

# El campo magnético generado por las bobinas de Helmholtz y su aplicación a la calibración de sondas

Fano W. G., Alonso R. y Quintana G.

†Universidad de Buenos Aires, Departamento de Electrónica, Laboratorio de Radiación Electromagnética  
Av. Paseo Colón 850 - C1063ACV - Buenos Aires - Argentina

Recibido: 20/07/17; Aceptado: 20/08/17

**Abstract**—The coils are usually used to establish a known and uniform magnetic field zone for various applications. It is important to know the area where this magnetic field is uniform with the different spatial variables  $x, y, z$ . In the area where a uniform magnetic field is generated, sensor and magnetic field probes calibrations can be made in a low frequency range. This work is dedicated to calculate and measure the magnetic field generated by Helmholtz coils and to determine the uniformity and accuracy of the magnetic field with respect to the center of symmetry of the studied system.

**Resumen**— Las bobinas de Helmholtz habitualmente se usan para establecer una zona de campo magnético conocido y uniforme para diversas aplicaciones. Es importante conocer la zona donde dicho campo magnético es uniforme con las distintas variables espaciales  $x, y, z$ . En la zona donde se genera un campo magnético uniforme, se pueden hacer las calibraciones de sensores magnéticos y sondas de campo magnético, en un rango de bajas frecuencias. Este trabajo se dedica a calcular y medir el campo magnético generado por las bobinas de Helmholtz y determinar la uniformidad y la exactitud del campo magnético respecto al centro de simetría del sistema estudiado.

## I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad es necesario realizar una medición del campo magnético emitido por dispositivos electrónicos, para estudiar la compatibilidad electromagnética [1], [2], o emitido por fenómenos naturales [3]. Para realizar las mediciones de campo magnético, es necesario tener un sistema de medición calibrado donde las sondas se someten a la acción del campo magnético uniforme [4], con el objeto de obtener el factor de calibración también conocido con el nombre de factor de antena [5]. El campo magnético a medir puede estar en una zona conocida como de campo lejano [6], o de campo cercano [7].

Las bobinas de Helmholtz son la configuración más simple para producir un campo magnético relativamente constante. Las bobinas de Helmholtz son dos bobinas circulares coaxiales con el mismo radio que es igual a la distancia entre los planos de las bobinas [8]. Cuando las corrientes circulan en sentidos opuestos la configuración se denomina bobinas anti-Helmholtz, y es importante en varias aplicaciones como mediciones, investigaciones biomédicas, calibración de puntas y sensores etc. Ampliar el área de homogeneidad y reducir la variación del campo en los ejes son las tareas de interés basadas en el estudio de un sistema de dos bobinas, se determinó que tres bobinas por las que circula corriente producen un campo magnético de mejores

características en intensidad y uniformidad que las bobinas de Helmholtz standard. Las bobinas poligonales son más fáciles de producir en la industria. [9]. Cuando se incrementa el número de lados de un polígono que forman la bobina, la distribución de la intensidad de campo magnético es más uniforme [9], [10]. Si se requiere mayor uniformidad del campo magnético se puede emplear un sistema rectangular de 5 bobinas, para mediciones biomagnéticas [9] [11]. Para calibrar magnetómetros en un campo magnético uniforme se encuentra un sistema de 8 bobinas de Helmholtz, donde la inhomogeneidad obtenida es menor a 0,1% para  $z = a/2$ , [12].

## II. TEORÍA

### A. Densidad de flujo magnético estático en el eje de la espira

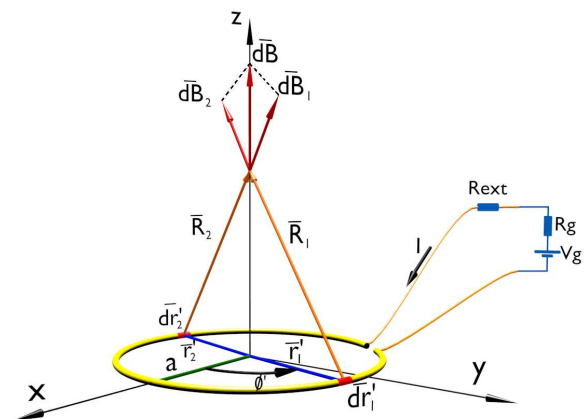


Fig. 1. Espira conectada a un generador de corriente continua con la geometría del problema

Consideremos una espira donde circula una corriente eléctrica  $I$  constante en el tiempo. Partiendo de la expresión diferencial de la ley de Biot-Savart [13], [14]:

$$\overrightarrow{dB}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dr}' \times \overrightarrow{R}}{R^3} \quad (1)$$

donde:

$$\overrightarrow{dr}' = a d\phi' \hat{\phi}, \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' = z\hat{z} - a\hat{\rho} \text{ y } |\overrightarrow{R}| = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

La ecuación (1) resulta:

$$\overrightarrow{dB}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(a d\phi' z \hat{\rho}) + (a^2 d\phi' \hat{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Hay que integrar (2) para obtener  $\vec{B}(r)$ . Aquí se puede observar en la Figura (1), que por la simetría del problema:  $\vec{B}(r) = B(r)\hat{z}$ , entonces se obtiene [14]:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \quad (3)$$

Resulta:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (4)$$

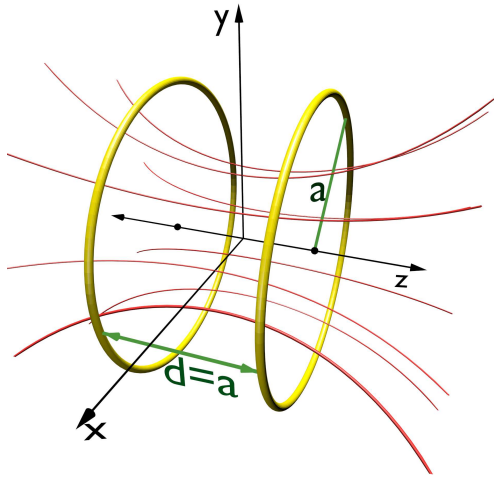


Fig. 2. bobinas de Helmholtz.

La densidad de flujo magnético B producida por dos espiras, como se observa en la Figura 2, donde circula una corriente estática I en cada una de las espiras, se calcula sumando dos componentes del vector  $\vec{B}$ , de acuerdo al resultado de la ecuación (4), que se obtuvo  $\vec{B}$ , se tendrán dos términos iguales, donde las espiras se encuentran localizadas en  $z = -d/2$  y  $z = +d/2$ :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{((z - \frac{d}{2})^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z + \frac{d}{2})^2 + a^2)^{3/2}} \right] \hat{z} \quad (5)$$

De la ecuación (6) haciendo la derivada primera y segunda del vector  $\vec{B}$  respecto de z, se anulan  $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0$ , para  $z = 0$  y  $a = d$ , [15], [14]:

$$\vec{B}(r) |_{z=0} = \frac{\mu_0 I a^2}{((a/2)^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (6)$$

Resulta:

$$\vec{B}(r) |_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{(\frac{5}{4})^{3/2} a} \hat{z} \quad (7)$$

El campo  $\vec{B}$  se puede desarrollar en series de Taylor, y así se obtiene que la desviación respecto de  $\vec{B}(z) |_{z=0}$  es:  $B(z) = B(0)(1 \pm 1.510^{-4})$  para  $|z| < \frac{a}{10}$  [15]. Otros autores realizan la propagación de errores de la ecuación (7) [16]. En este trabajo interesa obtener la solución analítica del vector  $\vec{B}$ , y luego se obtiene el error relativo porcentual en

función de la distancia al origen de coordenadas en función de  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

A continuación se calcula el vector B en cualquier punto del espacio con una excitación de corriente alterna.

**B. Densidad de flujo magnético variable en el tiempo, para un punto cualquiera del espacio. Aproximación cuasi-estática**

Aquí se considera la espira circular, donde se conecta a un generador de corriente alterna, para hacerle circular una corriente I(t) sinusoidal como se observa en la Figura 3. Las bobinas de Helmholtz para frecuencias de LF, VLF y ULF, la longitud de onda es mucho más grande que las dimensiones de la espira. En la práctica se utiliza un número de vueltas en cada bobinado que conforman las Bobinas de Helmholtz, donde el número de vueltas de la bobina (N), multiplicado por el perímetro de la circunferencia (C), es mucho menor a una longitud de onda  $NC \ll \lambda$ , que se puede enunciar como [17]:

$$NC < \frac{\lambda}{10} \quad (8)$$

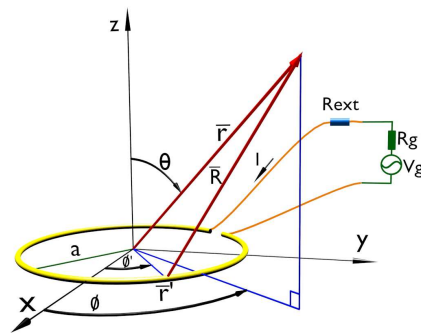


Fig. 3. Espira alimentada por un generador de corriente alterna.

A las frecuencias que cumplen la relación (8), se puede aplicar la aproximación cuasiestática, donde la corriente es prácticamente constante en cada punto de las espiras de las bobinas de Helmholtz, solo será variable con el tiempo. El potencial vectorial magnético  $\vec{A}$  para magnetoestática, se puede escribir como [15]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(r') dv'}{R} \quad (9)$$

Para el caso particular de una espira, donde circula una corriente, y la espira se considera como una línea, la expresión se reducirá:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c I \frac{d\vec{l}'}{R} \quad (10)$$

donde

$$d\vec{l}' = (-a \sin \phi', a \cos \phi', 0) d\phi'$$

$$\vec{r}' = (r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$$

$$\vec{r}'' = (a \cos \phi', a \sin \phi', 0)$$

$$R = |\vec{r}' - \vec{r}''| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi'}$$

La Intensidad de corriente I será constante en el perímetro del lazo [17]. El potencial vectorial magnético  $\vec{A}$  resulta:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \pi \frac{\hat{\phi} I \cos\phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin\theta \cos\phi'}} \quad (11)$$

Esta es la ecuación integral de Fredholm de primera especie [18], que se resuelve y se obtiene [19]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \cdot \left[ \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) \cdot K(k^2) - E(k^2) \right] \quad (12)$$

donde :  $\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}$$

$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\phi}}$  Integral elíptica de 1ª especie.

$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2\phi} d\phi$  Integral elíptica de 2ª especie.

Se calcula finalmente  $\vec{B}$  mediante el rotor del potencial vectorial magnético [19], [18]:

$$\vec{B}_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho \sqrt{(\rho+a)^2 + z^2}} \quad (13)$$

$$\cdot \left[ \frac{\rho^2 + a^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} \cdot E(k^2) - K(k^2) \right]$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\rho+a)^2 + z^2}} \quad (14)$$

$$\cdot \left[ \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} \cdot E(k^2) - K(k^2) \right]$$

Estas son las expresiones del vector de la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ , para una espira, en sus componentes  $B_z$  y  $B_\rho$ .

Considerando la suma de las densidades de flujo magnético  $B$  de cada espira, una en la posición  $z = -d/2$  y la otra en  $z = +d/2$  se obtiene la densidad de flujo magnético de las bobinas de Helmholtz:

$$B_\rho = B_\rho(\rho, z+d) + B_\rho(\rho, z-d) \quad (15)$$

$$B_z = B_z(\rho, z+d) + B_z(\rho, z-d)$$

### III. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las bobinas de Helmholtz que se han construido, como se observa en la Figura 5, tienen los siguientes datos:

$a$  radio

$d$  separación entre bobinas

$N = 8$  número de vueltas

$d = a = 0,39m$

Se colocó el cable de 8 conductores en una vaina plástica circular para que conserve la geometría. En la Figura 4 se puede observar la foto del banco de medición construido. Los componentes del banco de medición se pueden observar en la Figura 5, donde las bobinas se conectan en serie, con una resistencia  $R_{ext} = 56\Omega$ , y luego se conectan al generador de forma de ondas. Para detectar y medir el campo magnético, se coloca en el eje del sistema una bobina de 50 vueltas con un radio  $a = 0,022m$ . Se utilizó un conductor de cobre esmaltado de  $0,2mm$  de diámetro. En algunas referencias se pueden encontrar el diseño de los lazos calibrados blindados que se recomiendan para realizar las mediciones [20].



Fig. 4. Foto de la disposición experimental.

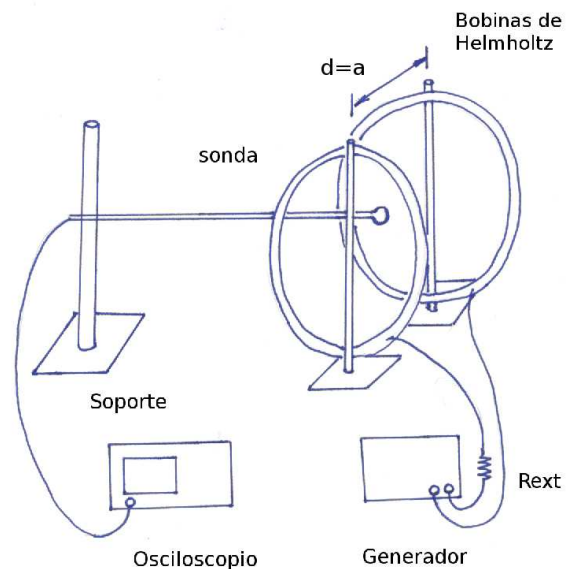


Fig. 5. Esquema del experimento utilizado para generar el campo magnético en la región que separa las bobinas de Helmholtz

La corriente que circulará por las bobinas está dada por la siguiente expresión:

$$I = \frac{V_g}{R_g + R_{ext} + (R + jX)} \quad (16)$$

donde:  $V_g$  es la tensión del generador,  $R_g = 50\Omega$  es la impedancia del generador, y  $R_{ext} = 56\Omega$  es la resistencia externa,  $R + jX$  es la impedancia de las bobinas de Helmholtz en serie.

Esta corriente medida en el osciloscopio es aproximadamente  $|I| \cong 15mA$ .

Las bobinas de Helmholtz están conectadas en serie, y para saber el ancho de banda útil en el cual se van a utilizar, se mide la impedancia con el objetivo de verificar que se utilicen en la región inductiva, y que la resonancia no afecte las mediciones. La impedancia se ha medido con un medidor LCR de 10Hz a 100kHz como se puede observar en la tabla I y la Figura 6. De la Tabla I se puede observar que la

inductancia es aproximadamente:  $L \cong 0,4mH$ .

Tabla I  
IMPEDANCIA MEDIDA DE LAS DOS BOBINAS DE HELMHOLTZ EN SERIE.

Frecuencia[Hz]	Q	X( $\Omega$ )	R( $\Omega$ )	L(mH)
12	0,0071	0,028	4,13	0,38
20	0,012	0,050	4,13	0,39
50	0,03	0,125	4,13	0,40
100	0,06	0,251	4,14	0,40
200	0,12	0,502	4,14	0,40
300	0,18	0,754	4,14	0,40
500	0,303	1,257	4,14	0,40
800	0,484	2,011	4,14	0,40
1000	0,60	2,513	4,14	0,40
2000	1,20	5,026	4,14	0,40
3000	1,80	7,540	4,15	0,40
5000	3,00	12,57	4,16	0,40
7500	4,50	18,85	4,17	0,40
10000	6,00	25,13	4,17	0,40
20000	11,87	50,26	4,20	0,40
28572	16,80	71,81	4,25	0,40
50000	28,6	125,66	4,36	0,40
66667	37,5	167,55	4,46	0,40
100000	53,6	251,33	4,66	0,40

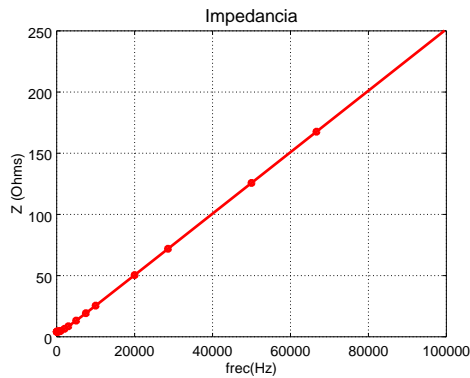


Fig. 6. Módulo de la impedancia en función de la frecuencia de las bobinas de Helmholtz en serie.

Los resultados obtenidos de la densidad de flujo magnético medida a una frecuencia de  $1kHz$ , las componentes en  $z$  y  $\rho$  se puede observar en las figuras 7, 8 y 9.

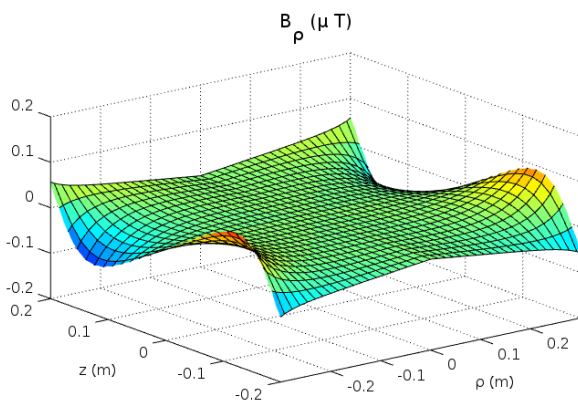


Fig. 7. Componente radial de la densidad de flujo magnético  $B_\rho$  en función de  $z$  y  $\rho$ .

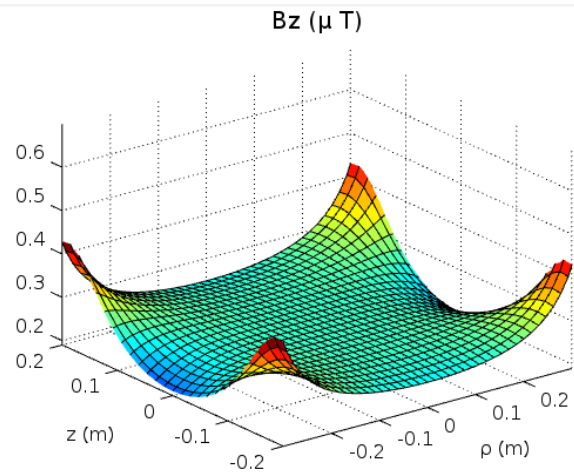


Fig. 8. Componente  $z$  de la densidad de flujo magnético  $B_z$  en función de  $z$  y  $\rho = 0$ .

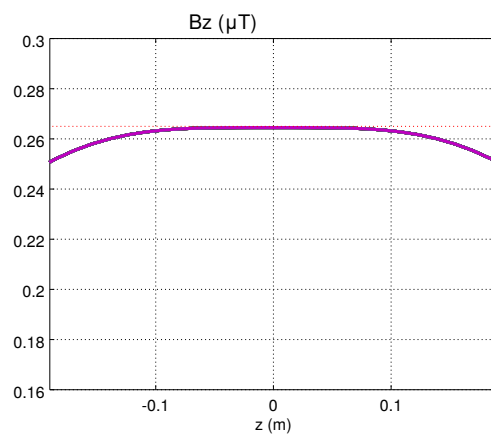


Fig. 9. Componente  $z$  de la densidad de flujo magnético  $B_z$  en función de  $z$ , para  $\rho = 0$ .

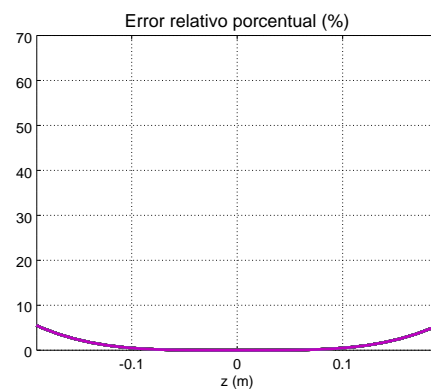


Fig. 10. Error relativo porcentual respecto a  $z=0$  con  $\rho = 0$ .

Una manera de observar la uniformidad de la densidad de flujo magnético medida a lo largo del eje  $z$  es mediante el gráfico del error relativo porcentual  $\epsilon_r\% = \frac{\Delta B100\%}{B(z)|_{z=0}}$ , que se puede observar en la Figura 10. En la Figura 11 se observa un gráfico con las curvas de nivel del error relativo porcentual y en la Figura 12 se observa el error relativo porcentual en el espacio. En la Figura 13 se puede observar la densidad de flujo magnético, que se obtuvo midiendo la diferencia de potencial en dB, sumado el factor de antena.

Se nota que B es aproximadamente constante para pequeños valores de z, luego comienza a disminuir el valor de B.

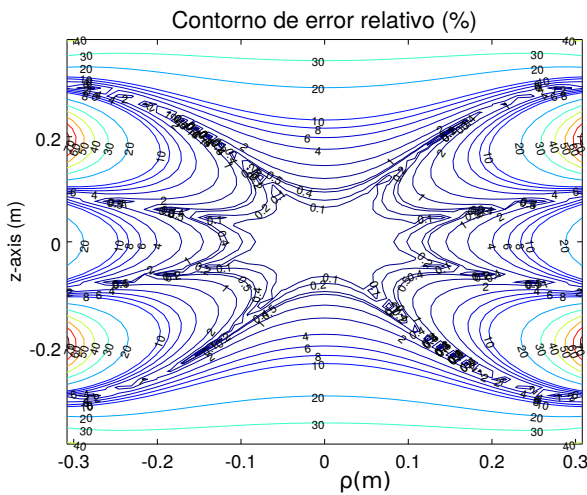


Fig. 11. Curvas de nivel del Error relativo porcentual respecto a  $z=0$ , en función de  $z$  y de  $\rho$ .

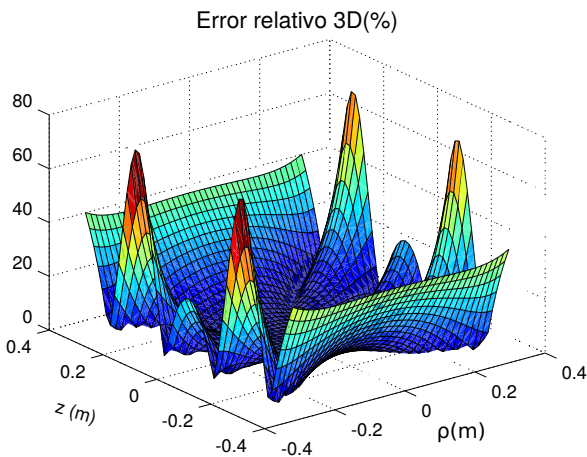


Fig. 12. Error relativo porcentual respecto a  $z=0$  en función de  $z$  y de  $\rho$ .

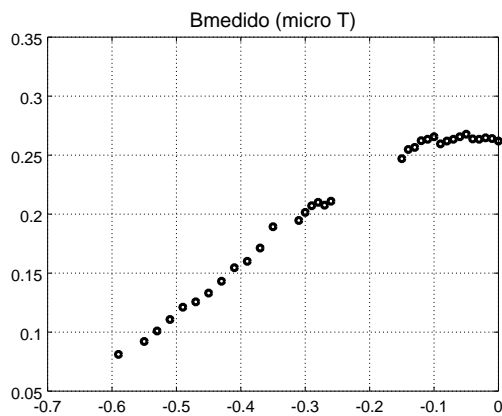


Fig. 13. Densidad de flujo magnético en función de  $z$ , para  $\rho = 0$

IV. CONCLUSIONES

Se ha estudiado la generación que producen las bobinas de Helmholtz que se usan para establecer una zona de densidad

de flujo magnético B conocido y uniforme para diversas aplicaciones. Es importante conocer la zona donde dicho campo B es uniforme con las distintas variables espaciales  $x, y, z$ . Se construyó un banco experimental con las bobinas de Helmholtz, de 0,78m de radio, con 8 vueltas de alambre, que presentaron una resistencia  $R \cong 4\Omega$  y  $L = 0,4mH$ , se determinó mediante la medición de la impedancia con un instrumento LCR, que hasta una frecuencia de  $f = 100kHz$  se midió y presentan un comportamiento inductivo, y no se observa la resonancia. Se determinó la zona del error relativo porcentual en función de  $z$  y  $\rho$ . En la zona donde se genera un campo B uniforme, se pueden hacer las calibraciones de sensores magnéticos y sondas de campo magnético, en un rango de bajas frecuencias. Este trabajo se dedica a calcular y medir el campo magnético generado por las bobinas de Helmholtz

En este trabajo se obtuvo la solución analítica del vector  $\vec{B}$ , y luego se obtuvo el error relativo porcentual en función de la distancia al origen de coordenadas y en función de  $z$  y de  $\rho$ . Se pudo medir la densidad de flujo magnético  $B(z)$  y se observa que para pequeños valores de  $z$ ,  $|z| < 0.12$ , B es practicamente constante. Para mejorar la sensibilidad con que detecta la sonda en las mediciones, habria que colocar un amplificador de corriente para excitar las bobinas de Helmholtz. Además se puede aumentar el radio de las bobinas de Helmholtz, si se desea una zona de mayor tamaño para B uniforme, y se puede seguir el procedimiento de este trabajo, recalculando las dimensiones.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Universidad de Buenos Aires, por el proyecto UBACyT Estudio de perturbaciones electromagnéticas producidas por movimientos sísmicos, código 20020150100085.

REFERENCIAS

- [1] W. G. Fano, "Emisiones de rf de las lámparas fluorescentes de bajo consumo," *Interference Technology*, vol. Europe EMC Guide 2013, pp. 116–121, 2013. [Online]. Available: <http://www.interferencetechnology.com/>
- [2] C. Paul, *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, ser. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley, 2006.
- [3] E. Maffia, V. Trainotti, F. W. G., and N. Trench, "Medición de la resonancia de schumann," *Latinmag Letter*, vol. 1, no. A02, pp. 1–8, 2011.
- [4] R. A. Pahl, J. L. Rovey, and D. J. Pommerenke, "Calibration of magnetic field probes at relevant magnitudes," in *2013 19th IEEE Pulsed Power Conference (PPC)*, June 2013, pp. 1–6.
- [5] W. G. Fano, R. Alonso, and L. M. Carducci, "Near field magnetic probe applied to switching power supply," in *2016 IEEE Global Electromagnetic Compatibility Conference (GEMCCON)*, Nov 2016, pp. 1–4.
- [6] V. Trainotti, W. G. Fano, and L. Dorado, *Ingenieria Electromagnetica*, 1st ed., N. Libreria, Ed. Nueva Libreria, 2006, vol. 2.
- [7] H. Trzaska, *Electromagnetic Field Measurements in the Near Field*. Noble Publishing Corp., 2001.
- [8] D. M. Petrovik and M. D. Radic, "Generalization of helmholtz coil problem," *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 12, no. 3, pp. 375–384, October 2015.
- [9] R. Merritt, C. Purcell, and G. Stroink, "Uniform magnetic field produced by three, four, and five square coils," *Review of Scientific Instruments*, vol. 54, no. 7, pp. 879–882, 1983.
- [10] X. Lu and J. T., "Simulation for the polygonal coil magnetic field," *Simulation for the Polygonal Coil Magnetic Field*, vol. 6, no. 2, pp. 43–49, October 2013.
- [11] J. Wang, S. She, and S. Zhang, "An improved helmholtz coil and analysis of its magnetic field homogeneity," *Review of Scientific Instruments*, vol. 73, no. 5, pp. 2175–2179, 2002.

- [12] P. Baranov, V. Baranova, S. Uchaikin, and Y. Pisarenko, "Creating a uniform magnetic field using axial coils system for calibration of magnetometers," *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, pp. 1–5, Nov 2016.
- [13] C. Johnk and S. Everest, *Ingeniería electromagnética: campos y ondas*. Limusa, 1981.
- [14] J. C. Fernandez, *Ingeniería Electromagnética. I Modelos estáticos y circuitales*, 1st ed., Eudeba, Ed. Nueva Librería, 2013, vol. 1.
- [15] J. R. Reitz and F. J. Milford, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, 1st ed., U. T. E. Hispano-Americana, Ed. UTEHA, 1972, vol. 1.
- [16] E. Bronaugh, "Helmholtz coils for calibration of probes and sensors: Limits of magnetic field accuracy and uniformity," *Proceedings of International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 1995.
- [17] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley-Interscience, 2005.
- [18] I. Dolezel, K. Pavel, and S. Pavel, *Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics*. Wiley, 2009.
- [19] D. J. De Troye and R. J. Chase, "The calculation and measurement of helmholtz coil fields," *Army Research Laboratory*.
- [20] G. A. Morgan, "Analysis and calibration of loop probes for use in measuring interference fields," *Naval Research Laboratory*, vol. 1, no. NRL REPORT R-3486, pp. 1–54, 1949.