УДК 313.42
JEL: C25

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЭКСПОРТНО-ИМПОРТНОГО БАЛАНСА

©2019 ВОРОНИН А. В., ГУНЬКО О. В., АФАНАСЬЕВА Л. М.

УДК 313.42
JEL: C25

Воронин А. В., Гунько О. В., Афанасьева Л. М. Неустойчивость динамики цены при изменении экспортно-импортного баланса

Настоящая работа посвящена проблеме анализа механизма ценообразования при реализации экспортно-импортных операций. В качестве базовой модели предложена динамическая версия традиционного монетаристского баланса И. Фишера – основное соотношение количественной теории денег. Динамическая формализация модели имеет представление как в дискретной, так и в непрерывной временных формах. Особенностью исследуемой модели является линейный характер зависимости функций объемов экспорта и импорта от внутренней цены на товарную продукцию. Данная гипотеза генерирует структуру дискретной динамической модели в виде квадратичного (логистического) отображения. Выполнен предметный анализ устойчивости положений равновесия с указанием всех возможных типов динамического поведения, таких как, например, предельные циклы и хаотические режимы. Приведена содержательная экономическая интерпретация основного бифуркационного параметра. Для непрерывной версии модели получены явные выражения для изменения цены во временной области и установлен факт наличия бифуркаций катастрофического типа «складка». Для анализа поведенческих свойств исследуемой модели использовалась методология описания самоорганизующихся экономических систем с учетом соответствующего синергетического эффекта.

Ключевые слова: *международная торговля, бифуркация, хаос, баланс, ресурс, динамика, устойчивость, равновесие.*
DOI:
Рис.: *8.* ***Формул:*** *22.* ***Библ.:*** *8.*

Воронин Анатолий Витальевич *– кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
E-mail: *voronin61@ukr.net*

Гунько Ольга Владимировна *– кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
E-mail: *Olha.Hunko@m.hneu.edu*
ORCID: *https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*

Афанасьева Лидия Михайловна *– кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
E-mail: *Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*
ORCID: *https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*

УДК 313.42
JEL: C25

Воронін А. В., Гунько О. В., Афанас'єва Л. М. Нестійкість динаміки ціни при зміні експортно-імпортного балансу

Дана робота присвячена проблемі аналізу механізму ціноутворення при реалізації експортно-імпортних операцій. Як базова модель запропонована динамічна версія традиційного монетаристського балансу І. Фішера – основне співвідношення кількісної теорії грошей. Динамічну формалізацію моделі наведено як у дискретній, так і в безперервній часових формах. Особливістю досліджуваної моделі є лінійний характер залежності функцій обсягів експорту та імпорту від внутрішньої ціни на товарну продукцію. Дана гіпотеза генерує структуру дискретної динамічної моделі у вигляді квадратичного (логістичного) відображення. Виконано предметний аналіз стійкості станів рівноваги із зазначенням усіх можливих типів динамічної поведінки, таких як, наприклад, граничні цикли та хаотичні режими. Наведено змістовну економічну інтерпретацію основного біфуркаційного параметра. Для безперервної версії моделі отримані явні вирази для зміни ціни в часовій області та встановлено факт наявності біфуркацій катастрофічного типу «складка». Для аналізу поведінкових властивостей досліджуваної моделі використовувалася методологія опису економічних систем, що самоорганізуються, з урахуванням відповідного синергетичного ефекту.

Ключові слова: *міжнародна торгівля, біфуркація, хаос, баланс, ресурс, динаміка, стійкість, рівновага.*
Рис.: *8.* ***Формул:*** *22.* ***Бібл.:*** *8.*

Воронін Анатолій Віталійович *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*
E-mail: *voronin61@ukr.net*

UDC 313.42
JEL: C25

Voronin A. V., Gunko O. V., Afanasieva L. M. The Volatility of Price Movements When Changing the Export-Import Balance

The present publication is concerned with the problem of analyzing the pricing mechanism when carrying out export-import operations. As a basic model is suggested the dynamic version of the traditional monetarist balance by I. Fischer – the main correlation of quantitative theory of money. The dynamic formalization of the model has a representation in both discrete and continuous temporal forms. The peculiarity of the investigated model is the linear nature of dependence of functions of volumes of exports and imports from the internal price on commodity production. This hypothesis generates the structure of the discrete dynamic model in the form of quadratic (logistic) display. A substantive analysis of the stability of equilibrium positions is done with indication of all possible types of dynamic behavior, e.g. limit cycles and chaotic modes. The substantial economic interpretation of the main bifurcation parameter is provided. For a continuous version of the model, explicit expressions to change the price in the temporary area are obtained and the fact of the presence of a catastrophic «crease» type is determined. For the analysis of behavioral properties of the researched model, the methodology of description of self-organizing economic systems with consideration of the corresponding synergistic effect is used.

Keywords: *international trade, bifurcation, chaos, balance, resource, dynamics, stability, balance.*
Fig.: *8.* ***Formulae:*** *22.* ***Bibl.:*** *8.*

Voronin Anatolii V. *– PhD (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine)*
E-mail: *voronin61@ukr.net*

***Гунько Ольга Володимирівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*
***E-mail:** Olha.Hunko@m.hneu.edu*
***ORCID:** https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*
***Афанас'єва Лідія Михайлівна** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*
***E-mail:** Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*
***ORCID:** https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*

***Gunko Olga V.** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine)*
***E-mail:** Olha.Hunko@m.hneu.edu*
***ORCID:** https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*
***Afanasieva Lidiia M.** – PhD (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine)*
***E-mail:** Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*
***ORCID:** https:orcid.org/0000-0001-7013-5400*

Одной из наиболее важных проблем, интересующих всех представителей экономического сообщества, является уровень потребительских цен внутри страны с учетом внешнеэкономической деятельности. Традиционные монетаристы полагают, что объем денежной массы является определяющим фактором, под воздействием которого формируются цены. Характерной является цитата Ирвинга Фишера, относящаяся к существу указанной проблемы: «Взлеты и падения цен примерно соответствуют взлетам и падениям предложения денег. Так было на протяжении всей истории. Сам по себе этот факт достаточно очевиден, даже если нам не хватает показателей для аккуратного измерения…» [1].

В настоящее время существует предметное качественное описание структуры генезиса цен внутри страны на соответствующие виды продукции при реализации внешнеторговой деятельности. Наиболее важным при этом является так называемый показатель торгового баланса, изменения в котором задают динамику цен. В работах [2–4] представлены формализованные динамические модели, учитывающие общепринятые в экономической теории гипотезы о механизме экспортно-импортного взаимодействия и базовое уравнение количественной теории денег (уравнение Фишера). Все модели, рассмотренные в вышеуказанных источниках, дают описание процесса эволюции цен при непрерывном изменении времени с учетом одного сосредоточенного запаздывания. Целью данного исследования является анализ динамики цен в дискретном времени при различного рода запаздываниях в динамической версии уравнения Фишера.

Основные предпосылки для формулирования математической модели для динамики цен состоит в следующем [2]:

1) предлагается конфигурация межстранового товарообмена, не зависящего от правительственного вмешательства;

2) величина национального дохода является фиксированной;

3) соотношение между различными валютными курсами считается неизменным и может быть приведено к единице;

4) всевозможные накладные и трансакционные издержки не подлежат учету;

5) любые отклонения на стороне предложения денег определяются дефицитом или избыточностью торгового баланса.

Далее полагаем, что функция объема экспорта $X = X(P)$ является убывающей по внутренней цене P:

$$X(P) = X_0 - X_1 \cdot P,$$

а объема импорта $X = X(P)$ – возрастающая функция внутренней цены:

$$M(P) = M_0 + M_1 \cdot P.$$

Здесь величины X_0, X_1, M_0, M_1 задаются как постоянные и положительные числа.

Введем в рассмотрение величину

$$N(P) = P \cdot X(P) - P_M \cdot M(P), \quad P_M = const > 0,$$

которая характеризует сальдо торгового баланса. Условие $N(P) = 0$ означает равновесие при осуществлении экспортно-импортных операций. Здесь P_M есть внешняя цена.

Условие равновесия с учетом явного вида функций $X(P)$, $M(P)$ и $N(P)$ запишется так:

$$X_1 \cdot P^2 - (X_0 - P_M \cdot M_1) \cdot P + P_M \cdot M_0 = 0. \quad \textbf{(1)}$$

Квадратное уравнение (1) для нахождения равновесных цен P^* имеет очевидное решение

$$P^*_{1,2} = \frac{X_0 - P_M \cdot M_1 \pm D}{2X_1}, \quad \textbf{(2)}$$

где $D^2 = (X_0 - P_M \cdot M_1)^2 - 4X_1 P_M M_0$, $P^*_2 > P^*_1$.

Для существования положительных корней необходимо выполнение двух условий

$$X_0 > P_M \cdot M_1 \text{ и } (X_0 - P_M \cdot M_1)^2 > 4X_1 P_M M_0.$$

Случай кратных корней уравнения (1) оставим вне рассмотрения.

Базовое уравнение Фишера связывает между собой следующие величины: Q – объем предложения денежных средств; P – значение внутренней цены на товарную продукцию; V – скорость денежного обращения; Y – уровень национального дохода. Здесь и далее значения V и Y считаются постоянными величинами:

$$PY = QV. \quad \textbf{(3)}$$

Будем полагать, что исследуемый экономический объект является динамическим с дискретным временем $k = 0, 1, 2, \ldots$, и при этом считаем отклонения от равновесного значения сальдо торгового баланса пропорциональным изменению объема предложения денежной массы:

$$\Delta Q_k = N(P_k), \qquad (4)$$

где $\Delta Q_k = Q_{k+1} - Q_k$.

Из формулы (3) очевидно следует, что

$$\Delta Q_k = \frac{V}{Y} \Delta P_k,$$

и, соответственно, получим

$$\Delta P_k = \frac{V}{Y} N(P_k). \qquad (5)$$

Выражение (5) является уравнением в конечных разностях для определения динамики внутренней цены P_k при реализации внешнеторговой деятельности.

Располагая явной формой выражения для $N(P_k)$, перепишем разностное уравнение (5) в рекуррентной форме:

$$P_{k+1} = P_k - \frac{V}{Y}\left(\begin{array}{l} X_1 \cdot P_k^{\,2} - (X_0 - P_M \cdot M_1) \times \\ \times\ P_k + P_M \cdot M_0 \end{array} \right). \qquad (6)$$

Рассмотрим новую переменную $\overline{P}_k = P_k - P_1^*$, характеризующую отклонение цены от меньшего по величине равновесного значения. Из (6) сразу же получим:

$$\overline{P}_{k+1} = \left(1 + \frac{V}{Y}(X_0 - P_M \cdot M_1 - 2X_1 P_1^*) \right) \overline{P}_k - \frac{V}{Y} X_1 \cdot \overline{P}_k^{\,2}. \qquad (7)$$

С учетом формулы (2) нетрудно заметить, что

$$X_0 - P_M \cdot M_1 - 2X_1 P_1^* = D. \qquad (8)$$

Преобразуем выражение (8) к несколько иному виду, обозначив

$$X^* = X_0 - X_1 P_1^* \text{ и } M^* = M_0 + M_1 P_1^*$$

как равновесные величины объёмов экспорта и импорта, соответственно, связью между которыми есть

$$P_1^* X^* = P_M M^*. \qquad (9)$$

В таком случае при помощи (9) левая часть (8) преобразуется к виду

$$X_0 - P_M \cdot M_1 - 2X_1 P_1^* = X^*(1 - \eta_x - \eta_M),$$

где $\eta_X = \dfrac{P_1^* X_1}{X^*} > 0$, $\eta_M = \dfrac{P_1^* M_1}{M^*} > 0$ – эластичности по цене функций объемов экспорта и импорта. Тогда из (8) вытекает, что

$$D = X^*(1 - \eta_x - \eta_M). \qquad (10)$$

Очевидно, что для существования $D > 0$ необходимо выполнение условия $\eta_x + \eta_M < 1$.

Замена переменной $\overline{P}_k = \dfrac{Y + DV}{VX_1} y_k$ приведет к новой форме рекуррентного уравнения (7):

$$y_{k+1} = (1 + \theta) y_k (1 - y_k), \qquad (11)$$

$$\theta = \frac{V}{Y} D = \frac{V}{Y} X^* (1 - \eta_x - \eta_M). \qquad (12)$$

Разностное уравнение (11) есть не что иное, как квадратичное логистическое уравнение с положительном параметром θ. Решения (11) в зависимости от θ и произвольных начальных условий могут демонстрировать принципиально различные типы динамического поведения, такие как рост, убывание или периодические режимы с произвольной частотой. Кроме того, здесь возможны траектории, в которых вообще не наблюдается никакой регулярности.

Отображение $f(y) = (1 + \theta) y (1 - y)$ имеет две неподвижные точки: $y_1 = 0$ и $y_2 = \dfrac{\theta}{1 + \theta}$, которые соответствуют двум положениям равновесия рекуррентного уравнения (11). Данное отображение $f(y)$ преобразует отрезок [0; 1] в отрезок $\left[0; \dfrac{1 + \theta}{4} \right]$, и поэтому интересующее нас значение θ соответствует интервалу $0 \le \theta \le 3$.

Производной отображения есть

$$f'(y) = (1 + \theta)(1 - 2y).$$

Для положения равновесия $y_1 = 0$ имеет место

$$f'(y) = 1 + \theta,$$

что означает неустойчивость данной неподвижной точки, то есть $y_1 = 0$ всегда является отталкивающей точкой, или репеллером.

С другой стороны, $y_2 = \dfrac{\theta}{1 + \theta}$ дает $f'(y) = 1 - \theta$. Из условия устойчивости $|1 - \theta| < 1$ следует, что при $0 < \theta < 2$ точка является притягивающей (аттрактором), а при $2 < \theta < 3$ – отталкивающей (репеллером). В работах [5–7] представлены полностью топологические свойства уравнения (11):

1) каждое решение, начиная с точки $y_0 \in [0, 1]$, будет сходиться монотонно к y_2 при $0 < \theta < 1$ и колебаться вокруг y_2 при $1 < \theta < 2$;

2) при $2 < \theta < \sqrt{6}$ обе неподвижные точки становятся отталкивающими, и наблюдается притягивающий цикл периода 2, образованный двумя точками:

$$\overline{y}_{1,2} = \frac{1 + \theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4}}{2(1 + \theta)};$$

3) когда имеет место неравенство

$$\sqrt{6} < \theta < 2,569...,$$

то вышеуказанные точки y_1, y_2, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ являются отталкивающими, но появляется притягивающий цикл периода 4. Далее он меняет характер устойчивости, и рождается притягивающий цикл периода 8. Иначе говоря, наблюдается последовательное удвоение периода циклов с соответствующей бифуркацией. Предельным параметром удвоения периода служит значение $\theta \approx 2,569$;

4) если $2,569 \le \theta < 2,83$, то все состояния равновесия и циклы являются неустойчивыми;

5) при $2,83 \le \theta < 3$ рождаются циклы с произвольным периодом. В частности, наблюдается решение с периодом 3;

6) в случае θ = 3, помимо неподвижных точек и циклов произвольного периода, появляются нерегулярные, так называемые хаотические решения.

При θ = 3 рекуррентное уравнение (11) имеет вид:

$$y_{n+1} = 4y_n(1-y_n) \quad \textbf{(13)}$$

и явное решение в форме

$$y_n = \sin^2(2^n \cdot \arcsin\sqrt{y_0}).$$

На *рис. 1* для различных начальных условий y_0 представлены соответствующие значения y_n.

Из формулы (12) очевидна связь:

$$\eta_x + \eta_M = 1 - \frac{Y\theta}{VX^*}. \quad \textbf{(14)}$$

Пусть $\xi = \dfrac{Y}{VX^*}$ и $\gamma = \eta_x + \eta_M$ считаются с содержательной точки зрения экономически значимыми параметрами. Тогда на плоскости ξ, γ можно построить семейство прямых

$$\gamma_i = 1 - \theta_i\,\xi, \quad i = \overline{1,7} \quad \textbf{(15)}$$

для значений

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \theta_3 = 2, \quad \theta_4 = \sqrt{6},$$
$$\theta_5 = 2,569, \quad \theta_6 = 2,83, \quad \theta_7 = 3.$$

Данные прямые будут играть роль разделительных линий для вышеописанных динамических режимов, наблюдаемых при анализе качественного поведения решений рекуррентного логистического уравнения (11). *Рис. 2* является графическим представлением соотношения (15).

Абсолютно иное поведение при изменении цены наблюдается в системе при переходе от дискретного времени к непрерывному. В самом простом случае при замене конечной разности на производную уравнение (5) примет вид:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{V}{Y}N(P(t)). \quad \textbf{(16)}$$

В развернутой форме (16), аналогично (6), получим явно представление

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{V}{Y}(X_1 \cdot P^2 - (X_0 - P_M \cdot M_1)\cdot P + P_M \cdot M_0). \quad \textbf{(17)}$$

Если же ввести новую переменную

$$\tilde{P}(t) = P(t) - \frac{X_0 - P_M M_1}{X_1},$$

то, соответственно, имеем дифференциальное уравнение для отклонения цены от равновесия $\tilde{P}(t)$:

$$\frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = \frac{VX_1}{Y}\left(\frac{D}{4X_1^2} - \cdot\tilde{P}^2(t)\right). \quad \textbf{(18)}$$

Введём новую временную шкалу $\tau = \dfrac{Y}{VX_1}t$ и обозначим $\varepsilon = \dfrac{D}{4X_1^2}$. Тогда (18) перепишется так:

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tau} = \varepsilon - \tilde{P}^2(t). \quad \textbf{(19)}$$

В зависимости от знака величины ε возможны три вида решений (19) при заданном начальном условии $\tilde{P}(0) = \tilde{p}_0$:

$$1)\ \varepsilon < 0, \quad \tilde{P}(t) = \sqrt{-\varepsilon}\cdot tg\left(arctg\frac{\tilde{P}_0}{\sqrt{-\varepsilon}} - \sqrt{-\varepsilon}\cdot t\right), \quad \textbf{(20а)}$$

$$2)\ \varepsilon = 0, \quad \tilde{P}(t) = \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{P}_0 \cdot t + 1}, \quad \textbf{(20б)}$$

$$3)\ \varepsilon > 0, \quad \tilde{P}(t) = \sqrt{\varepsilon}\cdot\tan\left(\arctan\frac{\tilde{P}_0}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon}\cdot t\right). \quad \textbf{(20в)}$$

Явный вид решений (20а), (20б), (20в) вполне очевидным образом свидетельствует о существенной зависимости от знака величины ε, то есть от дискриминанта квадратного уравнения (1). Если предположить значение ε малой знакопеременной величиной, то легко наблюдать, как при небольших изменениях ε в малой окрестности нуля происходит принципиальное различие на качественном уровне в динамической структуре ценовых изменений $\tilde{P}(t)$. Именно здесь на первое место выходят методы качественного прогнозирования динамических систем, то есть методология разделения движения по траекториям, не опираясь на точное знание структурных параметров экономической системы [8].

При малых значениях ε дифференциальное уравнение (19) является модельным для изучения седло-узловой бифуркации. При ε > 0 (19) обладает двумя положениями равновесия $\tilde{P}^*_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon}$ – одно

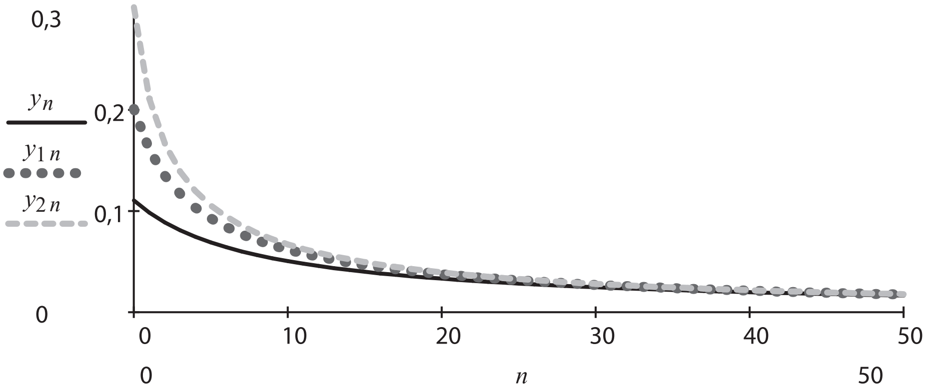

Рис. 1а. Переходные процессы в уравнении (11) при θ = 0 и начальных условиях y_0 = 0,1; y_0 = 0,2; y_0 = 0,3

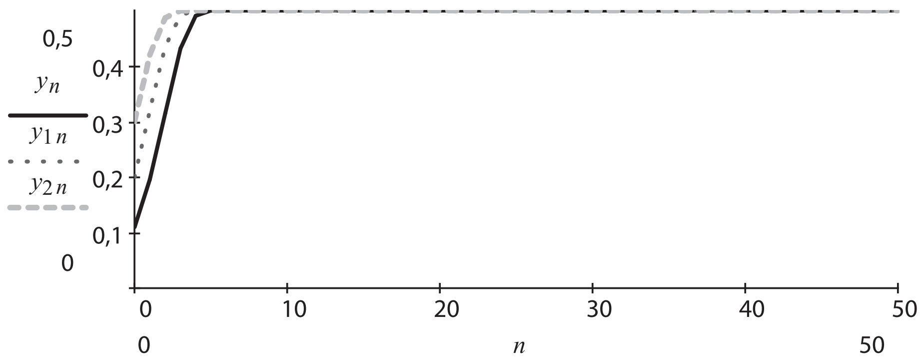

Рис. 1б. Переходные процессы в уравнении (11) при θ = 1 и начальных условиях y_0 = 0,1; y_0 = 0,2; y_0 = 0,3

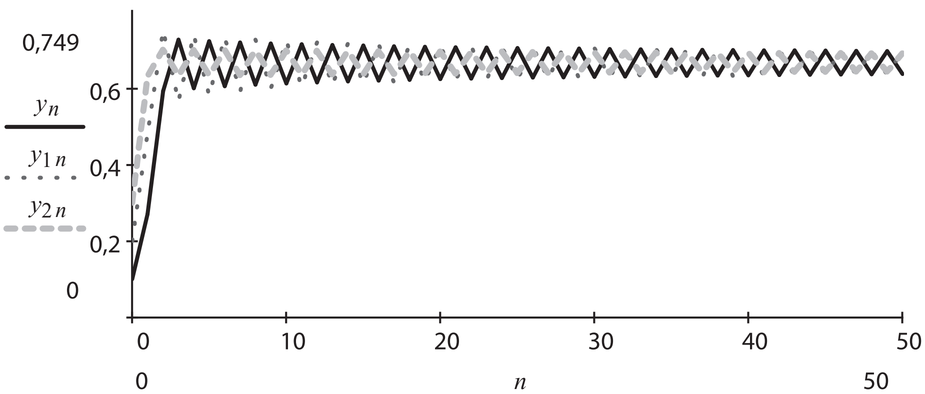

Рис. 1в. Переходные процессы в уравнении (11) при θ = 2 и начальных условиях y_0 = 0,1; y_0 = 0,2; y_0 = 0,3

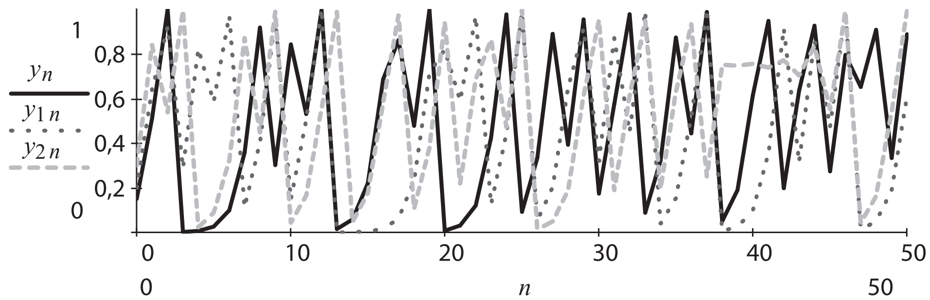

Рис. 1г. Переходные процессы в уравнении (11) при θ = 3 и начальных условиях y_0 = 0,15; y_0 = 0,2; y_0 = 0,3

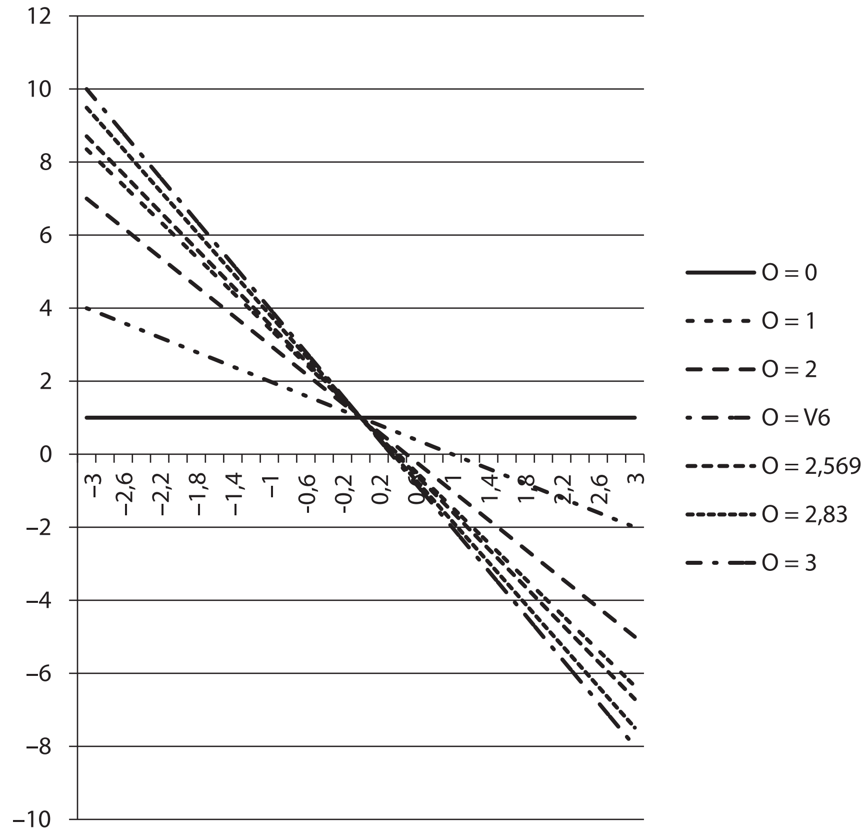

Рис. 2. Топологическая структура решений логистического уравнения (11)

из которых является устойчивым, а другое, соответственно, нет. При значении ε = 0 они стягиваются в так называемое полуустойчивое единственное состояние равновесия. Имеет место негрубая динамическая система, соответствующая решению (20б) типа «гиперболический рост». В случае ε < 0 положения равновесия не существует. Если наблюдать за устойчивым равновесным состоянием, то нетрудно заметить в случае приближения ε к нулю, что область притяжения данного равновесия существенно уменьшается. Далее происходит срыв равновесия с катастрофической потерей устойчивости.

Данный вид катастрофы – «складка».

На *рис. 3* приведены графические иллюстрации решений дифференциального уравнения (19), соответствующие явным функциям (20а), (20б), (20в) в зависимости от значения параметра ε.

Резюмируя, необходимо отметить, каким образом происходит саморегуляция ценообразования на внутреннем рынке при осуществлении экспортно-импортных операций. Формализм описания динамических процессов в классической модели Фишера предусматривает наличие контура обратной связи, которая может быть как положительной, так и отрицательной – в зависимости от значений структурных параметров. Характерной чертой данной модели является факт присутствия нелинейных (квадратичных) членов, определяющих возможность появления неустойчивых равновесных положений, генерирующих циклические процессы и хаотические режимы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fisher I.** Stabilizing the Dollar. New York : MacMillan, 1920. 365 p.

2. **Gondolfo G.** Economic Dynamics. Berlin and New York : Springer-Verlag, 2009. 830 p.

3. **Великий Ю. М., Воронин А. В.** Неустойчивость динамики цены в макроэкономическом уравнении Фишера. *Бізнес Інформ*. 2005. № 7-8. С. 61– 65.

4. **Воронин А. В.** Циклы в задачах нелинейной макроэкономики. Харьков : ИД «ИНЖЭК» , 2006. 136 с.

5. **Бобровски Д.** Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2006. 360 с.

6. **Табор М.** Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / пер. с англ. М. : Эдиториал УРСР, 2001. 320 с.

7. **Кроновер Р.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М. : Пост маркет 2000. 352 с.

8. **Базыкин А. Д.** Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. : Наука, 1985. 184 с.

REFERENCES

Bazykin, A. D. *Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy* [Mathematical biophysics of interacting populations]. Moscow: Nauka, 1985.

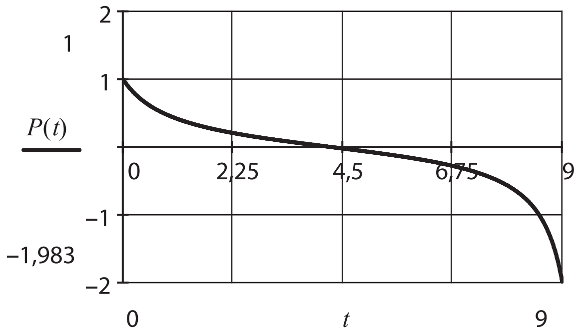

Рис. 3а. Динамика отклонения цены для ε = –0,09 (формула (20а))

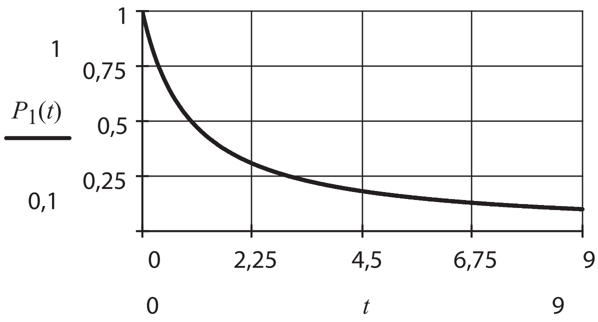

Рис. 3б. Динамика отклонения цены для ε = 0 (формула (20б))

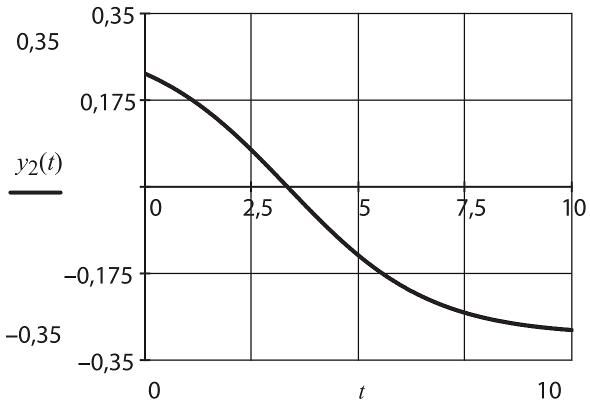

Рис. 3в. Динамика отклонения цены для ε = 0,09 (формула (20в))

Bobrovski, D. *Vvedeniye v teoriyu dinamicheskikh sistem s diskretnym vremenem* [Introduction to the theory of dynamical systems with discrete time]. Moscow; Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» Institut kompyuternykh issledovaniy, 2006.

Fisher, I. *Stabilizing the Dollar*. New York: MacMillan, 1920.

Gondolfo, G. *Economic Dynamics*. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2009.

Kronover, R. *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh. Osnovy teorii* [Fractals and chaos in dynamic systems. Fundamentals of the theory]. Moscow: Post market, 2000.

Tabor, M. *Khaos i integriruemost v nelineynoy dinamike* [Chaos and nonlinear dynamics integrability]. Moscow: Editorial URSR, 2001.

Velikiy, Yu. M., and Voronin, A. V. "Neustoychivost dinamiki tseny v makroekonomicheskom uravnenii Fishera" [Instability of price dynamics in Fisher's macroeconomic equation]. *Biznes Inform*, no. 7-8 (2005): 61-65.

Voronin, A. V. *Tsikly v zadachakh nelineynoy makroekonomiki* [Cycles in the tasks of nonlinear macroeconomics]. Kharkov: ID «INZhEK», 2006.