УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-33-41

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru

О решении краевых задач для уравнения Пуассона в кусочно-однородных областях, ограниченных параболами[1]

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона в кусочно-однородных неограниченных и ограниченных областях с границами в виде парабол. Методом свёртывания разложений Фурье выведены формулы, выражающие решения указанных задач через решения классических задач в однородной полуплоскости или полуполосе. Построены фундаментальные решения в кусочно-однородных областях с параболическими границами в явном виде без квадратур.

Ключевые слова: краевые задачи в областях с криволинейными границами, условия сопряжения, метод свёртывания разложений Фурье

Введение. В связи с бурным развитием техники и широким применением композитных материалов большой интерес имеют краевые задачи, описывающие процессы тепломассопереноса в кусочно-однородных областях с криволинейными границами. Указанные задачи, как правило, решаются приближённо численными (сеточными) методами [2; 3; 6]. В работе [9] решены обратные задачи с неизвестными граничными условиями для определённого класса криволинейных областей.

Одним из эффективных аналитических методов решения нестандартных краевых задач является метод свёртывания разложений Фурье [7; 8], который позволяет строить точные явные решения задач в областях сложной структуры. В статьях [4; 5] указанным методом решены некоторые задачи в параболических областях для уравнения Лапласа. В данной статье выведены формулы, дающие решения серии (в том числе смешанных) краевых задач для уравнения Пуассона в кусочно-однородных неограниченных и ограниченных областях с параболическими границами.

1. Задача Дирихле в неограниченной области с параболической границей. Рассмотрим на комплексной плоскости $z = x + iy$ задачу Дирихле в области D, ограниченной параболой $x = (2b)^{-2}y^2 - b^2$ (точка $(0, 0) \in D$), когда область D состоит из двух однородных зон $D_1 = D \cap (y < 0)$ и $D_2 = D \cap (y > 0)$ проницаемости k_j в D_j. Для функций $u_j(x, y)$ в D_j задача имеет вид

[1]Работа выполнена в рамках гранта № 250-ГР Совета по научной и инновационной деятельности ЗабГУ.

$$\partial_{xx}u_1 + \partial_{yy}u_1 = 0, \qquad \partial_{xx}u_2 + \partial_{yy}u_2 = H(x,y), \tag{1}$$

$$u_{1|x=(2b)^{-2}y^2-b^2,\, y<0} = 0 \qquad u_{2|x=(2b)^{-2}y^2-b^2,\, y>0} = h(y), \tag{2}$$

$$y = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2, \tag{3}$$

где $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $H(x,y)$ и $h(y)$ – заданные функции (ограничения на эти функции даны ниже в теореме), условия сопряжения (3) выражают непрерывность искомой функции (потенциала) и нормальной скорости на линии $y = 0$ разрыва проницаемости. Условия задачи (1), (2) однородны в зоне D_1, что не умаляет общности, т. к. при неоднородных условиях в зоне D_2 задача решается аналогично, а в общем случае решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач. В частности, задача (1)–(3) описывает установившиеся процессы тепломассопереноса в кусочно-однородной области D при заданных источниках (стоках) в D_2 и граничных условиях (2).

Рассмотрим на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ полосу $G = (\xi \in R) \times (0 < \eta < b)$, состоящую из двух полуполос $G_1 = (\xi < 0) \times (0 < \eta < b)$ и $G_2 = (\xi > 0) \times (0 < \eta < b)$. Посредством функции $z = \zeta^2$ полоса G конформно отображается на область D плоскости $z = x + iy$ с разрезом $s(x > 0,\, y = 0)$, при этом полуполосы G_j отображаются на зоны D_j, где

$$x = \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta, \qquad -\infty < \xi < \infty, \qquad 0 < \eta < b.$$

Обратное отображение имеет вид

$$\xi = \operatorname{sign}(y)\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}, \tag{4}$$

где $\operatorname{sign}(\pm 0) = \pm 1$. На основной плоскости z переменные ξ, η являются параболическими координатами. Отсюда с учётом $\partial_y u_j = [2(\xi^2+\eta^2)]^{-1}(\eta\partial_\xi u_j + \xi\partial_\eta u_j)$ задача (1)–(3) для функций $u_j(\xi,\eta)$ в G_j примет вид

$$\partial_{\xi\xi}u_1 + \partial_{\eta\eta}u_1 = 0, \qquad \partial_{\xi\xi}u_2 + \partial_{\eta\eta}u_2 = H_1(\xi,\eta), \tag{5}$$

$$u_{1|\eta=b,\, \xi<0} = 0, \qquad u_{2|\eta=b,\, \xi>0} = h_1(\xi), \tag{6}$$

$$u_2(\xi,0) = u_1(-\xi,0), \qquad k_2\partial_\eta u_2(\xi,0) = -k_1\partial_\eta u_1(-\xi,0), \qquad \xi > 0, \tag{7}$$

$$\xi = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_\xi u_1 = k_2\partial_\xi u_2, \qquad 0 < \eta < b, \tag{8}$$

где $H_1(\xi,\eta) = 4(\xi^2+\eta^2)H(\xi^2-\eta^2, 2\xi\eta)$, $h_1(\xi) = h(2b\xi)$, при этом участки ($\xi = 0$, $0 < \eta < b$) и ($\eta = 0$, $\xi = \pm\sqrt{x}$) границ зон G_j отображаются соответственно на участки ($y = 0$, $-b^2 < x < 0$) и ($y = 0$, $x > 0$) линии разрыва проницаемости. В силу условий (7) разрезом $s(x > 0,\, y = 0)$ на плоскости z можно пренебречь.

Представим решение задачи (5)–(8) в виде функций, тождественно удовлетворяющих условиям сопряжения (8)

$$u_1(\xi,\eta) = \frac{2k_2}{k_1+k_2}F(\xi,\eta), \qquad \xi < 0, \tag{9}$$

$$u_2(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}F(-\xi,\eta), \qquad \xi > 0, \tag{10}$$

где $F(\xi,\eta) \in C^2(G)$. Из условий (5)–(7) для функции $F(\xi,\eta)$ получим задачу в однородной полосе $G = (\xi \in R) \times (0 < \eta < b)$

$$\partial_{\xi\xi}F + \partial_{\eta\eta}F = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ H_1(\xi,\eta), & \xi > 0, \end{cases} \qquad F_{|\eta=b} = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ h_1(\xi), & \xi > 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$F(\xi,0) = F(-\xi,0), \qquad \partial_\eta F(\xi,0) = -\partial_\eta F(-\xi,0), \qquad \xi > 0. \tag{12}$$

Методом свёртывания разложений Фурье [7; 8] выразим решение задачи (11), (12) в полосе $G = (\xi \in R)\times(0 < \eta < b)$ через решение $f(\xi,\eta)$ классической задачи Дирихле в полуплоскости $P = (\xi \in R) \times (-\infty < \eta < b)$

$$\partial_{\xi\xi}f + \partial_{\eta\eta}f = \begin{cases} 0, & (\xi,\eta) \in P \setminus G_2, \\ H_1(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in G_2, \end{cases} \qquad f_{|\eta=b} = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ h_1(\xi), & \xi > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что решение задачи (13) строится в квадратурах [1, с. 164]

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_0^b H_1(\zeta,\tau)\ln\frac{(\xi-\zeta)^2+(\eta-\tau)^2}{(\xi-\zeta)^2+(\eta+\tau)^2}d\tau +$$

$$+\frac{\eta-b}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{h_1(\zeta)d\zeta}{(\xi-\zeta)^2+(\eta-b)^2}. \tag{14}$$

Для вывода общей формулы предположим сначала, что в задачах (11) и (13) $H_1 = 0$ и функция $h_1(\xi)$ разлагается в интеграл Фурье

$$h_1(\xi) = \int\limits_0^\infty [f_1(\lambda)\sin\lambda\xi + f_2(\lambda)\cos\lambda\xi]d\lambda, \tag{15}$$

где

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty h_1(\zeta)\begin{pmatrix} \sin\lambda\zeta \\ \cos\lambda\zeta \end{pmatrix} d\zeta$$

(в окончательной формуле (18) данные предположения несущественны). Отсюда с помощью метода Фурье решение задачи (13) строится в виде

$$f(\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\eta-b)}[f_1(\lambda)\sin\lambda\xi + f_2(\lambda)\cos\lambda\xi]d\lambda, \qquad -\infty < \eta < b. \tag{16}$$

Представим решение задачи (11), (12) в виде

$$F(\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty [a_1(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda\eta\,\sin\lambda\xi + a_2(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda\eta\,\cos\lambda\xi]d\lambda, \tag{17}$$

где $a_{1,2}(\lambda)$ – искомые функции. Отсюда функция (17) удовлетворяет уравнению Лапласа (11) ($H_1 = 0$) и условиям сопряжения (12). Из граничного условия (11) с учётом (15) найдём

$$a_1(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{\mathrm{sh}\,\lambda b}, \qquad a_2(\lambda) = \frac{f_2(\lambda)}{\mathrm{ch}\,\lambda b}\,.$$

Раскладывая последние дроби в геометрические прогрессии, получим

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,\lambda b} = \frac{2e^{-\lambda b}}{1-q} = 2\sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda b(2n+1)}, \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}\,\lambda b} = \frac{2e^{-\lambda b}}{1+q} = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-\lambda b(2n+1)},$$

где $q = e^{-2\lambda b}$, $|q| < 1$ при $0 < \lambda < \infty$. Отсюда функция (17) примет вид

$$F(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int\limits_0^\infty \left\{e^{\lambda(\eta-2bn-b)}[(-1)^n f_1(\lambda)\sin\lambda\xi + f_2(\lambda)\cos\lambda\xi] + \right.$$

$$\left. + e^{-\lambda(\eta+2bn+b)}[(-1)^{n+1} f_1(\lambda)\sin\lambda\xi + f_2(\lambda)\cos\lambda\xi]\right\} d\lambda, \qquad 0 < \eta < b.$$

Используя разложение (16), выразим функцию $F(\xi, \eta)$ непосредственно через заданную функцию (14) (без разложений Фурье, т. е. без сильных осцилляций)

$$F(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [f((-1)^n \xi, \eta - 2bn) + f((-1)^{n+1} \xi, -\eta - 2bn)]. \tag{18}$$

Теорема. *Если задача Дирихле (13) для функций $H_1(\xi, \eta)$ и $h_1(\xi)$ (5), (6) корректна и при $\eta \to -\infty$ ($\eta < \text{const} < b$) её решение $f(\xi, \eta)$ стремится к нулю монотонно и равномерно по $\xi \in R$, то решение задачи (5)–(8) строится по формулам (9), (10), (18), где ξ, η имеют вид (4).*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $F(\xi, \eta)$ (18) удовлетворяет условиям задачи (11), (12) (при $H_1 \neq 0$). В условиях теоремы знакочередующийся ряд (18) (или его остаток) сходится равномерно и допускает дифференцирование необходимое число раз. Первое слагаемое ряда (18) равно $f(\xi, \eta)$ и удовлетворяет уравнению Пуассона (13). Аргументы каждой функции $f(\pm\xi, \eta_n)$ в остальных слагаемых (18) лежат в области, где эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа (13). Отсюда функция (18) удовлетворяет уравнению Пуассона (11).

При $\eta = b$ каждое второе слагаемое в квадратных скобках (18) взаимно уничтожается с первым слагаемым следующей квадратной скобки, при этом в (18) остаётся лишь первое слагаемое $f(\xi, \eta)$, т. е. граничное условие (11) (в силу граничного условия (13)) выполняется.

При $\eta = 0$ выражение в каждой квадратной скобке (18) удовлетворяет условиям сопряжения (12). Отсюда решение задачи (5)–(8) строится по формулам (9), (10), (18). Теорема доказана.

Отметим, что условия теоремы выполняются для широкого класса ограниченных функций $h_1(\xi)$ и функций $H_1(\xi, \eta)$, равных нулю в окрестности ∞.

В качестве примера построим фундаментальное решение задачи (5)–(8), моделирующее источник в точке (ξ_0, η_0), при однородных граничных условиях (6) ($h_1 = 0$). Решение соответствующей задачи (13) имеет конечный вид

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0 - 2b)^2}, \qquad \xi_0 > 0, \qquad 0 < \eta_0 < b.$$

Отсюда решение исходной задачи (1)–(3) в кусочно-однородной области D, ограниченной параболой, строится без квадратур по формулам (18), (9), (10), где переменные ξ, η имеют вид (4).

Отметим, что функция (18) имеет также самостоятельный интерес, т. к. на плоскости (x, y) она является решением задачи Дирихле в однородной (при $k_1 = k_2$) области D, ограниченной параболой.

2. Краевые задачи в ограниченных областях с параболическими границами. Полученные формулы (9), (10), (18) дают решение серии краевых задач вида (1)–(3) при дополнительных граничных условиях

$$M[u_1]_{|x=a^2-(2a)^{-2}y^2,\, y<0} = 0, \qquad M[u_2]_{|x=a^2-(2a)^{-2}y^2,\, y>0} = g(y), \tag{19}$$

где M – оператор граничных условий первого или второго рода (т. е. $M[u] = u$ или $M[u] = \partial u/\partial\nu$ – производная по внешней нормали). В данном случае кусочно-однородная область D ограничена двумя параболами $x = (2b)^{-2}y^2 - b^2$ и $x = a^2 - (2a)^{-2}y^2$. В параболических координатах ξ, η (4) для функций $u_j(\xi,\eta)$ в G_j задачи имеют вид (5)–(8)

$$N[u_1]_{|\xi=-a} = 0, \qquad N[u_2]_{|\xi=a} = g_1(\eta), \qquad 0 < \eta < b, \tag{20}$$

где $G_1 = (-a < \xi < 0) \times (0 < \eta < b)$, $G_2 = (0 < \xi < a) \times (0 < \eta < b)$ – прямоугольники на плоскости ζ, операторам M (19) соответствуют операторы $N[u] = u$ или $N[u] = \partial_\xi u$, при этом $g_1(\eta) = g(2a\eta)$ (или $g_1(\eta) = 2\sqrt{a^2+\eta^2}g(2a\eta)$) для $N[u] = u$ (или $N[u] = \partial_\xi u$).

Решения задач (5)–(8), (20) строятся по формулам (9), (10), (18), где $f(\xi,\eta)$ – решение задачи в однородной полуполосе $P = (-a < \xi < a) \times (-\infty < \eta < b)$

$$\partial_{\xi\xi}f + \partial_{\eta\eta}f = \begin{cases} 0, & (\xi,\eta) \in P \setminus G_2, \\ H_1(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in G_2, \end{cases} \qquad f_{|\eta=b} = \begin{cases} 0, & -a < \xi < 0, \\ h_1(\xi), & 0 < \xi < a, \end{cases}$$

$$N[f]_{|\xi=-a,\,-\infty<\eta<b} = 0, \qquad N[f]_{|\xi=a} = \begin{cases} 0, & -\infty < \eta < 0, \\ g_1(\eta), & 0 < \eta < b. \end{cases} \tag{21}$$

Действительно, выполнение условий (5)–(8) для функций (9), (10), (18) доказано в теореме. Граничные условия (20) для функций (9), (10), (18) также выполняются, т. к. аргументы каждой функции $f(\pm\xi, \eta_n)$ во всех слагаемых (18), кроме первого, лежат в области, где эти функции удовлетворяют однородным граничным условиям (21). Первый член ряда (18) равен $f(\xi,\eta)$. Отсюда в силу (21) для функций (9), (10) имеем $N[u_1]_{|\xi=-a} = 0$, $N[u_2]_{|\xi=a} = g_1(\eta)$ при $0 < \eta < b$.

В частности, фундаментальное решение задачи (5)–(8), (20) с особой точкой ξ_0, η_0 при $a = \pi/2$, $h_1 = g_1 = 0$, $N[u] = u$ строится без квадратур по формулам (9), (10), (18) где

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\left[\ln\frac{\mathrm{ch}(\eta-\eta_0) - \cos(\xi-\xi_0)}{\mathrm{ch}(\eta-\eta_0) - \cos(\xi+\xi_0-\pi)} - \right.$$

$$\left. -\ln\frac{\mathrm{ch}(\eta+\eta_0-2b) - \cos(\xi-\xi_0)}{\mathrm{ch}(\eta+\eta_0-2b) - \cos(\xi+\xi_0-\pi)}\right], \qquad 0 < \xi_0 < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \eta_0 < b.$$

Таким образом, решение рассмотренных задач в кусочно-однородных областях, ограниченных параболами, сводится к решению классических задач в однородных областях с прямолинейными границами, которые решаются стандартными методами.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.

2. Блатов И. А., Китаева Е. В. О сочетании методов неполной факторизации и быстрого преобразования Фурье решения краевых задач для уравнения Пуассона в областях с криволинейной границей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 5. С. 730–743.

3. Ворожцов Е. В., Шапеев В. П. Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 5. С. 648–664.

4. Ефимова И. А. О решении первой краевой задачи на плоскости для уравнения Лапласа в области, ограниченной параболой // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2013. № 3. С. 29–31.

5. Игнатьева Н. В. О решении первой краевой задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородных криволинейных областях // Математический анализ и его приложения. 2010. № 9. С. 16–20.

6. Трубников С. В. О новых численных методах решения краевых задач в областях сложной формы с таблично заданными исходными данными // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 432–437.

7. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 855–859. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. Pp. 873–877).

8. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 8. Pp. 1229–1233).

9. Чернышов А. Д. Решение стационарных задач теплопроводности для криволинейных областей с помощью разложений по собственным функциям (фундаментальные решения) // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82, № 1. С. 163–169.

Статья поступила в редакцию 03.04.2018; принята к публикации 12.05.2018

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в кусочно-однородных областях, ограниченных параболами // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 33–41. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-33-41.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru

On the Solution of Boundary Value Problems for the Poisson Equation in Piecewise Homogeneous Domains Bounded by Parabolas[1]

The boundary value problems for the Poisson equation in piecewise homogeneous unbounded and bounded domains with parabolic boundaries are considered. Using the method of convolution of Fourier expansions, we derive formulas expressing solutions of the problems through solutions of classical problems in a homogeneous half-plane or half-strip. Fundamental solutions are constructed in piecewise homogeneous domains with parabolic boundaries in explicit form without quadratures.

Keywords: boundary value problems in domains with curvilinear faces, conjugation conditions, method of convolution of Fourier expansions

References

1. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii. M.: Nauka, 1974. 432 s.

2. Blatov I. A., Kitaeva E. V. O sochetanii metodov nepolnoi faktorizatsii i bystrogo preobrazovaniya Fur'e resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona v oblastyakh s krivolineinoi granitsei // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2003. T. 43, № 5. S. 730–743.

3. Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. Chislennoe reshenie uravneniya Puassona v polyarnykh koordinatakh metodom kollokatsii i naimen'shikh nevyazok // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2015. T. 22, № 5. S. 648–664.

4. Efimova I. A. O reshenii pervoi kraevoi zadachi na ploskosti dlya uravneniya Laplasa v oblasti, ogranichennoi paraboloi // Uchenye zapiski Zabaikal'skogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta. 2013. № 3. S. 29–31.

5. Ignat'eva N. V. O reshenii pervoi kraevoi zadachi dlya uravneniya Laplasa v kusochno-odnorodnykh krivolineinykh oblastyakh // Matematicheskii analiz i ego prilozheniya. 2010. № 9. S. 16–20.

6. Trubnikov S. V. O novykh chislennykh metodakh resheniya kraevykh zadach v oblastyakh slozhnoi formy s tablichno zadannymi iskhodnymi dannymi // Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2015. № 2. S. 432–437.

7. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai obobshchennykh uslovii sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 6. S. 855–859. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. Pp. 873–877).

[1]This work was carried out within the framework of Grant No. 250-GR of the Council for Scientific and Innovation Activity of ZabSPU.

8. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 8. S. 1204–1208. (Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 8. Pp. 1229–1233).

9. Chernyshov A. D. Reshenie statsionarnykh zadach teploprovodnosti dlya krivolineinykh oblastei s pomoshch'yu razlozhenii po sobstvennym funktsiyam (fundamental'nye resheniya) // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. 2009. T. 82, № 1. S. 163–169.

Received: April 03, 2018; accepted for publication May 12, 2018

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. On the Solution of Boundary Value Problems for the Poisson Equation in Piecewise Homogeneous Domains Bounded by Parabolas // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 33–41. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-33-41.