УДК 622
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-24-32

Владимир Александрович Толпаев[1]**,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),
e-mail: TolpaevVA@scnipigaz.ru

Курбан Сапижуллаевич Ахмедов[2]**,**
кандидат технических наук,
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),
e-mail: AhmedovKS@scnipigaz.ru

Александр Михайлович Кравцов[3]**,**
кандидат физико-математических наук,
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),
e-mail: KravcovAM@scnipiaz.ru

Мушег Тигранович Петросянц[4]**,**
младший научный сотрудник,
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),
e-mail: PetrosyancMT@scnipigaz.ru

Квазистационарная динамическая модель течения флюида к скважине

В статье предложена упрощённая динамическая постановка линейной задачи фильтрации с заменой классического статического условия на забое скважины динамическими граничными условиями установившегося режима гармонических пульсаций давления. Получена оценка осцилляционной поправки к статическому решению для давления и дебита. Аналитические зависимости для дебитов скважин позволяют с большей точностью описывать фильтрационные процессы в пластовой системе с учётом динамического характера процессов на забое скважины.

Ключевые слова: пульсация давления, фильтрация, пластовая система, динамика, динамическая поправка, геолого-технические мероприятия

Введение. Основным недостатком существующих моделей фильтрации в пластовых системах (ПС) является необоснованное, явное или неявное применение статичных описаний характеристик фильтрационного течения по всему объёму ПС.

[1]В. А. Толпаев – организатор исследования.
[2]К. С. Ахмедов систематизирует материалы исследования.
[3]А. М. Кравцов систематизирует материалы исследования, оформляет статью.
[4]М. Т. Петросянц формулирует выводы и обобщает итоги реализации коллективного исследования.

Как правило, для описания фильтрации флюида в ПС привлекаются «псевдопараметры», учитывающие диффузный и дисперсионный перенос флюида между матрицей и поровыми каналами. Как следствие этого, значения параметров требуют периодической экспериментальной оценки для учёта изменений физико-механических свойств ПС.

Основным направлением совершенствования фильтрационных моделей на сегодняшний день является введение в модельные уравнения фильтрации уточняющих членов на основе анализа эмпирических данных [3; 4]. Для разрешения названного противоречия и уточнения существующих моделей фильтрации упругой жидкости (нефти) [2; 5] воспользуемся упрощённой динамической постановкой линейной задачи фильтрации, заменив классические статические условия на забое скважины динамическими условиями установившегося граничного режима. Предположим, что на забое скважины с совершенным вскрытием пласта толщиной h установился режим фильтрации флюида из пластовой системы, причем давление на забое скважины P_c меняется по следующему закону

$$P_c = P_0 + P_1 \cdot \cos(\omega \cdot t). \tag{1}$$

Здесь P_0 – уровень давления, около которого происходят осцилляции давления с амплитудой P_1, ω — круговая частота осцилляций давления, которая имеет порядок $10^{-4} - 10^{-6}$ рад/с. Так как давление на забое скважины не превышает пластового давления на контуре питания скважины, примем, что $P_0 + P_1 < P_k$. Будем считать амплитуду пульсаций малой $P_0 >> P_1$.

Предлагаемая упрощённая модель позволит учесть влияние на добычу флюида периодических во времени воздействий на скважину и ПС. Такого рода воздействия (геолого-технические мероприятия) производятся в соответствии с технологическими требованиями: продувка газовых скважин на факел, периодический останов скважин на профилактику и т. д.

Решение задачи о распределении давления в ПС принадлежит классу функций дважды дифференцируемых по пространственным переменным в круговом кольце радиуса r, $r_c \leq r \leq R$ (r_c – радиус скважины, R – радиус контура питания), моделирующего сечение забоя скважины и призабойной зоны. По временной координате функция распределения должна быть периодической, в простейшем случае разумно предположить гармонический закон изменения распределения давления в ПС во времени. Более точное описание распределения давления в ПС может быть получено с помощью суммы конечного числа гармоник.

Дифференциальное уравнение движения жидкости в пористой среде по линейному закону фильтрации. Уравнение для случая линейной фильтрации [2; 5] примем таким

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \cdot \Delta P, \qquad \kappa = \frac{k}{\mu \cdot \beta}, \tag{2}$$

где P – неизвестное распределение приведённого давления в ПС, k — коэффициент фильтрации ($\approx 10^{-12}$ м^2), μ – коэффициент вязкости флюида (0,01 Па$\cdot$с), β – объёмный коэффициент сжимаемости флюида ($\approx 10^{-9}$ Па$^{-1}$), t – временная координата, Δ – оператор Лапласа, коэффициент пьезопроводности k имеет порядок $0,1-5$ м$^2/c$. Решение уравнения (2) следует подчинить условиям затухания фильтрационных волн на бесконечности и установившемуся режиму фильтрации на забое, в соответствии с условиями (1).

В двумерном случае плоскорадиальной фильтрации к скважине уравнение (2) допускает решение вида

$$P = P_k + C \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) + \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t} \cdot \left(A \cdot \frac{K_0\left(\dfrac{r}{R_p}\right)}{K_0\left(\dfrac{r_c}{R_p}\right)} + B \cdot \frac{I_0\left(\dfrac{r}{R_p}\right)}{I_0\left(\dfrac{R}{R_p}\right)}\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь K_0, I_0 – модифицированные функции Бесселя [1; 6], $R_p = \sqrt{\dfrac{i\kappa}{\omega}}$, r – расстояние до оси скважины, R – радиус контура питания скважины. Величину R_p, в соответствии с её размерностью, будем называть комплексным радиусом пьезопроводности скважины. Первые слагаемые формулы соответствуют статическому решению [2]

$$P = P_k - \frac{Q_s}{2\pi \cdot k \cdot h} \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right), \qquad Q_s = \frac{2\pi \cdot k \cdot h}{\mu} \cdot \frac{P_k - P_0}{\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)}, \tag{4}$$

последние слагаемые представляют осцилляционную поправку P_d. Коэффициенты A, B определяются из граничных условий на забое скважины и на контуре питания скважины

$$p_d|_{r=r_c} = P_1, \qquad p_d|_{r=R} = 0. \tag{5}$$

Подставим осцилляционную часть решения (3) в граничные условия и найдём выражения для коэффициентов A, B

$$A = -P_1 \cdot I_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot K_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right) \cdot \left[K_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot I_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right) - I_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot K_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right)\right]^{-1},$$

$$B = P_1 \cdot K_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot I_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot \left[K_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot I_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right) - I_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \cdot K_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right)\right]^{-1}. \tag{6}$$

Отметим, что в силу асимптотик модифицированных функций Бесселя [1; 6]

$$K_0\left(\frac{r_c}{R_p}\right) \sim -\ln\left(\frac{r_c}{R_p}\right), \qquad r_c \to 0;\ K_1\left(\frac{r_c}{R_p}\right) \sim \frac{R_p}{r_c}, \qquad r_c \to 0;$$

$$I_\nu\left(\frac{r_c}{R_p}\right) \sim \frac{\left(\dfrac{r_c}{2R_p}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \qquad r_c \to 0;\ K_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi \cdot R_p}{2R}}\mathrm{e}^{-R/R_p}, \qquad R \to \infty;$$

$$I_0\left(\frac{R}{R_p}\right) \sim \sqrt{\frac{R_p}{2\pi \cdot R}}\mathrm{e}^{R/R_p}, \qquad R \to \infty \tag{7}$$

имеет место

$$A \approx P_1, \qquad B \approx 0. \tag{8}$$

Для динамической поправки дебита скважины получим в соответствии с формулой для дебита

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_c}, \tag{9}$$

следующее выражение

$$Q_d = \frac{2\pi kh}{\mu}\cdot \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\cdot\left(-A\cdot\frac{r_c\cdot K_1\left(\dfrac{r_c}{R_p}\right)}{R_p\cdot K_0\left(\dfrac{r_c}{R_p}\right)}+B\cdot\frac{r_c\cdot I_1\left(\dfrac{r_c}{R_p}\right)}{R_p\cdot I_0\left(\dfrac{R}{R_p}\right)}\right)\right]. \tag{10}$$

В силу асимптотических соотношений (7) справедливо

$$Q_d \approx \frac{2\pi khP_1}{\mu}\cdot \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\ln\left(\dfrac{R_p}{r_c}\right)}\right). \tag{11}$$

Таким образом, доля динамической поправки дебита по отношению к статической части дебита составит

$$\frac{Q_d}{Qs} \approx \frac{P_1}{P_k - P_0}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\omega t}\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_p}{r_c}\right)}\right). \tag{12}$$

Вычислим вещественную часть комплексного выражения в (12)

$$\frac{Q_d}{Qs} \approx \frac{2P_1}{P_k - P_0}\frac{\ln\left(\dfrac{R}{r_c}\right)\cos(\omega t-\varphi)}{\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\left(\ln\left(\dfrac{\kappa}{\omega\cdot r_c^2}\right)\right)^2}}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{2\cdot\ln\left(\dfrac{\kappa}{\omega\cdot r_c^2}\right)}\right). \tag{13}$$

Анализ выражения (13) показывает, что максимум амплитуды динамической поправки к дебиту достигается на частоте, соответствующей значению модуля радиуса пьезопроводности скважины равному радиусу скважины

$$|R_p| = r_c, \qquad \omega = \frac{\kappa}{r_c^2}. \tag{14}$$

Запаздывание φ по дебиту в этом случае составляет $\frac{\pi}{2}$, то есть динамическая часть дебита изменяется при этой частоте в противофазе давлению на забое.

Оценим порядок поправки, так, для скважины с $r_c = 0,1$ м и радиусом контура питания $R = 500$ м, в пласте с коэффициентом пьезопроводности $k = 0,1$ м^2/с, частотой воздействия один раз в сутки, амплитудой воздействия 1 % от депрессии на пласт. Получим добавку к дебиту 1,4 %.

Полученный в работе результат носит качественный характер и позволяет оценивать лишь порядок величин, регламентирующих технологические режимы эксплуатации добычных скважин. В то же время полученные зависимости позволяют с большей точностью описывать процесс фильтрации к скважине в пластовой системе, поскольку учитывают динамику процессов на забое скважины.

Дифференциальное уравнение движения газов в пористой среде по линейному закону фильтрации. Дифференциальное уравнение движения газа в пористой среде отличается от случая фильтрации упругой жидкости. Исходные уравнения движения те же, что и для сжимаемой жидкости, однако их следует дополнить уравнениями состояния газа, в условиях изотермического течения имеющего вид: $\rho = \rho_{am}\dfrac{p}{p_{am}}$, где ρ и ρ_{am} – плотность газа при давлениях p и p_{am}.

Подставляя в уравнение

$$\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right]=m\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

вместо плотности ρ её значение и сокращая полученное уравнение на постоянный множитель $\dfrac{\rho_{am}}{p_{am}}$, имеем [7; 8]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{m\mu}{k}\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{15}$$

но

$$p\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial x},\qquad p\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial y},\qquad p\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial z}. \tag{16}$$

Подставляя вместо произведений, стоящих в круглых скобках в уравнении (15), их значения из равенств (16) и выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}=\frac{2m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{17}$$

Уравнение (17) принято называть дифференциальным уравнением неустановившейся изотермической фильтрации идеального газа по линейному закону фильтрации. Обозначим $P = p^2$, тогда

$$\frac{\partial P}{\partial t}=2p\frac{\partial p}{\partial t}=2P^{\frac{1}{2}}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{18}$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{19}$$

Внеся в уравнение (17) эти значения, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{m\mu}{k}P^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{20}$$

или

$$\nabla^2 P = \frac{m\mu}{k} P^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{21}$$

Уравнение (21) является нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа [9; 10].

Если принять, что $P^{-\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{\sqrt{P_0}} = cost$, то (21) линеаризуется и принимает вид уравнения (2) с коэффициентом $\kappa = \frac{k \cdot \sqrt{P_0}}{m\mu}$.

Оценим порядок поправки к дебиту газовой скважины, если на её забое имеют место слабые пульсации газа по закону (1). В выражении для квадрата функции давления P на границе

$$P = \left[P_0 + P_1 \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right)\right]^2, \tag{22}$$

или

$$P = P_0^2 + \frac{1}{2} P_1^2 + 2P_0 \cdot P_1 \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) + \frac{1}{2} P_1^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \omega \cdot t\right). \tag{23}$$

Следует пренебречь квадратами давлений ввиду их относительной малости по сравнению с остальными членами выражения. Граничные условия (5) примут вид

$$P_d|_{r=r_c} = 2P_0P_1, \qquad P_d|_{r=R} = 0. \tag{24}$$

При фильтрации газа доля динамической поправки к дебиту скважины по отношению к статической части дебита составит

$$\frac{Q_d}{Q_s} \approx \frac{2P_0P_1}{P_K^2 - P_0^2} \mathrm{Re} \left(\frac{e^{i\omega t} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{R_p}{r_c}\right)} \right). \tag{25}$$

После выделения вещественной части комплексного выражения в (25) получим

$$\frac{Q_d}{Q_s} \approx \frac{4P_0P_1}{P_K^2 - P_0^2} \frac{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \cos\left(\omega t - \varphi\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{\kappa}{\omega \cdot r_c^2}\right)\right)^2}}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{2 \cdot \ln\left(\frac{\kappa}{\omega \cdot r_c^2}\right)}\right). \tag{26}$$

Для скважины с $r_c = 0,1$ м и радиусом контура питания $R = 500$ м, в пласте с давлением 12 МПа, коэффициентом фильтрации 0,1 мД. Для газа с вязкостью 0,05 спз, коэффициентом пьезопроводности $k = 0,7 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, при частоте воздействия один раз в сутки, амплитудой воздействия 1 % от депрессии на пласт получим, в соответствии с (26), добавку к дебиту 3,1 %.

Следует отметить, что есть принципиальное отличие от случая фильтрации упругой жидкости. Так, в случае газовых скважин величина динамической поправки к дебиту скважины определяется не только частотой воздействий на ПС, но и величиной депрессии на ПС. Полученный в работе результат носит качественный характер и позволяет оценивать лишь порядок величин, регламентирующих технологические режимы эксплуатации добычных скважин. В то же время полученные зависимости позволяют с большей точностью описывать процесс фильтрации флюида к скважине в пластовой системе, поскольку учитывают динамику процессов на забое скважины.

Список литературы

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

2. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.

3. Толпаев В. А., Ахмедов К. С., Колесников А.В., Гоголева С.А. Математические модели линейной и нелинейной фильтрации к нефте- и газодобывающим скважинам // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2017. № 10. С. 19–29.

4. Толпаев В. А., Гасумов Р. А., Ахмедов К. С., Гоголева С. А., Петросянц М. Т. Уравнения притока газа к скважине в куполе осесимметричного пласта для нелинейных законов фильтрации // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2016. № 11. С. 46–54.

5. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика // Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск, 2001. 736 с.

6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1964. 344 с.

7. Elemer Bobok. Fluid mechanics for petroleum engineers // Elsevier. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1993. 412 p.

8. Dake L. P. Fundamentals of reservoir engineering // Elsevier. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1998. 498 p.

9. Evans L. C. Partial Differential Equations, Providence: American Mathematical Society, 1998.

10. Jost J. Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 2002.

Статья поступила в редакцию 19.03.2018; принята к публикации 02.04.2018

Библиографическое описание статьи

Толпаев В. А., Ахмедов К. С., Кравцов А. М., Петросянц М. Т. Квазистационарная динамическая модель течения флюида к скважине // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 24–32. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-24-32.

Vladimir A. Tolpayev[1]**,**
Doctor of Physics and Mathematics,
Gazprom Proektirovaniye, LLC,
Stavropol Branch
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),
e-mail: TolpaevVA@scnipigaz.ru

Kurban S. Akhmedov[2]**,**
Candidate of Engineering Science,
Gazprom Proektirovaniye, LLC,
Stavropol Branch
(419 Lenin st., Stavropol, 355000, Russia),
e-mail: AhmedovKS@scnipigaz.ru

Aleksandr M. Kravtsov[3]**,**
Candidate of Physics and Mathematics,
Gazprom Proektirovaniye, LLC,
Stavropol Branch
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),
e-mail: KravcovAM@scnipiaz.ru

Musheg T. Petrosyants[4]**,**
Junior Researcher,
Gazprom Proektirovaniye, LLC,
Stavropol Branch
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),
e-mail: PetrosyancMT@scnipigaz.ru

Quasistationary Dynamic Model of Fluid Flow to the Well

The article proposes a simplified dynamic statement of the linear filtration problem with the replacement of the classical static condition at the bottom of the well with the dynamic boundary conditions of the steady-state regime of harmonic pressure pulsations. The estimation of the oscillation correction to the static solution for pressure and flow rate is obtained. Analytical dependencies for well flow rates allow us to describe more accurately the filtration processes in the reservoir system, taking into account the dynamic character of the processes at the bottom of the well.

Keywords: pressure pulsation, filtration, formation system, dynamics, dynamic correction, operations planning

References

1. Abramovits M., Stigan I. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami. M.: Nauka, 1979. 832 s.

2. Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M. Podzemnaya gidromekhanika. M.: Nedra, 1993. 416 s.

[1]V. A. Tolpayev is an organizer of the research.
[2]K. S. Akhmedov systematization of research materials.
[3]A. M. Kravtsov systematization of research materials, preparation of the manuscript.
[4]M. T. Petrosyants formulates insights and summarizes the results of a collective research.

3. Tolpaev V. A., Akhmedov K. S., Kolesnikov A.V., Gogoleva S.A. Matematicheskie modeli lineinoi i nelineinoi fil'tratsii k nefte- i gazodobyvayushchim skvazhinam // Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz' v neftyanoi promyshlennosti. 2017. № 10. S. 19–29.

4. Tolpaev V. A., Gasumov R. A., Akhmedov K. S., Gogoleva S. A., Petrosyants M. T. Uravneniya pritoka gaza k skvazhine v kupole osesimmetrichnogo plasta dlya nelineinykh zakonov fil'tratsii // Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz' v neftyanoi promyshlennosti. 2016. № 11. S. 46–54.

5. Shchelkachev V. N., Lapuk B. B. Podzemnaya gidravlika // Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika. Izhevsk, 2001. 736 s.

6. Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsial'nye funktsii: formuly, grafiki, tablitsy. M.: Nauka, 1964. 344 s.

7. Elemer Bobok. Fluid mechanics for petroleum engineers // Elsevier. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1993. 412 p.

8. Dake L. P., Fundamentals of reservoir engineering // Elsevier. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1998. 498 p.

9. Evans L. C. Partial Differential Equations, Providence: American Mathematical Society, 1998.

10. Jost J. Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 2002.

Received: March 19, 2018; accepted for publication April 02, 2018

Reference to article

Tolpayev V. A., Akhmedov K. S., Kravtsov A. M., Petrosyants M. T. Quasistationary Dynamic Model of Fluid Flow to the Well // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No 4. PP. 24–32. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-24-32.