ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS. ANALYTICAL METHODS

УДК 532.546
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-6-10

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

Решение задачи фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости

Рассмотрена первая краевая задача для уравнения Лапласа в полуплоскости с условиями сопряжения на горизонтальной линии для кусочно-постоянной граничной функции. Задача моделирует фильтрацию жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости. Решение задачи получено в однократных квадратурах.

Ключевые слова: краевые задачи в кусочно-однородной полуплоскости, условия сопряжения, фильтрация жидкости под плотиной

Рассмотрим в вертикальной плоскости с декартовыми координатами x, y фильтрацию жидкости под точечной плотиной. Пусть ось x расположена вдоль линии бьефов ($x < 0$ – верхний бьеф, $x > 0$ – нижний бьеф) и областью фильтрации является нижняя полуплоскость $D = (x \in R) \times (-\infty < y < 0)$, состоящая из двух слоёв $D_1 = (x \in R) \times (-\infty < y < -l)$ и $D_2 = (x \in R) \times (-l < y < 0)$ с различной постоянной проницаемостью k_i в D_i. Отсюда, отсчитывая давление от давления в нижнем бьефе, для потенциалов $u_i(x, y)$ в D_i получим задачу [2]

$$\partial_{xx}u_i + \partial_{yy}u_i = 0, \qquad u_{2|y=0} = \begin{cases} -p, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$y = -l: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2, \tag{2}$$

 © Ефимова И. А., 2018

где $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $p > 0$ – постоянная.

Задача (1), (2) является задачей сопряжения с кусочно-постоянной граничной функцией (1), которая не разлагается в интеграл Фурье, т.е. здесь классический метод Фурье неприменим.

Для решения задачи (1), (2) рассмотрим для функции $f(x, y)$ вспомогательную задачу, которая также имеет практический интерес и описывает фильтрацию жидкости под точечной плотиной в однородной области D, т.е. при $k_1 = k_2$:

$$\partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0, \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} -p, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Методом функции Грина [1, с. 162] решение задачи (3) получим в элементарных функциях

$$f(x, y) = -\frac{p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{p}{2}. \tag{4}$$

Представим решение исходной задачи (1), (2) в виде

$$u_1(x, y) = f(x, y) + v_1(x, y), \qquad -\infty < y < -l, \tag{5}$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + v_2(x, y), \qquad -l < y < 0, \tag{6}$$

где функция $f(x, y)$ имеет вид (4). Отсюда для функций $v_i(x, y)$ в зонах D_i получим задачу с неоднородными условиями сопряжения

$$\partial_{xx} v_i + \partial_{yy} v_i = 0, \qquad v_{2|y=0} = 0, \tag{7}$$

$$y = -l: \qquad v_1 = v_2, \qquad k_1 \partial_y v_1 - k_2 \partial_y v_2 = (k_2 - k_1) \partial_y f(x, -l), \tag{8}$$

где

$$\partial_y f(x, -l) = \frac{px}{\pi(x^2 + l^2)}. \tag{9}$$

При этом функция (9) является нечётной и $\partial_y f(x, -l) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Отсюда функция (9) разлагается в интеграл Фурье по синусам [4, с. 529] с коэффициентами Фурье $f_1(\lambda)$:

$$\partial_y f(x, -l) = \int_0^\infty g(x, \lambda) d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda x, \tag{10}$$

где с учётом (9) и формулы 2.5.9 (9) [3, с. 395] получим

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \partial_y f(t, -l) \sin \lambda t \, dt = \frac{p}{\pi} e^{-\lambda l}. \tag{11}$$

Представим функции $v_i(x, y)$ также в виде разложений Фурье

$$v_1(x, y) = \int\limits_0^\infty a_1(\lambda) e^{\lambda(y+l)} g(x, \lambda) \, d\lambda, \qquad -\infty < y < -l, \tag{12}$$

$$v_2(x, y) = \int\limits_0^\infty a_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y \;\, g(x, \lambda) \, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{13}$$

где $a_i(\lambda)$ – искомые функции, функция $g(x, \lambda)$ имеет вид (10). Отсюда функции (12), (13) удовлетворяют уравнению (7) и граничному условию (7) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (12), (13)). Из условий сопряжения (8) с учётом разложения функции $\partial_y f(x, -l)$ (10) для функций $a_i(\lambda)$ получим систему алгебраических уравнений

$$a_1 + a_2 \operatorname{sh} \lambda l = 0, \qquad k_1 a_1 - k_2 a_2 \operatorname{ch} \lambda l = \frac{k_2 - k_1}{\lambda},$$

решение которой имеет вид

$$a_1(\lambda) = \frac{(k_2 - k_1) \operatorname{sh} \lambda l}{\lambda(k_1 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}, \qquad a_2(\lambda) = \frac{k_1 - k_2}{\lambda(k_1 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}.$$

Отсюда решение исходной задачи (1), (2) строится по формулам (4)–(6), (10)–(13) в однократных квадратурах

$$u_1(x, y) = -\frac{p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{p}{2} + \frac{p(k_2 - k_1)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} \operatorname{sh} \lambda l \;\, \sin \lambda x}{\lambda(k_1 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)} \, d\lambda, \tag{14}$$

$$u_2(x, y) = -\frac{p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{p}{2} - \frac{p(k_2 - k_1)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \operatorname{sh} \lambda y \;\, \sin \lambda x}{\lambda(k_1 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)} \, d\lambda, \tag{15}$$

при этом подынтегральные функции стремятся к нулю при $\lambda \to 0$, а при $\lambda \to +\infty$ эти функции имеют асимптотику $O(\lambda^{-1} e^{\lambda y})$, где $y < 0$. Отсюда интегралы (14), (15) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.

2. Ефимова И. А. Метод функции Грина в задачах фильтрации под плотинами в неоднородных анизотропных грунтах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.05.02. Чита, 1990. 24 с.

3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3. 656 с.

Статья поступила в редакцию 03.04.2018; принята к публикации 07.05.2018

Библиографическое описание статьи

Ефимова И. А. Решение задачи фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 6–10. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-6-10.

Irina A. Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskaya st., Chita, 672086, Russia),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

Solution of the Problem of Fluid Filtration under a Point Dam in Two-Layer Half-Plane

The first boundary value problem for the Laplace equation in half-plane with conjugation conditions on a horizontal line for piecewise constant boundary function is considered. The problem simulates fluid filtration under a point dam in a two-layer half-plane. The solution of the problem is obtained in single quadratures.

Keywords: boundary value problems in piecewise homogeneous half-plane, conjugation conditions, filtration of a fluid under a dam

References

1. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnyye funktsii. M.: Nauka, 1974. 432 s.

2. Efimova I. A. Metod funktsii Grina v zadachakh filtratsii pod plotinami v neodnorodnykh anizotropnykh gruntakh: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.05.02. Chita, 1990. 24 s.

3. Prudnikov A. P.. Brychkov Yu. A.. Marichev O. I. Integraly i ryady. M.: Nauka, 1981. 798 s.

4. Fikhtengolts G. M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. M.: Nauka, 1969. T. 3. 656 s.

Received: April 03, 2018; accepted for publication May 07, 2018

Reference to article

Efimova I. A. Solution of the Problem of Fluid Filtration under a Point Dam in Two-Layer Half-Plane // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 6–10. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-6-10.