LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA PARA VINCULAR LA COMUNICACIÓN Y LA EVALUACIÓN EN EL AULA

MATHEMATICS AS A TOOL TO LINK COMMUNICATION AND EVALUATION IN THE CLASSROOM

Nahina Dehesa De Gyves

Doctorado con especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV. Tecnológico Nacional de México. Campus Instituto Tecnológico del Istmo, México. ndehesa@hotmail.com

Recibido: 17 de febrero de 2019
Aceptado: 2 de julio de 2019

Resumen

Cuando evaluamos también validamos lo que es importante en términos de la competencia matemática esperada y aunque en el presente trabajo no se abordan medidas necesarias cuando los resultados no son favorables, sí se plantean algunos aspectos en cuanto al cómo evaluar. Para ello se presenta un estudio de caso en relación a un tema de un curso de Álgebra lineal alrededor del cual se reflexiona sobre cuestiones generales que atañen a la comunicación de las matemáticas. Las matemáticas pueden apoyar la interacción humana debido a que su naturaleza simbólica es mediadora entre los diálogos entre docente y alumno. En el análisis de las prácticas discursivas del estudio de caso se cree pertinente tomar en cuenta el empleo de acciones como rotar, trasladar, enfocar diversos objetos matemáticos en dos y tres dimensiones, señalarlas, todas ellas necesarias en su comunicación y se pretende enfatizar que su empleo también es necesario a la hora de evaluar.

Palabras Clave: Prácticas discursivas, Interacción dialógica, Inteligencia espacial, Actos de habla, Recurso deíctico.

Abstract

When we evaluate we also validate what is important in terms of the expected mathematical competence and although in the present work no necessary measures are addressed when the results are not favorable, some aspects are raised as to how to evaluate. For this, a case study is presented in relation to a subject of a linear Algebra course around which it reflects on general issues that concern the communication of mathematics. Mathematics can support human interaction because its symbolic nature is mediating between the dialogues between teacher and student. In the analysis of the discursive practices of the case study, it is considered pertinent to take into account the use of actions such as rotating, moving, focusing various mathematical objects in two and three dimensions, pointing them out, all of them necessary in their communication and intending to emphasize that their Employment is also necessary when assessing.

Keywords: Discursive practices, Dialogic interaction, Spatial intelligence, Speech acts, Deictic resource.

Introducción

La evaluación es una actividad esencial en la práctica docente cuya repercusión incide no sólo al interior del aula, sino que va más allá. Por ejemplo para su realización se requiere de instrumentos que la investigación educativa ha ido perfeccionando con el paso del tiempo y para ello las diversas disposiciones oficiales también han jugado un papel muy importante. Por su parte el docente cuenta con un bagaje de información al respecto (y en el que se incluye su propia experiencia) que está en relación con la ponderación que considera relevante en cuanto a por ejemplo, exámenes escritos, tareas, participaciones orales dentro del salón de clases. En los años actuales también se influye por las provocadas por el empleo de tecnologías recientes como búsquedas por internet, presentaciones con diapositivas o aplicaciones móviles, por mencionar algunos ejemplos.

En particular, con las clases de matemáticas no es muy común evaluar habilidades verbales o narrativas cuando existe una presión al docente por cumplir con una revisión de problemas y ejercicios relacionados con el programa oficial de estudios. Aunque acontece, en el salón de clases no es lo común encontrar la mano alzada por parte del estudiante para dar pie a narraciones sobre hechos o sentimientos respecto a su relación con la matemática. En su lugar, es más frecuente que cuando un alumno se encuentra dispuesto a participar, lo realice en términos de querer resolver algún reto o ejercicio matemático.

Así, entre la comunidad docente cuando se habla de la palabra “participativo” por lo general se hace alusión a una buena disposición del alumno para resolver ejercicios matemáticos o para ayudar a otros compañeros a resolver los problemas planteados. A este empleo de prácticas discursivas alrededor de ejercicios, problemas o representaciones matemáticas es donde pone el foco de atención el presente escrito.

La tesis principal del actual trabajo es que para facilitar la comunicación dentro del aula, entre docente y alumnos o entre alumnos con otros alumnos, la matemática puede ser un puente. Para explicar con más detalle cómo, en secciones posteriores del documento se emplean los términos de actos de habla y declaraciones actuantes para referirse a un intercambio discursivo en el que existe una interacción dialógica más amplia entre docente y estudiante que involucra el empleo de representaciones matemáticas.

Y así como en los cursos de matemáticas es natural encontrar al estudiante alrededor de una matemática expuesta ya sea en el pizarrón, en el cuaderno o en algún otro medio también en el presente trabajo retomaremos un tema específico para explicarnos, el de combinación lineal que se cursa en la materia de Algebra lineal. No sólo eso, retomaremos para su estudio, el caso de un alumno, Martín.

En la parte final de la presente exposición se discutirá si al existir un clima en el que es posible establecer una comunicación más fluida entre docente y estudiante, ello puede provocar también una evaluación más fluida que permita al docente adaptarse de forma más natural a lo que ahí sucede. Si el alumno, por su parte, mediante las declaraciones actuantes que se describirán puede tener un mayor control acerca de su participación en clases ello podría ubicarlo en mejor posición de responsabilizarse de su aprendizaje.

Tocar los anteriores puntos es importante debido a que permite distinguir la labor compleja del docente en términos de dos de sus papeles cruciales: la de comunicador y la de evaluador. Por una parte el docente es miembro activo de una comunicación (en cuanto que puede intervenir en caso de requerirse su corrección en tiempo real). Y aunque para tomar decisiones emergentes el docente evalúa el estado del aula en forma continua, sí existen momentos posteriores, donde el docente resume su evaluación para cada alumno y toma mayor protagonismo su papel como evaluador.

La comunicación escrita

Partamos de una definición expuesta en el libro.” Álgebra lineal y sus aplicaciones” de Lay (2007), en la Tabla 1 se expone la correspondiente al tema “Combinación lineal”:

Combinaciones lineales

Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ y los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$, el vector $\mathbf{y}$ definido por

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

se llama **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ con **pesos** $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Tabla 1. Definición en términos algebraicos

A la anterior definición que se expresa en términos algebraicos (por el empleo de números y letras), la acompaña la siguiente exposición:

En una combinación lineal, los pesos pueden ser cualesquiera números reales, incluso el cero. Por ejemplo, algunas combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son

$$\sqrt{3}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \qquad \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 \; (= \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{0} \; (= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2)$$

Tabla 2. Ejemplos en términos algebraicos

Inmediatamente después de los anteriores ejemplos, recurre a la siguiente estrategia:

EJEMPLO 4 En la figura 8 se identifican algunas combinaciones lineales seleccionadas de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Observe que los conjuntos de líneas paralelas de la rejilla están trazados mediante múltiplos enteros de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.) Estime las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que generan los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$.

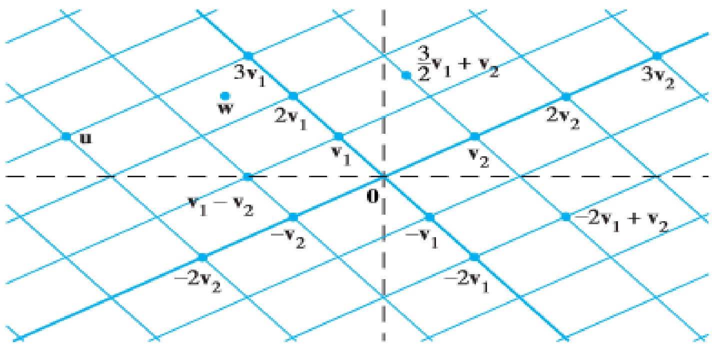


FIGURA 8 Combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Tabla 3. Empleo de representaciones geométricas

Recapitulando, en la Tabla 1 el autor no inicia su definición a partir del concepto de espacio vectorial ni de campo pero sí recurre al registro algebraico para dar generalidad a que se trata de cualquier vector (de dimensión n) y que también empleará cualquier escalar. Con los ejemplos de la Tabla 2 permite precisar la parte de "cualquier escalar". Por último, con los ejemplos de la Tabla 3 permite definir una geometría en forma de malla al combinar el vector inicial uno con el vector inicial dos para obtener la resultante expuesta en la Tabla 3[1].

[1] Existen aportaciones muy detalladas en didáctica de la matemática en torno al Álgebra Lineal. Podemos mencionar los realizados desde los años 90´s por Jean-Luc Dorier (Dorier (1991)). El tema de Combinación Lineal también ya ha sido abordado por Parraguez et al (2014) quienes realizan desde la teoría APOE (siglas de los términos: Acción, Proceso, Objeto y Esquema) un modelo cognitivo con el objetivo de describir cómo el estudiante puede construir el concepto matemático de Combinación Lineal.

La comunicación en el aula

El docente no siempre puede limitarse a transcribir lo escrito en los libros de texto debido a que el aula se conforma por individuos, los alumnos preguntan y en caso de no interrumpir explícitamente la exposición del docente también participan asintiendo o no, teniendo una actitud atenta o distraída por mencionar sólo algunos ejemplos. La comunicación que tiene el docente en el aula requiere de retroalimentación continua para sostenerse en cierto ritmo y no caer en la monotonía.

Para ejemplificar veamos una estrategia que se implementó en el aula en el semestre Agosto- Diciembre 2016. Para ello el profesor ya había empleado la definición de la Tabla 1 e intenta partir de dos vectores específicos del plano cartesiano, los dos vectores de hecho (mencionados abajo) se pueden trazar en el primer cuadrante. También recurre a un tercer vector en el mismo cuadrante denominado “z” que será el resultado de combinar a los dos vectores iniciales dados. Veamos parte de su exposición:

El docente y el registro algebraico

(Se escribe en el pizarrón conforme el profesor toma la palabra:)

combinar $\vec{x}=(2,1)$, $\vec{y}=(1\,,\,4)$ para obtener $\vec{z}=(5,6)$

$$\alpha(2,1)+\beta(1,4)=(5,6)$$
$$(2\alpha+\alpha)+(\beta+4\,\beta)=(5,6)$$
$$(2\alpha+\beta\,,\,\alpha+4\beta)=(5,6)$$
$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=5 \\ \alpha+4\beta=6 \end{cases}$$

Profesor: …vamos a suponer que existen escalares alfa y beta que permitirán no sólo multiplicar los vectores originales “x” y “y” sino que al sumarlos vamos a obtener el tercer vector deseado “z”.

(al mismo tiempo escribe los 2 primeros renglones de lo expuesto en el pizarrón)

…

Profesor: Algebraicamente lo anterior nos lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo obtenemos valores específicos para alfa y beta. ¿Podemos recordar cómo resolver ese sistema? (señalando al sistema). Es importante hacerlo ya que así se encontraría una forma de combinar los vectores originales x, y para obtener el tercer vector z.

(Se proporciona aproximadamente 20 minutos para que los estudiantes encuentren la solución. El profesor primero recurre a dudas individuales y después retoma el tema para todo el grupo)

Cuando los alumnos se dan cuenta que pueden emplear algún método de resolución ya practicado en sesiones anteriores se dan a la tarea de proseguir por si mismos para encontrar la solución. Los alumnos mencionados estuvieron expuestos a tres clases presenciales (de una hora cada una) encaminadas a practicar la estrategia descrita pero ahora con otros ejemplos.

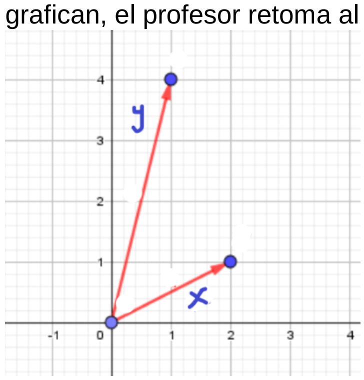
Posteriormente también contaron con un desarrollo geométrico expuesto en la siguiente sección para reforzar la anterior parte algebraica.

El docente y el registro geométrico

Para complementar la parte de desarrollo algebraico se destinaron tres sesiones más de 1 hora cada una para practicar la siguiente estrategia:

El docente se da a la tarea de trazar en el pizarrón:

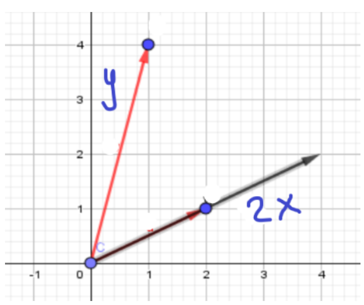
Profesor: Antes de comprobar si los valores de alfa y beta encontradas sirvieron para algo, primero recordemos cómo graficarlas… intenten graficar los vectores dados “x” y “y”... (Después de dar unos minutos y observar cómo grafican, el profesor retoma al pizarrón y grafica)…



Profesor: recordemos que los vectores también se pueden representar con flechas en un plano cartesiano como los mostrados en la figura.

Ahora intenten graficar a “alfa x” y “beta y”… ¿qué les da?

(Después de unos minutos de observación, prosigue..)

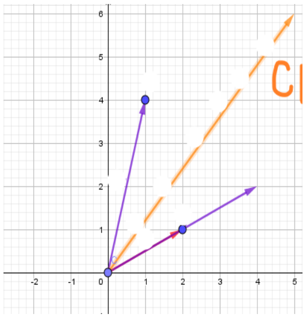


Profesor: Vemos que una idea importante es que al multiplicar un vector por un número escalar lo que hacemos es agrandarlo o achicarlo... por ejemplo alfa igual a dos y beta igual a uno obtenidos por el método algebraico, nos da…

(damos unos minutos para observar lo que realizan y proseguir)

Profesor: Ahora súmenos…

(damos unos minutos para observar lo que realizan y proseguir)



Profesor: el vector suma que se representa como el vector punteado y además se representa como la diagonal del paralelogramo formado por los vectores alfa “x” y beta “y”…

(damos unos minutos para proseguir)

¿Este vector suma es el “z”?

La intención de emplear la parte geométrica es corroborar si los valores encontrados en la parte algebraica permiten agrandar o disminuir los vectores iniciales para obtener el tercer vector. A continuación veremos algunas implicaciones de la exposición docente en el sentido de si el estudiante puede reproducir los métodos sin su intervención.

La evaluación

El curso del semestre de Agosto a Diciembre del 2016 contó con una participación de 43 alumnos. Dichos alumnos presentaron un examen con la misma estructura de los ejercicios realizados en clase, dados dos vectores, encontrar la forma de combinarlos para obtener un tercer vector (tanto en su forma gráfica como algebraica). En todo momento podían ver sus apuntes para corroborar el método sin embargo, no podían hablar ni socializar sus respuestas.

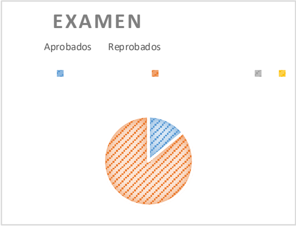


Figura 1. Porcentaje de aprobados (16.27%)

Aprobaron 7 alumnos y tal como se muestra en la Figura 1 el porcentaje corrobora que no fue suficiente la estrategia dedicada para exentar esta parte del programa de estudios. Dentro de los errores después de haber evaluado al alumno, podemos mencionar principalmente los aritméticos (con la suma y producto de números enteros) y algebraicos (suma y producto de expresiones algebraicas). En cuanto a la evaluación del aspecto geométrico, no contribuyó a la puntuación general debido a que prácticamente los alumnos no tocaron esa parte (sólo un estudiante pudo comprobar correctamente su solución mediante el método geométrico y sólo tres más lo intentaron sin éxito) por lo que el porcentaje de aprobación se realizó tomando en cuenta sólo la parte algebraica[1].

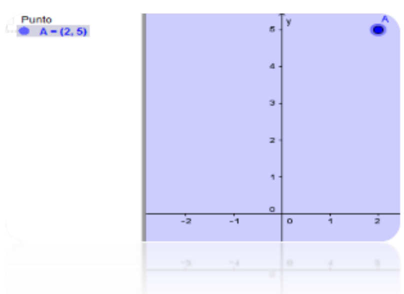
Ante dichos resultados se han buscado otras formas de evaluar al alumno. Menciona Sánchez (2019) que a diferencia de las metodologías tecno-instrumentales que miden sólo conocimiento, refiriéndose al examen, se requiere de construir evaluaciones adaptadas a los saberes cotidianos de los estudiantes con estrategias pedagógicas y metodológicas de evaluación cualitativa que permitan conocimientos más pertinentes. Y en esa búsqueda de un acercamiento más personal tratando de indagar proyectos que sean de un interés más personal para el alumno se reconoce el esfuerzo de Martin que trataremos a continuación.

La invitación fue abierta a todos los alumnos para que emplearan maquetas, juegos, software o cualquier otro dispositivo que creyeran se pudiera ajustar a lo ya visto en las clases expositivas ya proporcionadas con el tema de combinación lineal[2].

Desde las entrevistas iniciales con Martin él ya trae instalado en su laptop el software gratuito Geogebra, Link
http://matematicas8iecm.wikispaces.com/file/view/GeoGebra.pdf

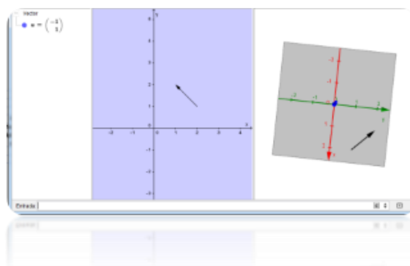
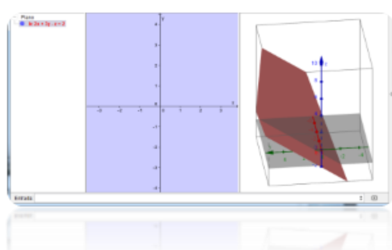
En la columna derecha de la siguiente (Tabla 4) él presenta una descripción:

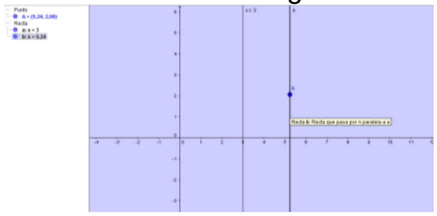
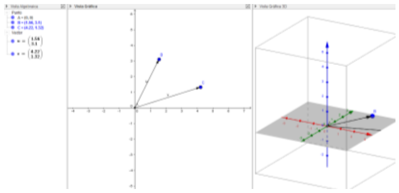
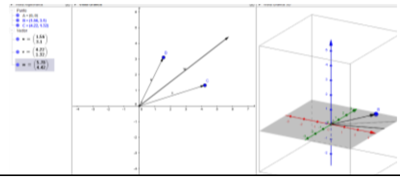
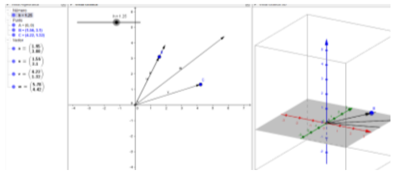
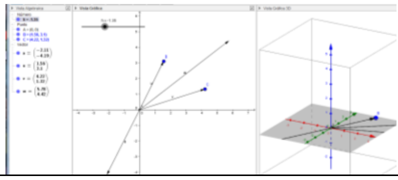
Tabla 4.
Discurso de Martin ante el docente

Lenguaje Matemático	Representación Matemática e Instrucciones (Geogebra)
Punto	Ingresar en la entrada el punto a graficar pulsar la tecla intro. Ejemplo si las coordenadas del punto a graficar es de 2 en el eje X y 5 en el eje Y, se ingresara (2,5). Geogebra pone Automáticamente en la vista Algebraica los datos del punto y en la vista grafica muestra el punto. 

[1] Eisenberg y Dreyfus (1999) en sus observaciones comparaban el proceso de visualizar geométricamente como más difícil para los estudiantes que el proceso algebraico, en Dehesa (2006) se cuestiona si más bien el docente ha fomentado en el transcurso de varios cursos el empleo de lo algebraico porque presenta menos obstáculos que lo geométrico a la hora de calificar.

[2] En Dehesa y Regalado (2018) se exponen ciertas estrategias para administrar ese tipo de proyectos de los alumnos a lo largo de un semestre.

Recta	1._ En la entrada se ingresa la recta a trazar. Ejemplo si se trazara la recta x=3, Lo que se hace es en la entrada ingresa x= 3y pulsar intro, automáticamente Geogebra graficara la recta, en el área de vista algebraica aparecerá la función de la recta. 
Vector	Para la graficación de un vector, solo con ingresar a palabra vector, nos aparecerá una ayuda y seleccionamos el que incluye punto inicial y punto final. Ejemplo un vector con punto inicial en la coordenada (2,3) y punto final en la coordenada (3,2), se ingresaría de la siguiente manera, Vector[(2,3), (3,2)] 
Plano	Para la graficación de un plano, tan solo es necesario ingresar la ecuación del mismo y pulsar la tecla intro. (Activar la vista en 3d). 2x+3y-z=2 
Paralelos	Para obtener una recta paralela se deben seguir los siguientes pasos: Suponiendo que se tiene la recta x=3. Vamos a la barra de herramientas, en el cuarto recuadro se encuentra la opción de recta paralela el cual seleccionamos. Después de realizar esto procedemos a seleccionar la recta x=3 con un clic y automáticamente se generará una recta paralela a x=3, si

	movemos el cursor veremos la recta y se actualizará la tabla de medidas en la vista algebraica de lado izquierdo del graficador. 
Suma de vectores	Para sumar dos vectores se siguen los siguientes pasos: Suponiendo que se tiene el vector A y B. Basta con ingresar en la entrada de comandos Vector [a+b] y pulsar la tecla intro.  Como se observa en la siguiente imagen, geogebra nos presenta la suma de ambas, y si no movemos ya sea el vector A o B, el vector s resultante se actualizará automáticamente. 
Multiplicación de un vector por un escalar	La multiplicación de un vector por un escalar se realiza de la siguiente manera: Suponiendo que se tiene un vector B y queremos multiplicarlo por el escalar h, en la entrada de comandos se ingresara el siguiente comando vector[h*B] y pulsar la tecla intro, geogebra nos preguntará si queremos crear un deslizador para el escalar y de damos clic en sí. Ahora podremos con el deslizador mover el valor del escalar y ver los resultados al instante.  

Lo que llama la atención al docente de la descripción de Martin expuesta en la Tabla 4 es que ha conseguido un medio para argumentar y expresarse con cierta independencia empleando términos matemáticos (vectores, suma de vectores, multiplicación, etc).

Así que el discurso de Martin puede ser analizado bajo ciertos parámetros que se discutirán en la siguiente sección.

El análisis de las prácticas discursivas

En “Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología” (Hitt, 2003) se precisa que para la construcción de conceptos matemáticos es necesario realizar tareas que incluyan más de un tipo de representación (y no sólo emplear por ejemplo el álgebra). En este sentido Ramírez et al (2013) identifican cuatro registros de representación que pueden emplearse específicamente para solucionar temas del Álgebra Lineal: gráfico sintético, cartesiano, matricial y algebraico (este último lo señala como quizá el más usado cuando se definen conceptos o se redactan teoremas al emplear letras, números y símbolos para representar diversos tipos de objetos como vectores, escalares y operaciones. En el presente trabajo sólo se han retomado dos: el geométrico y el algebraico.

También para Duval (1999) la pluralidad de sistemas semióticos, los cuales consisten en diversas presentaciones de un mismo objeto, permite aumentar la capacidad cognitiva de los sujetos. De hecho distingue tres tipos de actividades cognitivas: formación (para “expresar” una representación mental o bien pasar “evocar” un objeto real), tratamiento (cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro) y conversión (cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial).

Por su parte, desde la perspectiva de Radford (2003) los gestos preparan el espacio donde la designación de objetos puede ocurrir posteriormente, donde los estudiantes pueden ver y tomar conciencia de la indeterminación de los signos algebraicos. Así, los gestos no sólo pueden ayudar a visualizar (Radford 2006, Presmeg, 2006), también toman lo que es imposible por la percepción directa: los gestos personifican las cosas que no pueden ser vistas, pero el rol de los gestos sólo puede ser entendido si estos son examinados en un contexto amplio, en un juego dialéctico de diversos sistemas semióticos movilizados por los profesores y estudiantes en el aula.

Es la perspectiva sociocultural Vygostkiana la que permite analizar prácticas discursivas (Wells 1999, Candela 1999) y se complementa con el enfoque constructivista del que ya ha hablado Hitt (2003) para diseñar un contexto de análisis discursivo en la que se incluyan medios de objetivación como los gestos, las palabras y el ritmo, como medios para crear la expectación de que vendrá un evento con cierto orden y constancia.

Los actos de habla

No hay que pasar desapercibido lo que se hace con las manos por dos razones principales. La primera tiene que ver con lo que Hannaford (2008) identifica como el reconocimiento de un papel central al movimiento de las manos en el aprendizaje. Para la autora su empleo sí permite construir redes nerviosas de más de una formas. Se refiere no sólo a su papel ejecutivo sino de exploración y la no menos importante función expresiva.

Un segundo factor de importancia central para el presente trabajo se relaciona con lo que Gardner (2013) identifica como la habilidad de simbolizar[1]. A la posibilidad de simbolizar Gardner la relaciona directamente con la activación de la inteligencia espacial. Así que si el alumno cuenta con herramientas como el Geogebra que le pueden permitir simbolizar, ellas mismas le pueden proporcionar evidencia de que ha actuado su inteligencia espacial.

Reajustando la declaración de Martin expuesta en la Tabla 4 vemos que define algunas de las representaciones matemáticas como recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, plano, vector, vector tangente, suma de vectores, multiplicación de un vector por un escalar por mencionar algunos ejemplos y se apoya de la manipulación del software para representarlos. De hecho tal como se menciona en la Tabla 5 emplea tres vías de comunicación: la oral (CO), la geométrica (CG) y la manual (CM). Son estas tres vías las que cada una por su lado pero también juntas permiten no sólo representar matemáticamente también facilitan la comunicación.

Con la formación de representaciones geométricas como las expresadas en la Tabla 5, Duval (1999) permite relacionarlas con actividades cognitivas, específicamente con la que identifica como de “formación”. Los actos de habla entonces permiten entonces definir terminología matemática no especialmente en términos de otras palabras, sino más bien en términos de acciones: poner un punto, rectas, etc.

Y así como el conocimiento de las reglas del alfabeto permite construir oraciones más o menos extensas, las actividades de formación también son importantes porque a partir de ellas se pueden construir discursos de mayor elaboración. Duval (1999) las identifica como de Tratamiento. En la Tabla 6 se ejemplifica lo anterior.

[1] Para este autor es precisamente dicha habilidad la que proporciona uno de los factores más importantes que separan a los seres humanos de la mayoría de las otras especies.

Tabla 5.

Formación de representaciones

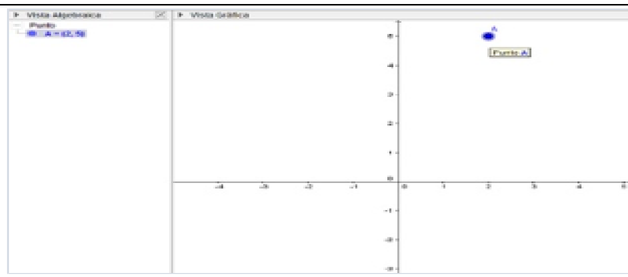
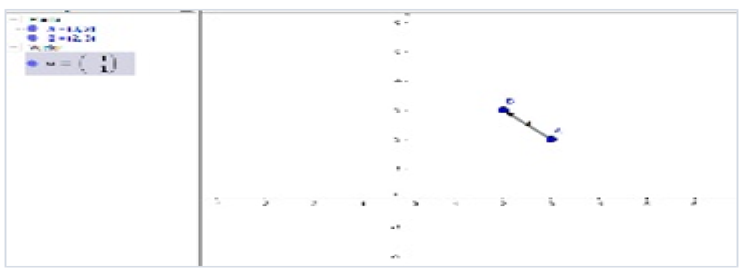
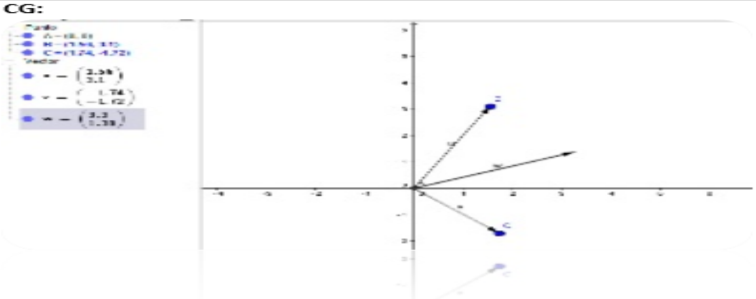
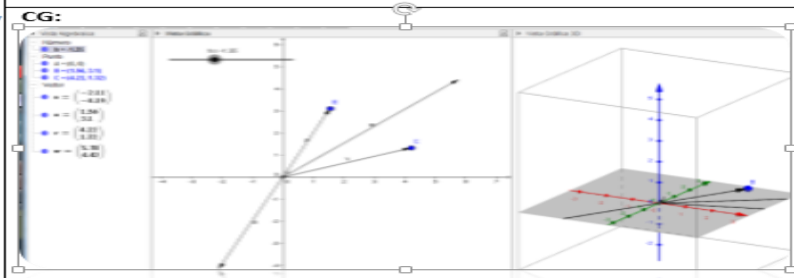
CO: Esto es un Punto	
CG: 	**CM:** Se ingresa en la entrada el punto a graficar y se pulsa la tecla intro. (**CO:** Ejemplo si las coordenadas del punto a graficar es de 2 en el eje X y 5 en el eje Y), se ingresara (2,5).
CO: Esto es un Vector	
CG: 	**CO:** …(para ingresar un vector con punto inicial en la coordenada (2,3) y punto final en la coordenada (3,2), se ingresaría de la siguiente manera): **CM:** Ingresa Vector[(2,3), (3,2)]

Tabla 6.

Tratamiento de representaciones

CO: Sumemos dos vectores	
CG: 	**CO:** Suponiendo que se tiene el vector u y v. Basta con ingresar en la entrada de comandos u+v y pulsar la tecla intro. Como se observa en la siguiente imagen, geogebra nos presenta la suma de ambas, y si no movemos ya sea el vector A o B, el vector resultante se actualizara automaticamente. **CM:** Se ingresa u+v.
CO: Multipliquemos un vector por un escalar	
CG: 	Suponiendo que se tiene un vector B y queremos multiplicarlo por el escalar h, en la entrada de comandos se ingresará lo siguiente comando. **CO:** [h*B] y pulsa la tecla intro.

Las declaraciones actuantes

Es importante recordar que lo expuesto por el alumno no se da en un ambiente en el que el alumno sólo repite lo que hace el docente. En este caso, el alumno explora sus propias vías de comunicación que además le están permitiendo representar signos (matematiza)[1]. También se han revisado algunos conceptos[2] que permiten enmarcar lo realizado por el alumno más allá de catalogarlos como la realización de formas ocurrentes de trabajo.

Las actividades cognitivas de formación y tratamiento expuestas por Duval (1999) pretenden ser piezas que permitan describir un aumento en la complejidad cognitiva. Se esperaría entonces que a medida que se va complicando el surgimiento de representaciones matemáticas también las declaraciones asociadas a ellas se van convirtiendo en más elaboradas, llámense a ellas declaraciones actuantes. En la Tabla 7 ya se empiezan a distinguir dichas declaraciones debido a que también se pretende dar respuesta al problema original que de hecho es más elaborado.

Recapitulando, en las clases normales sobre combinación lineal se describe una forma para encontrar los valores de alfa y beta empleando un procedimiento algebraico y se emplea un procedimiento geométrico para verificar dicho resultado.

Con los primeros actos de habla mostrados por Martin se ejemplifica cómo el estudiante puede adueñarse de una descripción de las representaciones matemáticas que ocupará más adelante. Sin embargo, las declaraciones actuantes pueden estar compuestas por un mayor número de acciones manuales y orales. Así las declaraciones mencionadas se refieren a un tipo particular de oración: a aquellas en que además de decir algo, se hace algo: mover las vectores, superponerlos, mover el deslizador. Todo ello en aras de activar una práctica discursiva más dinámica[3].

---

[1] El formato de demostración matemática o el del empleo de algún método de solución de ecuaciones o sistema de ecuaciones es por excelencia algebraico y por lo tanto el formato que se adecua mejor es el escrito, tanto para el que resuelve como para el que evalúa. Los métodos geométricos requieren de varias rutas de seguimiento que hagan que al evaluador, muy posiblemente no le baste el observar un examen escrito, sino que requerirá del señalamiento gestual o manual en tiempo real cuando se realiza la comunicación; es más dinámico en cuanto a que su interacción es más parecida a un diálogo.

[2] En Dehesa (2006, 2008) se analizan prácticas discursivas necesarias para dicho fin y la importancia de analizar el discurso lo provee Walkerdine (1982) al mencionar que el razonamiento lógico y el razonamiento matemático no se producen sólo en contextos de discurso y comunicación, sino que son en sí mismos formas de discurso.

[3] Tal como podemos observar en las declaraciones empleadas con el Geogebra de las páginas anteriores, se realizan deducciones y conclusiones a partir de señalar lo observado (punto, vector, suma de vectores, etc.) el término declaraciones actuantes mencionadas en Dehesa (2006) se retoman en el presente trabajo no sólo como complementarias al registro geométrico, son de hecho, los argumentos que evidencian el empleo de la inteligencia espacial. Estas formas de comunicarse más allá de discutir si se tratan en argumentos matemáticos por sí mismos, evidencian el empleo de un tipo de inteligencia, la espacial.

Tabla 7.
Multiplicación de un vector por un escalar

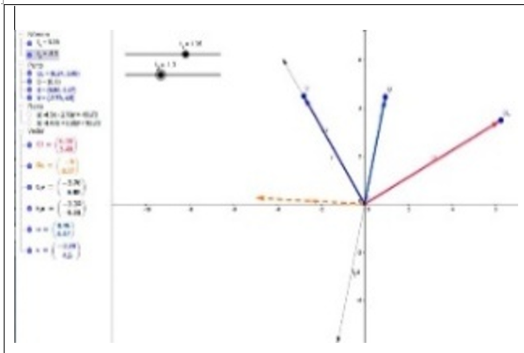
Profesor: ¿Cómo combinar a u y v para obtener z?	
	Martin: Los escalares t1 y t2, multiplicaran al vector v y u respectivamente. Como se muestra en la imagen. Como podemos ver en la imagen el vector v esta multiplicado por un valor de t1 = 1.5, (Se aprecia en la imagen que el resultado de esta multiplicación es un vector más grande), y el vector u esta multiplicado por un valor de t2 = 2, lo que significa que el vector resultante sería el doble de tamaño que el mismo vector resultante.

Tabla 8.
La suma de vectores

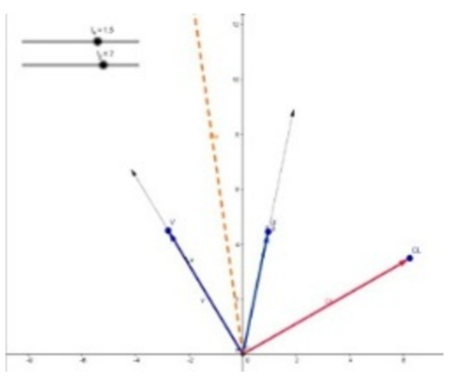
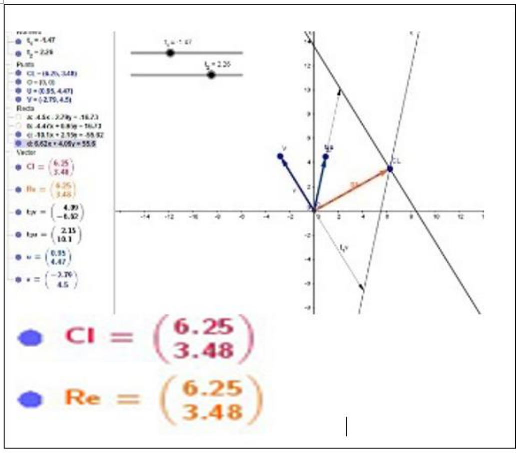
	Martin: Podemos ver que el vector suma RE es la diagonal naranja del paralelogramo formado por u y v. El vector Re es la resultante de sumar los vectores también resultantes de la multiplicación del vector u y v con su respectivo escalar. En la imagen el valor de los escalares es igual a 1. En este caso el vector seria t1*v + t2*u. Para lograr que el vector Re gire, esto se logra moviendo el valor de los escalares. Al multiplicar un vector por un número negativo, dicho vector cambiara de sentido.

Tabla 9.

La combinación de vectores

	Martín: Ahora se procede a encontrar el vector CL, y esto sería moviendo los escalares t1 y t2 hasta que el vector de color naranja (Re) se sobre ponga al vector marcado con el color rojo (CL), de esta manera tendríamos la respuesta de la combinación lineal. Para comprobar esto podemos revisar la vista algebraica y veríamos que los valores de CL y Re deben ser iguales. Como se puede ver el Re es igual al Vector CL.

El deslizador que emplea para manipular “cualquier escalar”, la línea naranja que él distingue como un “vector suma”, el color rojo que él identifica como el vector combinación son instrumentos que en terminología Vygostkiana pudieran denominarse instrumentos psicológicos simbólicos en el sentido que personifican las relaciones matemáticas indefinidas para hacerlas aparentes.

El deslizador es una representación “virtual” de lo que algebraicamente denotamos como alfa o beta, es decir, cualquier valor que pueda tomar alfa (o beta) dentro de un rango posible de valores. La línea naranja “virtual” es matemática en el sentido que representa cualquier combinación de los vectores originales (no sólo es matemática, específicamente es geométrica).

Conclusiones

Algunas de las prácticas discursivas que se desarrollaron en torno al software pueden no tener el aspecto matemático algebraico riguroso pero sí pueden permitir que el estudiante pueda emplearlas para su defensa, en el siguiente sentido: al permitirles argumentar no sólo mediante palabras sino incluyendo señalamientos sobre los objetos que crea con su cursor, dicho dominio puede repercutir más allá del aprendizaje matemático, al incluir cierto sentimiento de autonomía de controlar su aprendizaje.

Por otra parte, los movimientos realizados por el estudiante con el software pueden llegar a ser inciertos pero también pueden provocar que se adueñe de un espacio propio, de creación y de experimentación que le permita comunicar de mejor manera sus ideas intuitivas.

En conclusión, es posible que en las prácticas docentes validemos para la comunicación pero principalmente para la evaluación, el señalar deícticamente lo observado (punto, vector, suma de vectores, etc.). También es posible proporcionar un espacio donde las representaciones matemáticas “surjan” o se “matematicen” y para ello es posible que sea válido que el estudiante elija su propio medio de expresión (software, maqueta o cualquier otro tipo).

En la experiencia presentada, el docente se vuelve copartícipe y amplía su papel a no sólo restringirse a corregir matemáticamente la respuesta del estudiante. Puede brindar mayores oportunidades de expresión al estudiante al evaluarlos aunque para ello requiera de cuestionar sus propias creencias docentes acerca de lo que consiste la evaluación, la matemática y la formación del estudiante, para reflexionar en términos como expresión, innovación, confianza y equidad.

Referencias

Dehesa, Nahina (2008), *Las prácticas discursivas en la construcción de registros semióticos de representación. El caso del Campo de Pendientes (Tesis Doctoral)*, México, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Dehesa, Nahina (2006), “Discursos en los registros algebraico y geométrico de las ecuaciones diferenciales” en *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 2, pp. 123-147.

Dehesa, Nahina & Jorge Regalado (2018), *“Taller de Ciencias Básicas: Manos a la Obra Matemáticas”*. Memorias del Congreso Internacional de Investigación Academia Journals de Morelia, vol.10, tomo 6, pp. 910-915.

Dorier, Jean-Luc (1991), “Sur l´enseignement des concepts élementaires d´álgébre linéaire à l´université” en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11, núm. 2 y 3, pp. 325-364.

Duval, Raymond (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Colombia, Universidad del Valle.

Eisenberg, Theodore & Tommy Dreyfus (1991), “On the Reluctance to Visualize in Mathematic” en *Vizualization in Teaching and Learning Mathematics*, núm. 19, pp. 25-37.

Gardner, Howard (2013), *Inteligencias múltiples: la teoría en la práctica*, Barcelona, Paidós.

Hannaford, Carla (2008), *Aprender moviendo el cuerpo: no todo el aprendizaje depende del cerebro*, México, Pax.

Hitt, Fernando (2003), “Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología” en *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. 10, núm. 2, pp. 213-223.

Lay, David (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones.* México: Pearson educación.

Parraguez, M., López, U. & Libeth, V. (2014), “Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores” en *Scientia Et Technica*, 19(3), 329-334.

Presmeg, Norma (2006), “Research on visualization in learning and teaching mathematics” en Angel Gutiérrez & Paolo Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Inglaterra, Sense Publishers, pp. 205-235.

Radford, Luis (2006), “Introducción. Semiótica y educación matemática” en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, núm. Especial, pp. 7-21.*

Radford, Luis (2003), “Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization” en *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 5, núm. 1, pp. 37-70.

Ramírez, Osiel, César Romero & Oktac Asuman, (2013), “Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano” en Yuri Morales & Alexa Ramírez (eds.), *Memorias I CEMACYC*, Santo Domingo, CEMACYC, pp. 1-11.

Sánchez, Yerlys (2019). “Complejidad-Cotidiana-Etnomatemática en la enseñanza de las matemáticas”. *Praxis Investigativa Redie*, .11(20), 23-35.

Walkerdine, Valerie (1982), “From context to text: A psychosemiotic approach to abstract thought”. En M. Beveridge (comp.), *Children Thinking through Language*, Londres, Edward Arnold.