановка задачи.** Рассмотрим в плоскости  $x, u$  движение неограниченной струны  $-\infty < x < \infty$ , состоящей из двух однородных частей с различной плотностью  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно в зонах  $D_1 = (-\infty < x < 0)$  и  $D_2 = (0 < x < \infty)$  ( $\rho_i$  – заданные постоянные). Пусть струна находится под действием силы натяжения, модуль которой равен  $T$ . Ось  $x$  совместим с положением равновесия струны и

<sup>1</sup>С. Е. Холодовский – организатор исследования.

<sup>2</sup>П. А. Чухрий формулирование выводов и обобщение итогов реализации коллективного исследования.

<sup>3</sup>Работа выполнена в рамках гранта Совета по НИИД Забайкальского государственного университета № 250-ГР.

рассмотрим поперечные отклонения  $u_i(x, t)$  точек струны от оси  $x$  в зонах  $D_i$ . Отсюда для функций  $u_i(x, t)$  в  $D_i$  задача имеет вид

$$\partial_{tt}u_1 = a_1^2 \partial_{xx}u_1, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_1|_{t=0} = 0, \quad x < 0, \quad (1)$$

$$\partial_{tt}u_2 = a_2^2 \partial_{xx}u_2, \quad u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$x = 0 : \quad u_1 = u_2, \quad \partial_x u_1 = \partial_x u_2, \quad (3)$$

где  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $t$  – время,  $a_i^2 = T/\rho_i$ ;  $\varphi(x) \in C^2(R^+)$ ,  $\psi(x) \in C^1(R^+)$  – заданные функции. В принятой модели проекции силы натяжения на оси  $x$  и  $u$  на правом конце любого элемента струны соответственно равны  $T \cos \alpha = T(1 + \partial_x^2 u_i)^{-1/2} \approx T$  и  $T \sin \alpha = T \partial_x u_i (1 + \partial_x^2 u_i)^{-1/2} \approx T \partial_x u_i$ , где  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику  $u = u_i(x, t)$  в указанной точке, при этом сила натяжения не зависит от  $x$  и  $t$  [3, с. 13; 5, с. 24].

Первое условие сопряжения (3) выражает непрерывность струны в точке  $x = 0$ . Для вывода второго условия (3) выделим малый элемент струны  $AB$  на отрезке  $(0, x_0)$ . Применяя к  $AB$  второй закон Ньютона в проекции на ось  $u$ , получим  $\rho_2 x_0 \partial_{tt} u_2 = T \partial_x u_2|_{x=x_0} - T \partial_x u_1|_{x=0}$ . Здесь учитываем, что на левом конце силу натяжения создаёт часть струны в зоне  $D_1$ . Отсюда при  $x_0 \rightarrow 0$  получим второе условие (3). Аналогичный результат получим, если рассмотреть элемент струны на отрезке  $(-x_0, x_0)$ . Отсюда в отличие от продольных колебаний, а также от поперечных колебаний струны с точечной массой [2, с. 30; 4; 6] проекция сил натяжения на ось  $u$  непрерывна, включая точку разрыва плотности  $x = 0$ .

Для решения задачи (1)–(3) посредством подстановки

$$\xi = \frac{a_2}{a_1} x \equiv \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} x, \quad x < 0$$

приведём уравнение (1) к виду уравнения (2). Отсюда для функции  $u_1(\xi, t)$  при  $\xi < 0$  и функции  $u_2(x, t)$  при  $x > 0$  получим задачу

$$\partial_{tt}u_1 = a_2^2 \partial_{\xi\xi}u_1, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_1|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$\partial_{tt}u_2 = a_2^2 \partial_{xx}u_2, \quad u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad (5)$$

$$u_1|_{\xi=0} = u_2|_{x=0}, \quad \sqrt{\rho_1} \partial_\xi u_1|_{\xi=0} = \sqrt{\rho_2} \partial_x u_2|_{x=0}. \quad (6)$$

**Решение задачи.** Представляя решение задачи (4)–(6) в виде

$$u_1(\xi, t) = \frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} f(\xi, t), \quad \xi < 0, \quad (7)$$

$$u_2(x, t) = f(x, t) + \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} f(-x, t), \quad x > 0, \quad (8)$$

для функции  $f(x, t)$  получим классическую задачу Коши для однородной струны

$$\partial_{tt} f = a_2^2 \partial_{xx} f, \quad -\infty < x < \infty, \quad (9)$$

$$f|_{t=0} = \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \varphi(x), & x > 0, \end{cases} \quad \partial_t f|_{t=0} = \Psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \psi(x), & x > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение задачи (9), (10) строится по формуле Даламбера [5, с. 50]

$$f(x, t) = \frac{\Phi(x - a_2 t) + \Phi(x + a_2 t)}{2} + \frac{1}{2a_2} \int_{x-a_2 t}^{x+a_2 t} \Psi(z) dz. \quad (11)$$

Отметим, что для широкого класса начальных функций (10) функция  $f(x, t)$  (11) строится в конечном виде.

Из выражений (4)–(8) следует, что если  $\rho_1 < \rho_2$  (струна в  $D_1$  легче струны в  $D_2$ ), то набегающая из  $D_2$  в  $D_1$  волна  $Q(x + a_2 t)$  в зоне  $D_1$  растягивается по осям  $x, u$  и движется быстрее (со скоростью  $a_1 = \sqrt{T/\rho_1}$ ), чем в  $D_2$ . При  $\rho_1 > \rho_2$  волна  $Q(x + a_2 t)$  в  $D_1$  сжимается по осям  $x, u$  и движется медленнее, чем в  $D_2$ .

В предельном случае при  $\rho_1 \rightarrow 0$  (струна в  $D_1$  «невесома») из второго условия сопряжения (6), а также из формулы (8) в пределе получим  $\partial_x u_2|_{x=0} = 0$ , что соответствует свободному левому концу полуограниченной струны в  $D_2$ , при этом  $u_2(x, t) = f(x, t) + f(-x, t)$ . В другом предельном случае при  $\rho_1 \rightarrow \infty$  (струна в  $D_1$  «сверхтяжёлая») из (7) и первого условия (6) в пределе получим  $u_2|_{x=0} = 0$ , что соответствует неподвижному левому концу полуограниченной струны в  $D_2$ , при этом  $u_2(x, t) = f(x, t) - f(-x, t)$  в  $D_2$  и  $u_1 \equiv 0$  в  $D_1$ . Отсюда задача (1)–(3) описывает движение струны в промежуточных случаях к указанным предельным случаям. Полученные результаты согласуются с физическими представлениями.

Рассмотрим задачу (4)–(6) при  $a_2 = 1$  ( $T = \rho_2$ ) для начальных функций вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2h(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b), \end{cases} \quad \psi(x) = 0, \quad (12)$$

где  $a > 0, h(a) = h(b) = 0$ . Отсюда начальные условия (10) примут вид

$$f|_{t=0} = \begin{cases} 2h(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b), \end{cases} \quad \partial_t f|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Решение (11) задачи Коши (9), (13) для моментов времени  $0 < t < (b - a)/2$  и  $t > (b - a)/2$  примет соответственно вид

$$f(x, t) = \begin{cases} h(x+t), & a-t < x < a+t, \\ h(x+t) + h(x-t), & a+t < x < b-t, \\ h(x-t), & b-t < x < b+t \end{cases} \quad (14)$$

и

$$f(x, t) = \begin{cases} h(x+t), & a-t < x < b-t, \\ h(x-t), & a+t < x < b+t. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь указаны носители функции  $f(x, t)$ , т.е.  $f(x, t) = 0$  вне указанных промежутков для переменной  $x$ .

Пусть  $3a > b$ , т.е. при  $t = a$ , когда волна  $h(x+t)$  из  $D_2$  доходит до точки  $x = 0$ , носители этой волны и прямой волны  $h(x-t)$  не пересекаются. Прямая волна  $h(x-t)$  в зоне  $D_2$  двигается вправо и не пересекает точку  $x = 0$ . Поэтому ниже слагаемое  $h(x-t)$  в  $u_2(x, t)$  опускаем. Тогда с учётом (7), (8), (14), (15) решение исходной задачи (1)–(3) с начальными функциями (12) для указанных ниже моментов времени 1)–5) найдём в виде

$$1) \quad 0 < t < \frac{b-a}{2} : \quad u_1(x, t) = 0, \quad x < 0;$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} h(x+t), & a-t < x < a+t, \\ h(x+t) + h(x-t), & a+t < x < b-t, \\ h(x-t), & b-t < x < b+t; \end{cases}$$

$$2) \quad \frac{b-a}{2} < t < a : \quad u_1(x, t) = 0, \quad x < 0;$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} h(x+t), & a-t < x < b-t, \\ h(x-t), & a+t < x < b+t; \end{cases}$$

$$3) \quad a < t < \frac{a+b}{2} : \quad u_1(x, t) = \frac{2}{d+1} h(dx+t), \quad \frac{a-t}{d} < x < 0;$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} h(x+t) + h(t-x)(1-d)/(1+d), & 0 < x < t-a, \\ h(x+t), & t-a < x < b-t; \end{cases}$$

$$4) \quad \frac{a+b}{2} < t < b : \quad u_1(x, t) = \frac{2}{d+1} h(dx+t), \quad \frac{a-t}{d} < x < 0;$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} h(x+t) + h(t-x)(1-d)/(1+d), & 0 < x < b-t, \\ h(t-x)(1-d)/(1+d), & b-t < x < t-a; \end{cases}$$

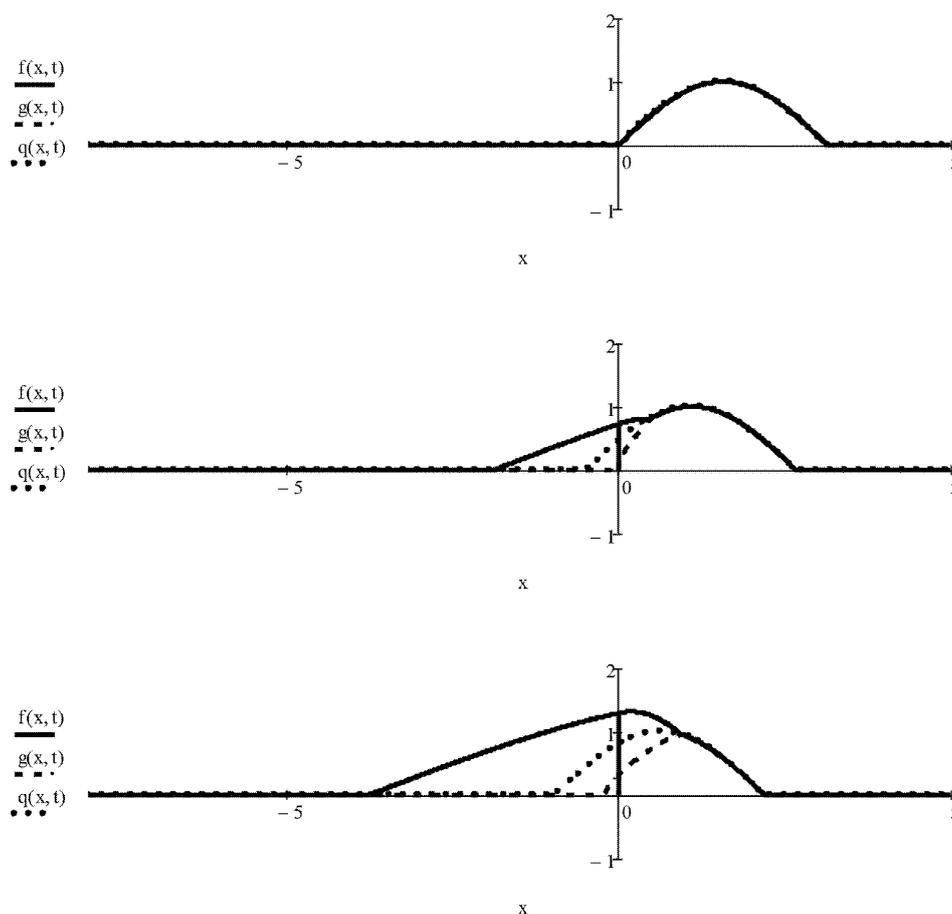
$$5) \quad t > b: \quad u_1(x, t) = \frac{2}{d+1} h(dx+t), \quad \frac{a-t}{d} < x < \frac{b-t}{d};$$

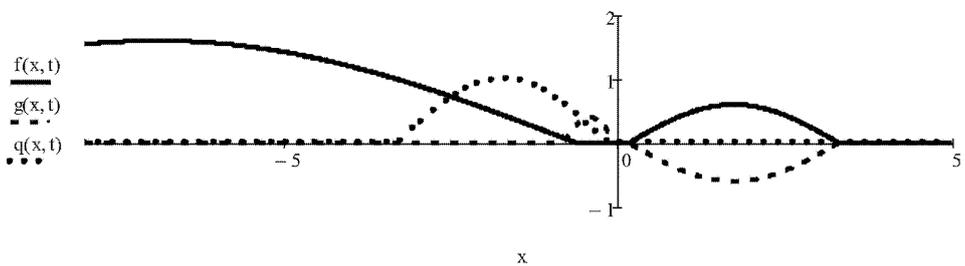
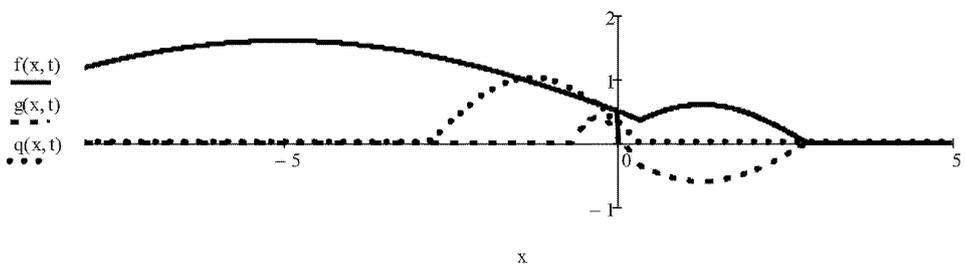
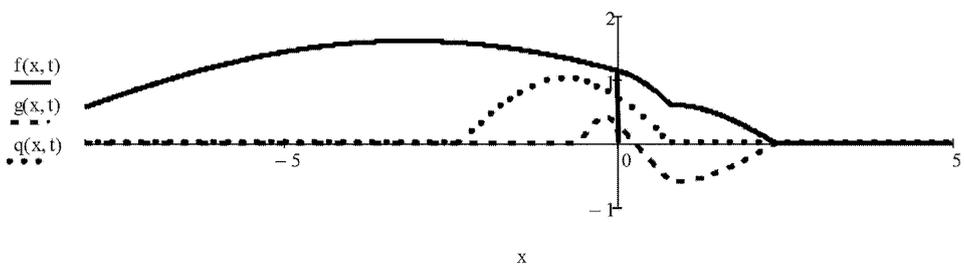
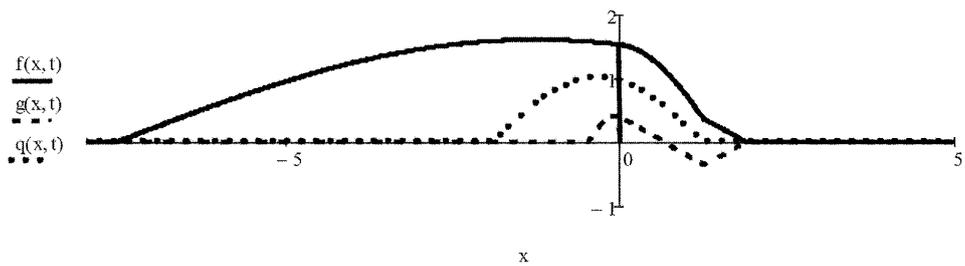
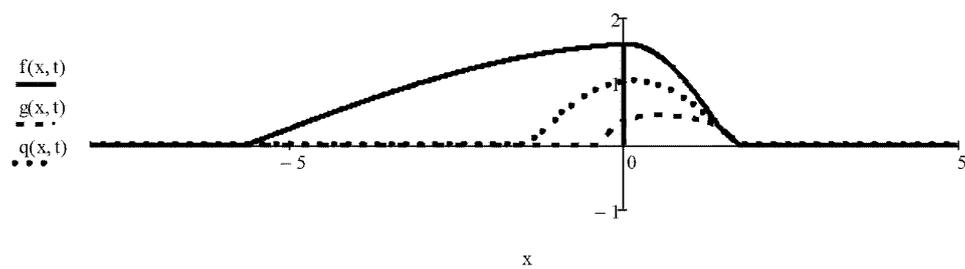
$$u_2(x, t) = \frac{1-d}{1+d} h(t-x), \quad t-b < x < t-a,$$

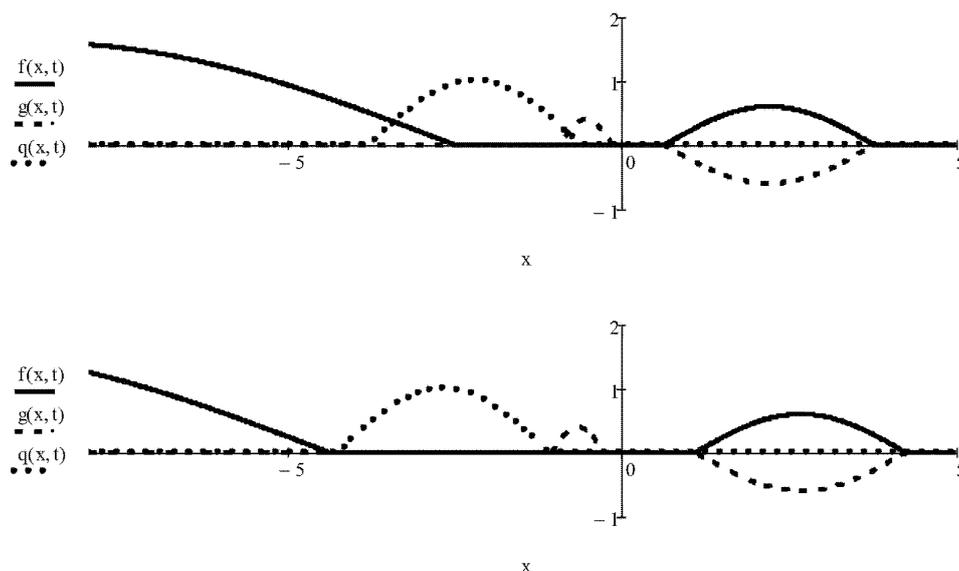
где  $d = \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ . Здесь для переменной  $x$  указаны носители функций  $u_i(x, t)$ , вне которых эти функции равны нулю.

В качестве примера рассмотрим начальную функцию  $h(x) = -\sin x$  при  $a = \pi$ ,  $b = 2\pi$ . На фигуре приведены графики движения трёх струн для моментов времени от  $t = \pi$ , когда набегающая справа волна  $h(x+t)$  подошла к точке  $x = 0$ , до момента  $t = 47\pi/20$  с шагом  $\Delta t = 3\pi/20$ .

Фигура







Здесь сплошная линия соответствует струне с менее плотной левой зоной в  $D_1$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ,  $d = 1/4$ ); пунктирная линия соответствует струне с более плотной левой зоной ( $\rho_1 > \rho_2$ ,  $d = 4$ ), многоточие соответствует однородной струне ( $\rho_1 = \rho_2$ ,  $d = 1$ ).

Отметим, что при пересечении точки разрыва плотности  $x = 0$  амплитуда струны  $u_i(0, t)$  увеличивается (уменьшается) в случае  $\rho_1 < \rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ). При этом в случае  $\rho_1 < \rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ) появляется положительная (отрицательная) отражённая волна  $h(t-x)(1-d)/(1+d)$ , которая движется противоположно направлению набегающей волны  $h(x+t)$ , т. е. в случае  $\rho_1 \neq \rho_2$  имеет место частичное отражение волны от точки разрыва плотности.

### Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 686 с.
3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
4. Ломов И. С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 358–365.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
6. Холодовский С. Е. Об эффективном решении задачи о движении неограниченной струны с точечной массой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 1. С. 115–122. (Kholodovskii S. E. Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55, No. 1. Pp. 101–108).

Статья поступила в редакцию 20.04.2018; принята к публикации 26.05.2018

**Библиографическое описание статьи**

Холодовский С. Е., Чухрий П. А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 42–50. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50.

**Svyatoslav Ye. Kholodovskii<sup>1</sup>,**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Transbaikal State University*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),  
e-mail: hol47@yandex.ru*

**Pavel A. Chuhrii<sup>2</sup>,**

*Master Student,*

*Transbaikal State University*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),  
e-mail: pchuhrij@mail.ru*

**The Problem of Motion of an Unbounded Piecewise Homogeneous String<sup>3</sup>**

A Cauchy problem for an unbounded string consisting of two homogeneous parts with different density is considered. We give the linear formulation of the problem. The solution of the problem in explicit form in single quadratures is obtained. String graphs with a certain time step for different combinations of composite string densities are constructed.

**Keywords:** transverse motion of the piecewise-homogeneous strings, Cauchy problem for the wave equation, graphic illustration of the compound string movement

**References**

1. Arsenin V. Ya. *Metodyi matematicheskoy fiziki i spetsialnyie funktsii*. M.: Nauka, 1974. 432 s.
2. Budak B. M., Samarskiy A. A., Tihonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike*. M.: Nauka, 1980. 686 s.
3. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniya v chastnyih proizvodnyih matematicheskoy fiziki*. M.: Vyssh. sh., 1970. 710 s.
4. Lomov I. S. *Negladkie sobstvennyie funktsii v zadachah matematicheskoy fiziki // Differentsialnyie uravneniya*. 2011. Т. 47, № 3. S. 358–365.
5. Tihonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka, 1972. 735 s.
6. Kholodovskii S. E. *Ob effektivnom reshenii zadachi o dvizhenii neogranichennoy struny s tochechnoy massoy // Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2015. Т. 55, № 1. S. 115–122. (Kholodovskii S. E. *Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015. Vol. 55, No. 1. Pp. 101–108).

**Received: April 20, 2018; accepted for publication May 26, 2018**

<sup>1</sup>S. Ye. Kholodovskii is an organizer of the research.

<sup>2</sup>P. A. Chuhrii formulates insights and summarizes the results of a collective research.

<sup>3</sup>This work was carried out within the framework of the grant of the Council of the Institute of Transformation of Transbaikal State University № 250-GR.

**Reference to article**

*Kholodovskii S. Ye., Chuhrii P. A.* The Problem of Motion of an Unbounded Piecewise Homogeneous String // Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 42–50. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50.